

# INFLAÇÃO PRIMORDIAL

Seminário IV - Inverno Astrofísico 2022

Luiz Filipe Guimarães

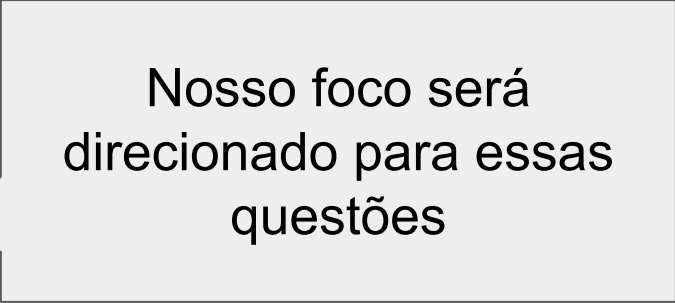
# INFLAÇÃO CÓSMICA PRIMORDIAL

- O que é?
- Quando?
- Onde?
- Por quê?
- Como?

**Essas são as perguntas que responderemos ao longo do seminário**

# INFLAÇÃO CÓSMICA PRIMORDIAL

- O que é?
- Quando?
- Onde?
- Por quê?
- Como?

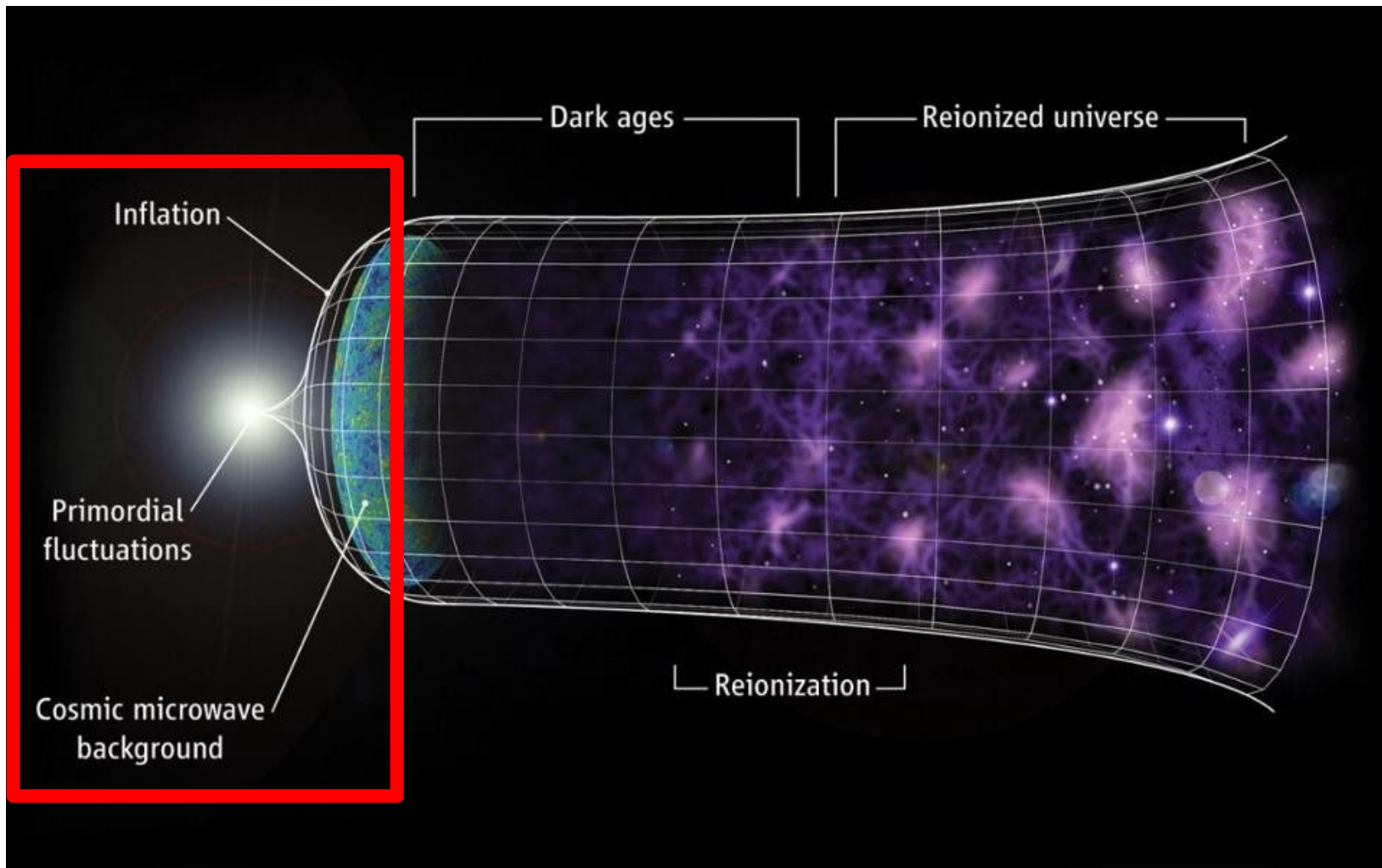


Nosso foco será  
direcionado para essas  
questões

**Essas são as perguntas que responderemos ao longo do seminário**

# O que é inflação? Quando ela ocorreu?

- A inflação foi um breve período de expansão exponencial do universo primordial
- Duração de  $\sim 10^{-33}$  segundos
  - Em breve vamos introduzir o conceito de *e-folds*
- Após os primeiros  $\sim 10^{-36\sim-38}$  segundos do universo ( $10^{16}$  GeV)
  - Antes dela, à escala de Planck, temos regime dominado por efeitos não-perturbativos de gravitação quântica



# Onde a inflação ocorreu?

- **Em todo lugar, ao mesmo tempo\*!**
- Não há um **ponto central** para expansão do universo
- Assim como ocorre na expansão cósmica de hoje em dia, na inflação as regiões do universo afastam-se uma das outras.
- Pergunta: a inflação **acabou simultaneamente** para todo o cosmo?

# Por que inflação?

- São 2 perguntas diferentes:
  - Por que a inflação ocorre? Explicação na sessão no “**como?**”
  - **Por que a inflação é necessária?**
- Revisitando a história da cosmologia
  - Qual era a teoria vigente ao longo das décadas de 50/60?

**O modelo de Big Bang Quente (Hot Big Bang, HBB)**

# O modelo de Big Bang Quente (HBB)

- Conhecemos a evolução do universo hoje em dia
- Cálculos para tempos cada vez mais primordiais indicam:
  - Maiores temperaturas
  - Maiores densidades
  - Até chegar em uma singularidade para  $t = 0$

**Daí vem o nome Big Bang Quente**



# O modelo de Big Bang Quente (HBB)

- Conhecemos a evolução do universo hoje em dia
- Cálculos para tempos cada vez mais primordiais indicam:
  - Maiores temperaturas
  - Maiores densidades
  - Até chegar em uma singularidade para t

**Temperaturas  
elevadas**

**Daí vem o nome Big Bang Quente**

**Começo  
singular**

**Partículas em altas  
velocidades**

# Detalhes adicionais sobre o HBB model

- Homogeneidade + Isotropia + Big Bang = Lei de Hubble-Lemaitre
- Críticas durante as décadas de 40/50 por implicar em **criação** para o universo
- Na verdade, o termo ***Big Bang*** foi cunhado por Fred Hoyle, que acreditava no modelo de *Steady State* para o universo
- Universo muito quente, denso, **opaco: radiação de corpo negro?**
  - **Gamow** et al, 1948

# Detalhes adicionais sobre o HBB model

- Homogeneidade + Isotropia + Big Bang = Lei de Hubble-Lemaitre
- Críticas durante as décadas de 40/50 por implicar em **criação** para o universo
- Na verdade, o termo **Big Bang** foi cunhado por Fred Hoyle, que acreditava no modelo de *Steady State* para o universo
- Universo muito quente, denso e opaco a **luz** (ou **corpo negro**)
  - **Gamow** et al, 1948

**Aula do Hermano de hoje! Valor de ~5K**

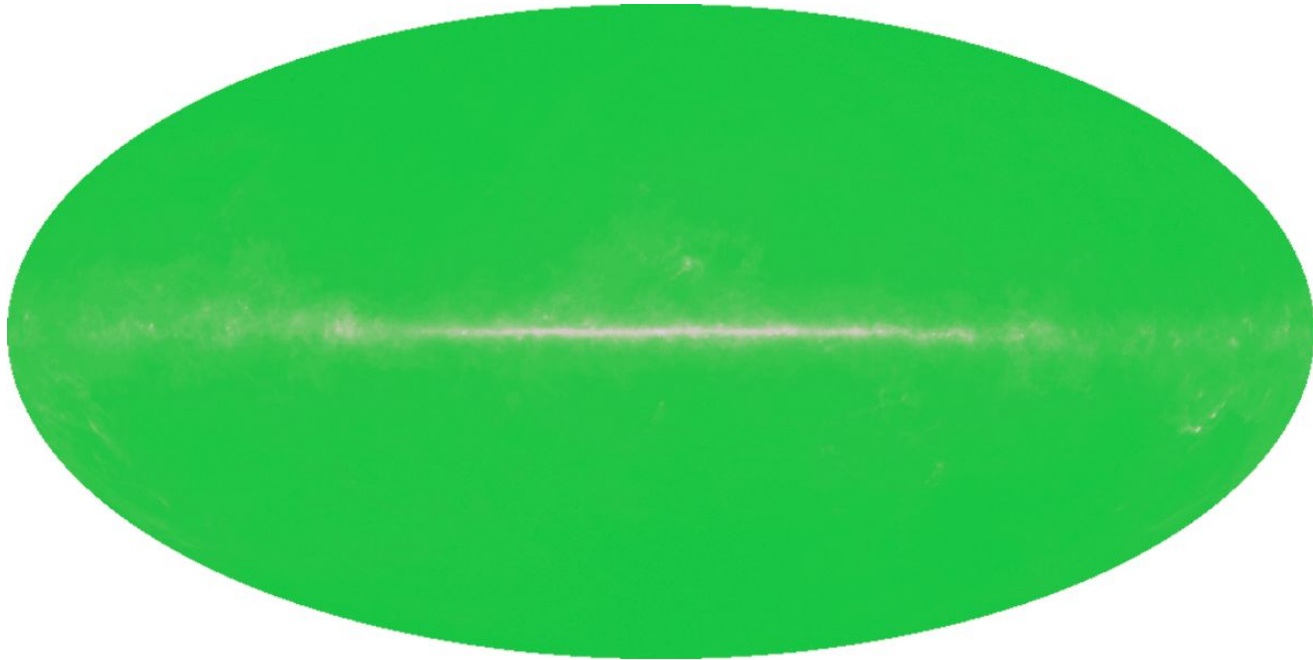
# A Radiação Cósmica de Fundo: **triunfo**

- 1964: Penzias e Wilson detectam sinal,  $\lambda = 7.35\text{cm}$ , **micro-ondas**
  - **Isotrópico**, constante, não era “dielétrico de pombo”
- Dicke et al: **re-descobrem** que o universo quente e denso deveria produzir radiação que hoje seria vista como micro-ondas
  - Universo opaco, pré-recombinação – além desse curso
- Espectro de **corpo negro**, temperatura de **3.5K**

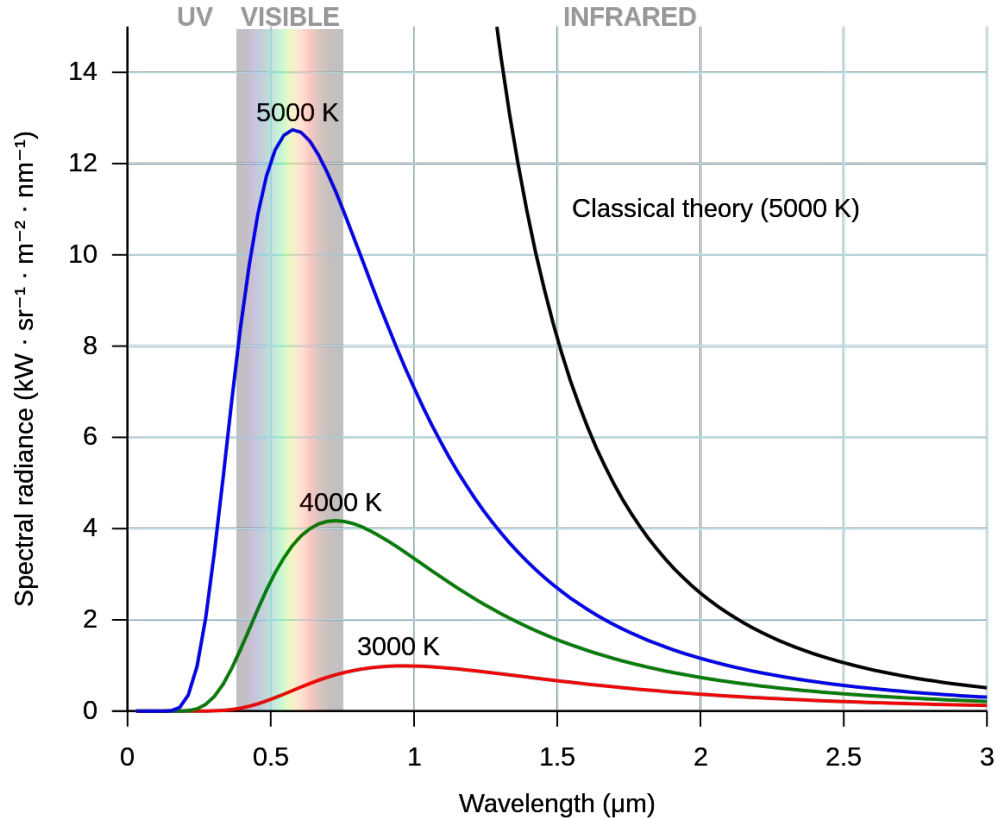
***Cosmic Microwave Background***

# Novas imagens da CMB - Penzias e Wilson

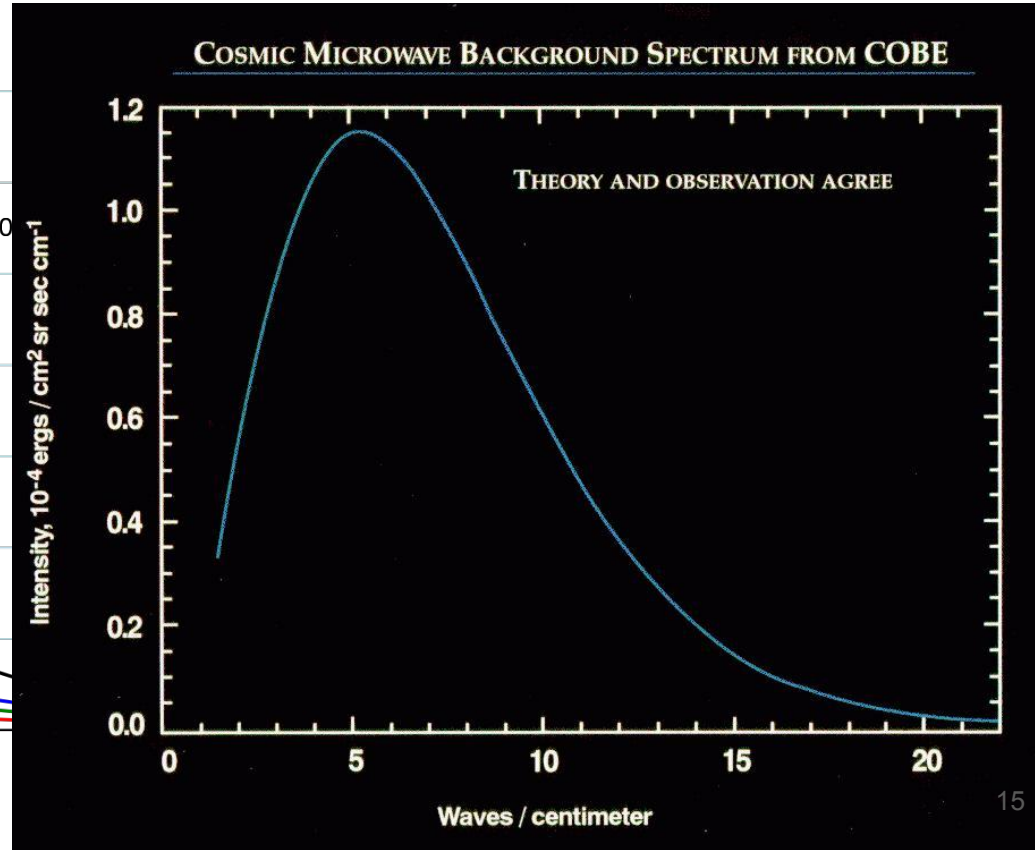
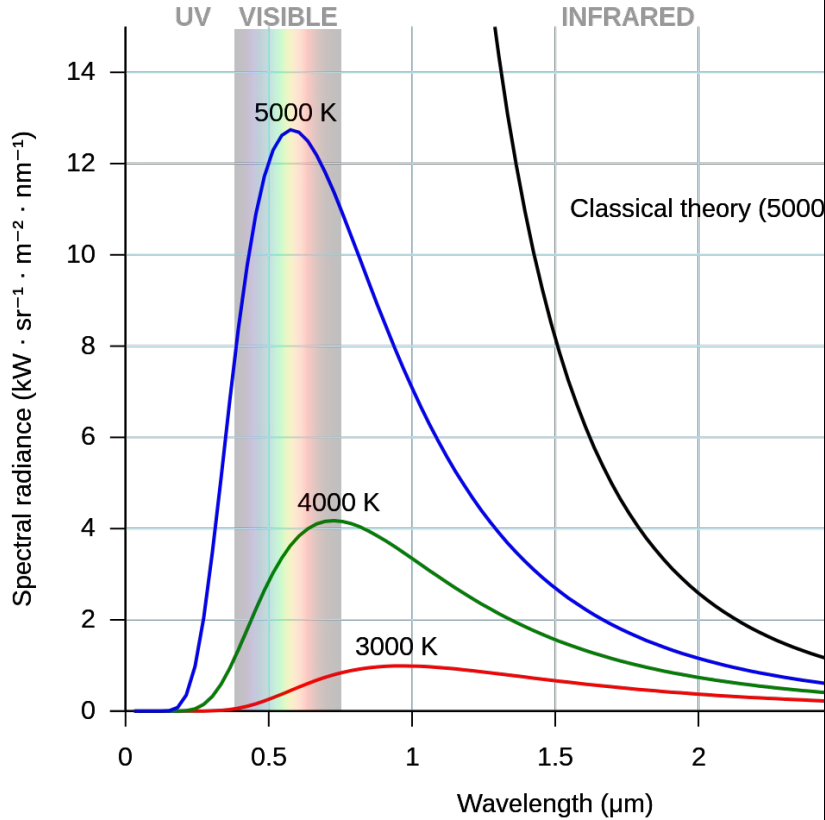
- Mapa medido por P&W



# Espectro de Corpo Negro da CMB (COBE/FIRAS)



# Espectro de Corpo Negro da CMB (COBE/FIRAS)



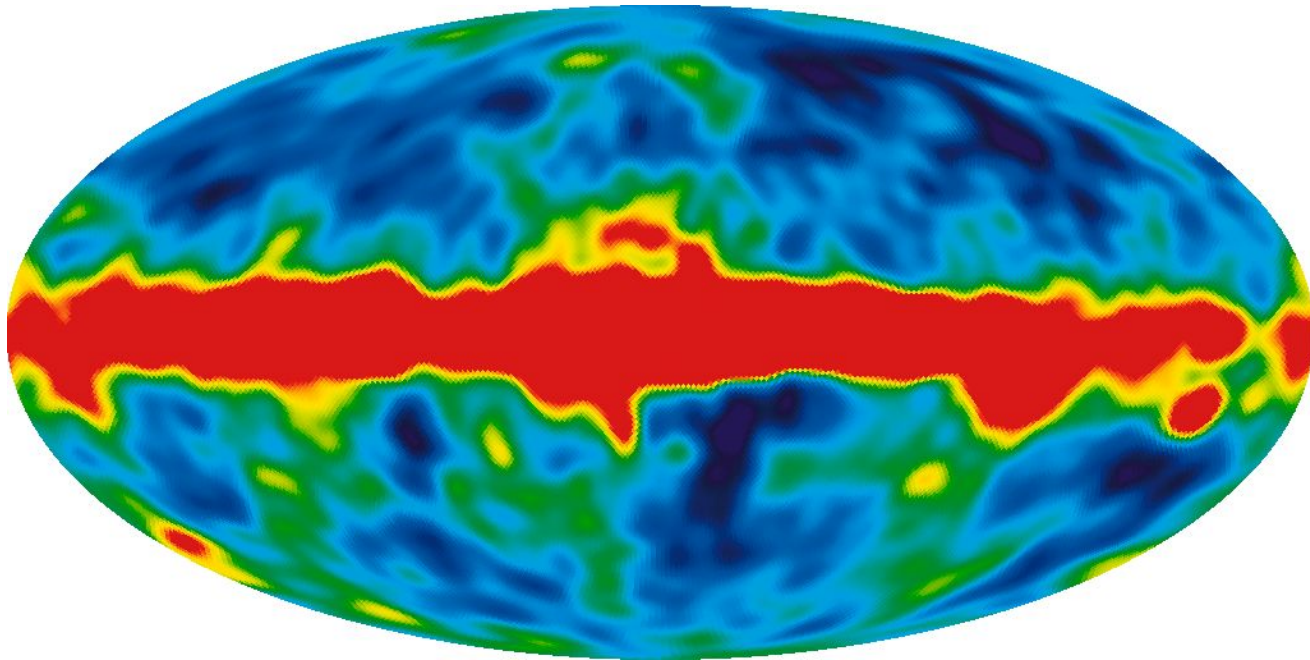
# A Radiação Cósmica de Fundo: **ruína**

- A CMB ser isotrópica, *praticamente* constante a 3.5K foi um desafio a ser explicado
  - Algum fenômeno físico promoveu esse equilíbrio térmico?
- Satélites COBE, WMAP: **flutuações na temperatura**,  $\sim 10^{-5}\text{K}$ 
  - De onde vieram?
- Outros **problemas** teóricos relacionados ao modelo foram sendo descobertos



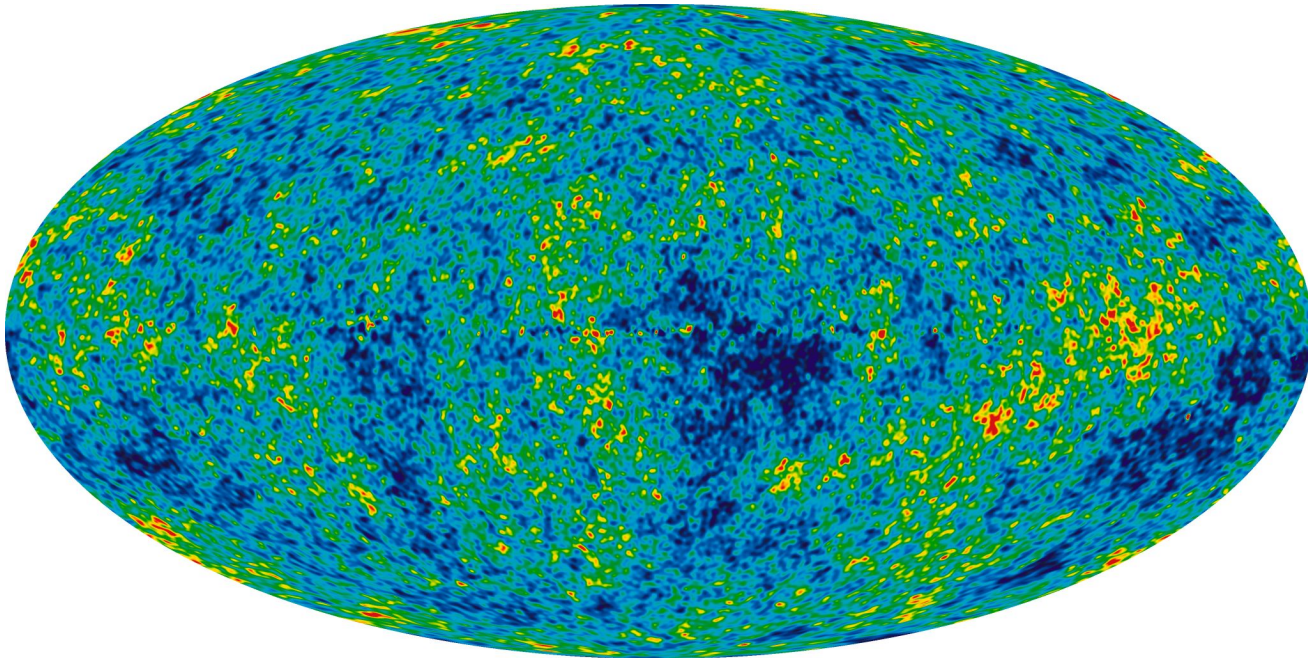
# Novas imagens da CMB - COBE

- Mapa medido pelo COBE



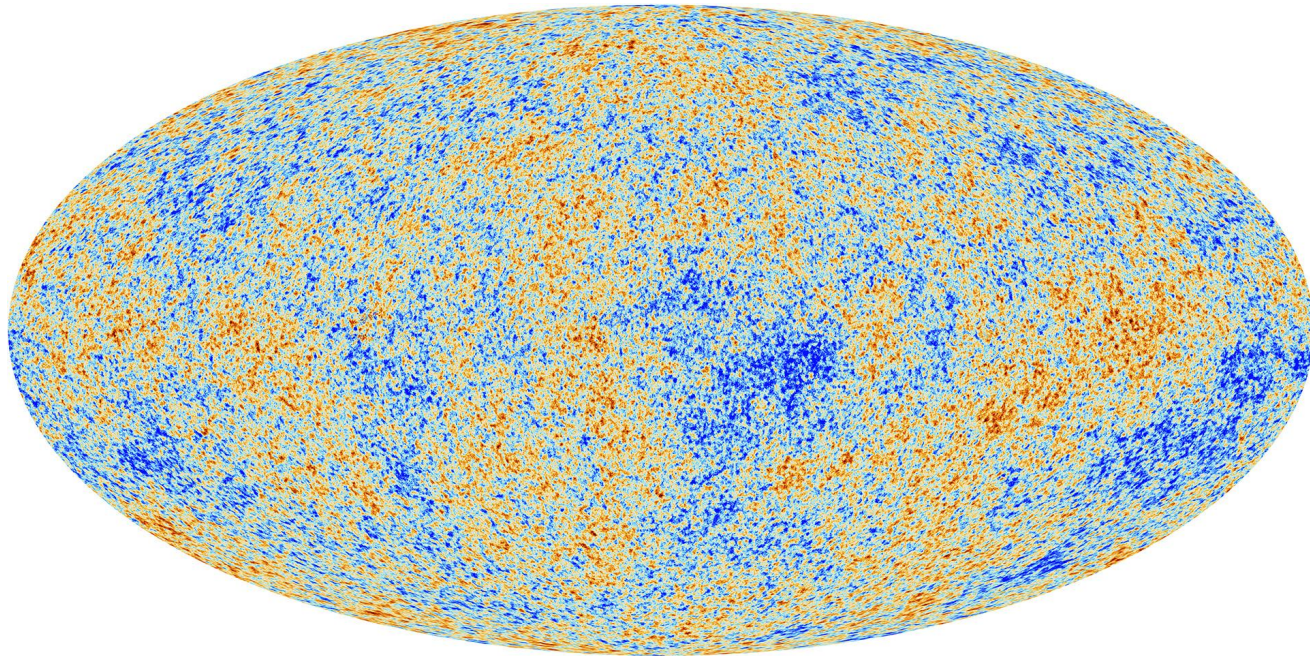
# Novas imagens da CMB - WMAP

- Mapa medido pelo WMAP

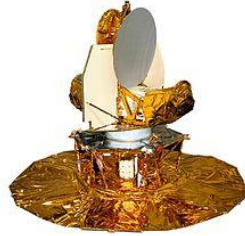


# Novas imagens da CMB - Planck

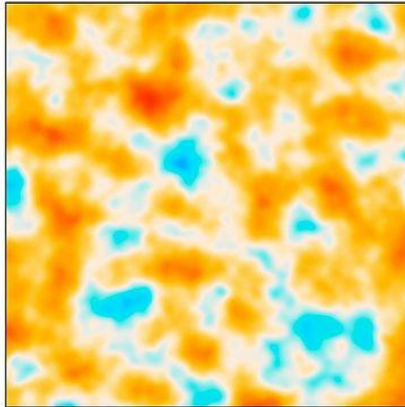
- Mapa medido pelo Planck:



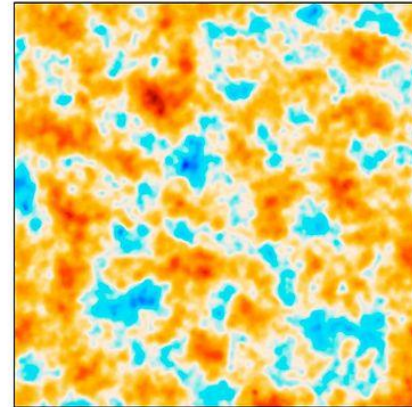
# Comparativo entre satélites



COBE

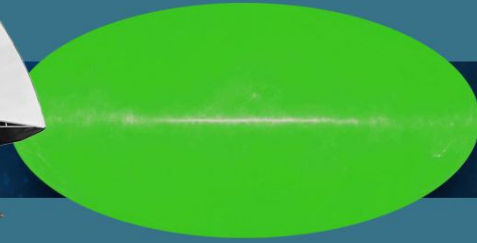
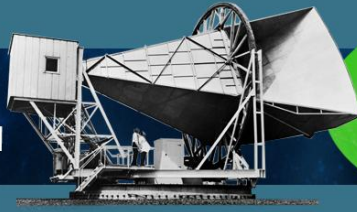


WMAP

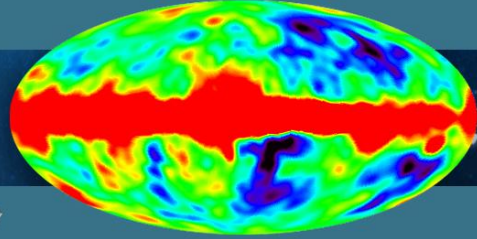
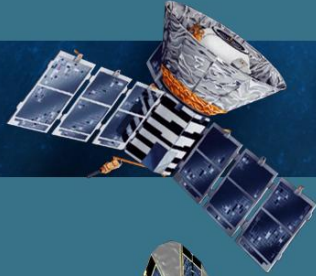


Planck

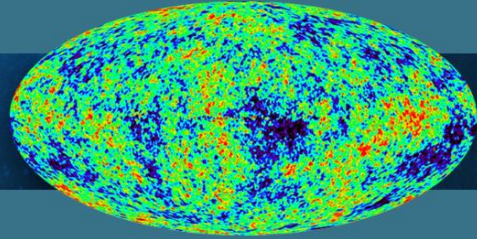
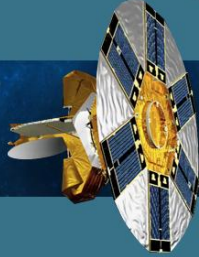
1962  
PENZIAS & WILSON



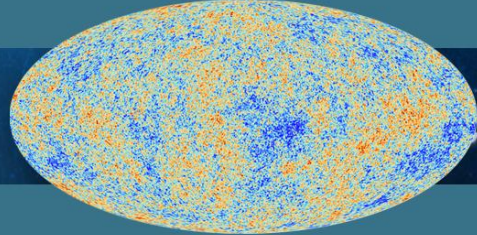
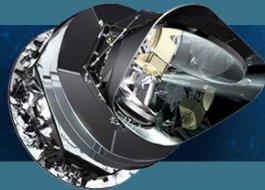
1989-1993  
COBE



2001-2010  
WMAP



2009-2013  
PLANK



# Os problemas do HBB model

- Retrocedendo pro passado, **singularidade** em  $t = 0$
- **Problema do Horizonte**: regiões do espaço **sem contato causal** apresentando **mesma temperatura** na CMB
- **Problema da Planeza**: curvatura do universo é **muito pequena**, **cresce** após o HBB, logo começou **ainda menor**
- **Flutuações**: de onde vieram? O que as provocou?

# PROBLEMA DO HORIZONTE

- A CMB é homogênea e isotrópica: **temperatura uniforme**
- Extensão da CMB = horizonte de partículas (contato causal), **hoje**
- Mas, durante a **recombinação**, essas grandezas diferiam
- Podemos calcular a razão entre elas, obtendo o número de regiões na CMB **sem contato causal**

$$\frac{\lambda_H^3(t_{LSS})}{H_{LSS}^{-3}} = \left( \frac{T_0}{T_{LSS}} \right)^{-3/2} \approx 10^6$$

# PROBLEMA DO HORIZONTE

- A CMB é homogênea e isotrópica: **temperatura uniforme**
- Extensão da CMB = horizonte de partículas (contato causal), **hoje**
- Mas, durante a **recombinação**, essas grandezas diferiam
- Podemos calcular a razão entre elas, obtendo o número de regiões na CMB **sem contato causal**

$$\frac{\lambda_H^3(t_{LSS})}{H_{LSS}^{-3}} = \left( \frac{T_0}{T_{LSS}} \right)^{-3/2} \approx 10^6$$



# PROBLEMA DO HORIZONTE

- A CMB é homogênea e isotrópica: **temperatura uniforme**
- Extensão da CMB = horizonte de partículas (contato causal), **hoje**
- Mas, durante a recombinação, essas regiões não teriam entrado em contato causal. Como essas regiões entraram em equilíbrio térmico?
- Podemos calcular a extensão da CMB na época da recombinação. Como a extensão da CMB na época da recombinação é muito menor do que a extensão da CMB hoje, podemos calcular a extensão da CMB na época da recombinação **sem contato causal**.

$$\frac{\lambda_H^3(t_{LSS})}{H_{LSS}^{-3}} = \left( \frac{T_0}{T_{LSS}} \right)^{-3/2} \approx 10^6$$

# PROBLEMA DA PLANEZA

- O parâmetro de densidade para a curvatura do universo cresce com o tempo durante a dominação de matéria, radiação
- Hoje ele possui um valor pequeno,  $1 - \Omega_0 \sim 10^{-3}$
- Ou seja, ele era ainda menor antes. Se ele fosse um pouco diferente, seria muito maior hoje!

$$\frac{|\Omega - 1|_{t_N}}{|\Omega - 1|_{t_0}} \approx \frac{a_N^2}{a_0^2} \approx \frac{T_0^2}{T_N^2} \approx O(10^{-16})$$

# PROBLEMA DA PLANEZA

- O parâmetro de densidade para a curvatura do universo cresce com o tempo durante a dominação de matéria, radiação
- Hoje ele possui um valor pequeno,  $1 - \Omega_0 \sim 10^{-3}$
- Ou seja, ele era ainda menor antes. Se ele fosse um pouco diferente, seria muito maior hoje!

$$\frac{|\Omega - 1|_{t_N}}{|\Omega - 1|_{t_0}} \approx \frac{a_N^2}{a_0^2} \approx \frac{T_0^2}{T_N^2} \approx O(10^{-16})$$

# PROBLEMA DA PLANEZA

- O parâmetro de densidade para a curvatura do universo cresce com o tempo durante a dominação de matéria, radiação
- Hoje ele possui um valor muito pequeno
- Ou seja, ele era muito diferente, seria muito grande no passado

**O que garantiu um valor tão pequeno para a curvatura no passado?**

$$\frac{|\Omega - 1|_{t_N}}{|\Omega - 1|_{t_0}} \approx \frac{a_N^2}{a_0^2} \approx \frac{T_0^2}{T_N^2} \approx O(10^{-16})$$

# PROBLEMA DAS SEMENTES PRIMORDIAIS

- A CMB é homogênea, mas até certo ponto:  $\Delta T \sim 10^{-5}K$
- Nada dentro no contexto de HBB explica essas flutuações
- Apresentam outras características, como **quase independência de escala**
- **Reforça** o problema do **horizonte**: essas flutuações têm características estatísticas similares em toda CMB
- Originam galáxias, aglomerados, etc.

# RESOLVENDO OS PROBLEMAS

- O que uma solução para esses problemas deve apresentar?
- Prover contato causal entre todas as regiões da CMB
  - Superfície da CMB **dentro do horizonte** em algum momento
  - Escalas físicas precisam **crescer mais rápido** que o horizonte
- Garantir curvatura muito pequena
  - Período quando ela **decrece** – era bem maior
- Isso acontece em regime de **expansão acelerada**

# EXPANSÃO ACELERADA

- Obtida pela razão entre escalas físicas e o horizonte

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{a}{H^{-1}} \right) = \frac{d}{dt} (\dot{a}) = \ddot{a} > 0$$

- Aceleração positiva requer **pressão negativa**

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G(\rho + 3p)}{3}a \quad \Rightarrow \quad p < -\frac{\rho}{3}$$

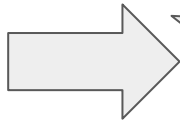
# EXPANSÃO ACELERADA

- Obtida pela razão entre escalas físicas e o horizonte

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{a}{H^{-1}} \right) = \frac{d}{dt} (\dot{a}) = \ddot{a} > 0$$

- Aceleração positiva requer **pressão negativa**

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G(\rho + 3p)}{3}a$$



$$p = -\rho$$



# PROPOSIÇÃO: EXPANSÃO DE SITTER

- Para  $p = -\rho$ , temos um universo de De Sitter: a **inflação**
- A evolução do fator de escala é **exponencial**

$$a = a_i \exp^{H_i(t-t_i)}$$

- O parâmetro de Hubble é **constante**

$$\frac{\dot{a}}{a} = H_i$$

**Como ela resolve os problemas do HBB?**

# HORIZONTE PARA EXPANSÃO ACELERADA

- Queremos que o tamanho do horizonte **atual**, durante a inflação, seja **menor** do que o horizonte durante a inflação – ele **crece**

$$\lambda_{RH}(t_i) = H_0^{-1} \left( \frac{a_{t_i}}{a_{t_0}} \right) = H_0^{-1} \left( \frac{a_{t_f}}{a_{t_0}} \right) \left( \frac{a_{t_i}}{a_{t_f}} \right)$$

- Definimos a quantidade  $N$ , o **número de e-folds** – “quantas exponenciais” o universo cresce

$$N = H_I (t_f - t_i) = \log \left( \frac{a_{t_f}}{a_{t_i}} \right)$$

# HORIZONTE PARA EXPANSÃO ACELERADA

- Com isso, estamos exigindo que

$$H_0^{-1} \left( \frac{T_0}{T_f} \right) e^{-N} \lesssim H_I^{-1}$$

- Para resolver o problema,  $N \sim 67$

$$N \geq \log \left( \frac{T_0}{H_0} \right) - \log \left( \frac{T_f}{H_I} \right) \approx 67$$

# HORIZONTE PARA EXPANSÃO ACELERADA

- Outra forma de enxergar: o horizonte **comóvel** durante a inflação **decrece**

$$R_{H,com.}(t_f) = H_I^{-1} \left( \frac{a_i}{a_f} \right) = H_I^{-1} e^{-N}$$

- Mas escalas físicas permanecem **constantes**

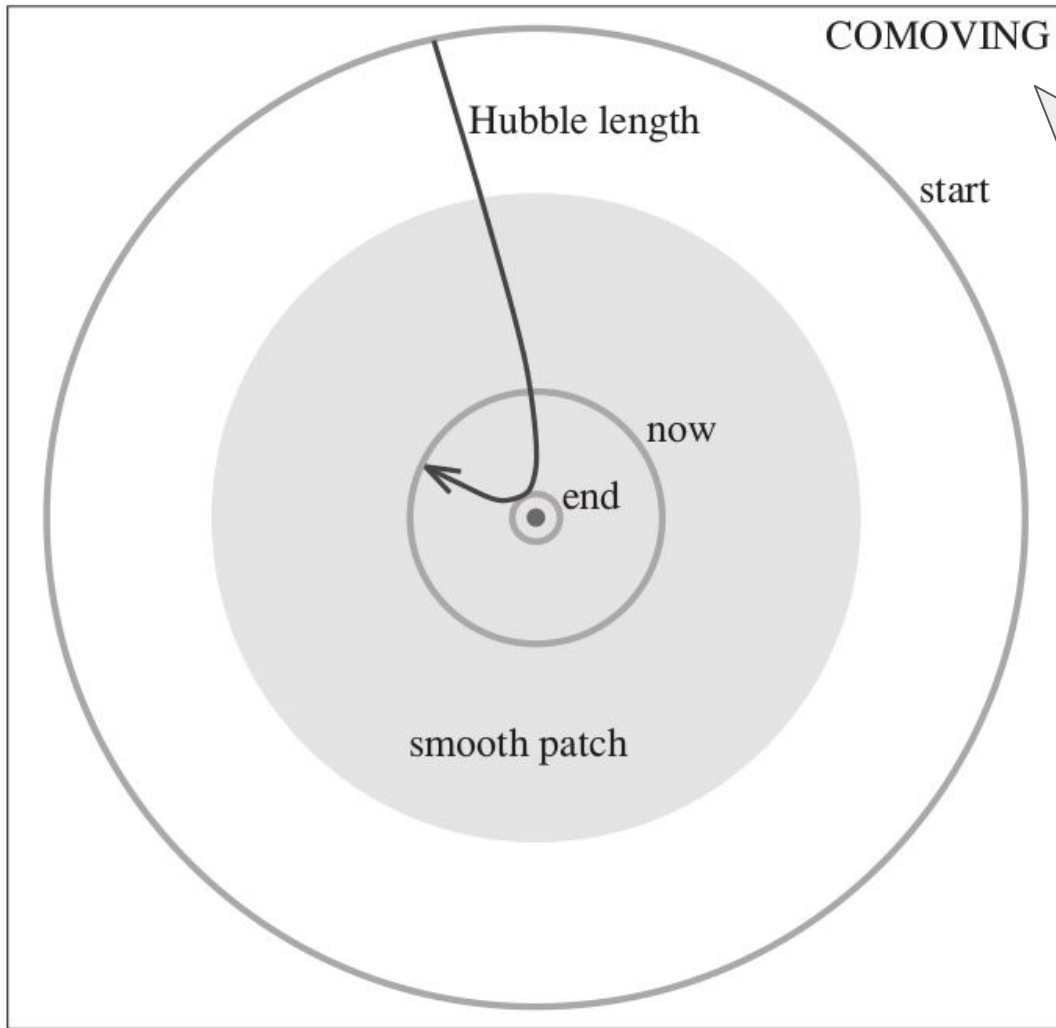
# HORIZONTE PARA EXPANSÃO ACELERADA

- Outra forma de enxergar: o horizonte **decrece**

Redução Exponencial

$$R_{H,com.}(t_f) = H_I^{-1} \left( \frac{a_i}{a_f} \right) = H_I^{-1} e^{-N}$$

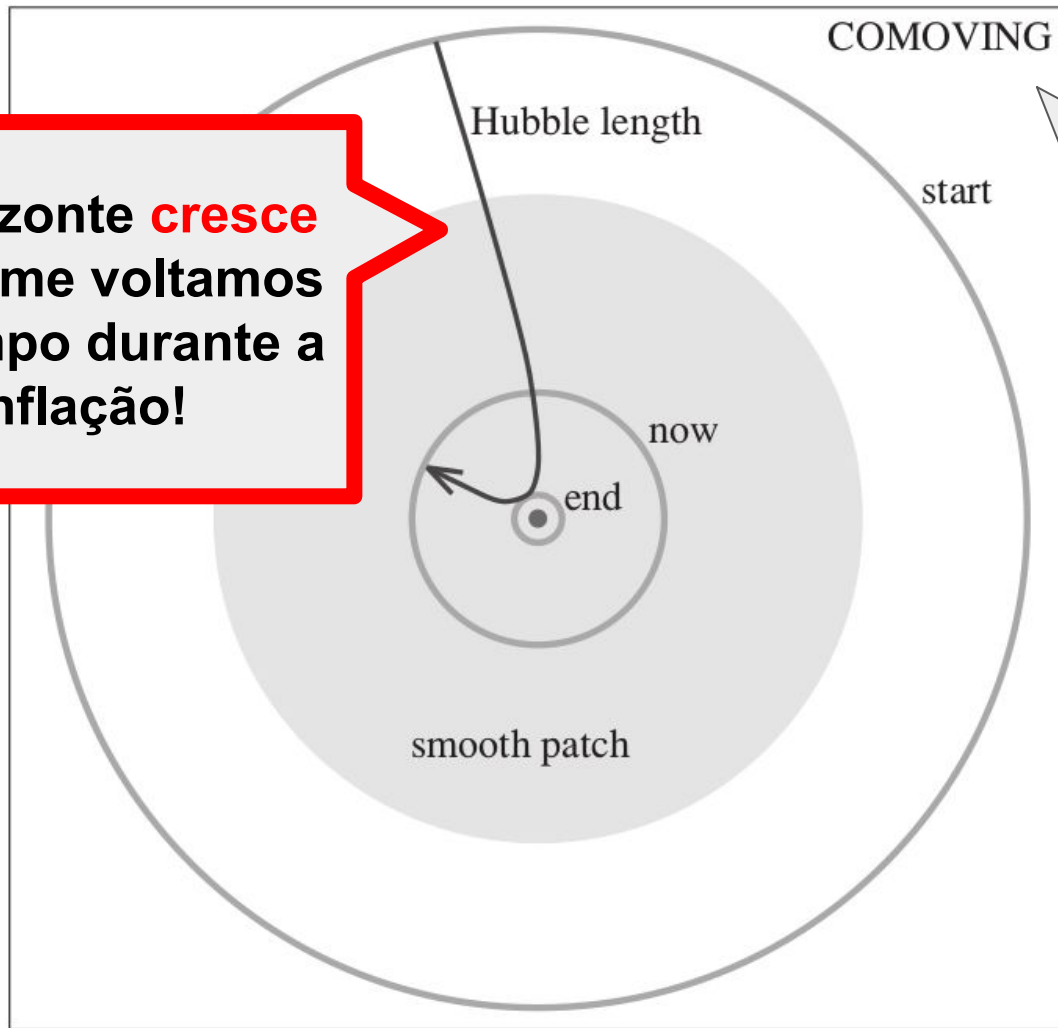
- Mas escalas físicas permanecem **constantes**



**Raio de  
Hubble  
Comóvel:**

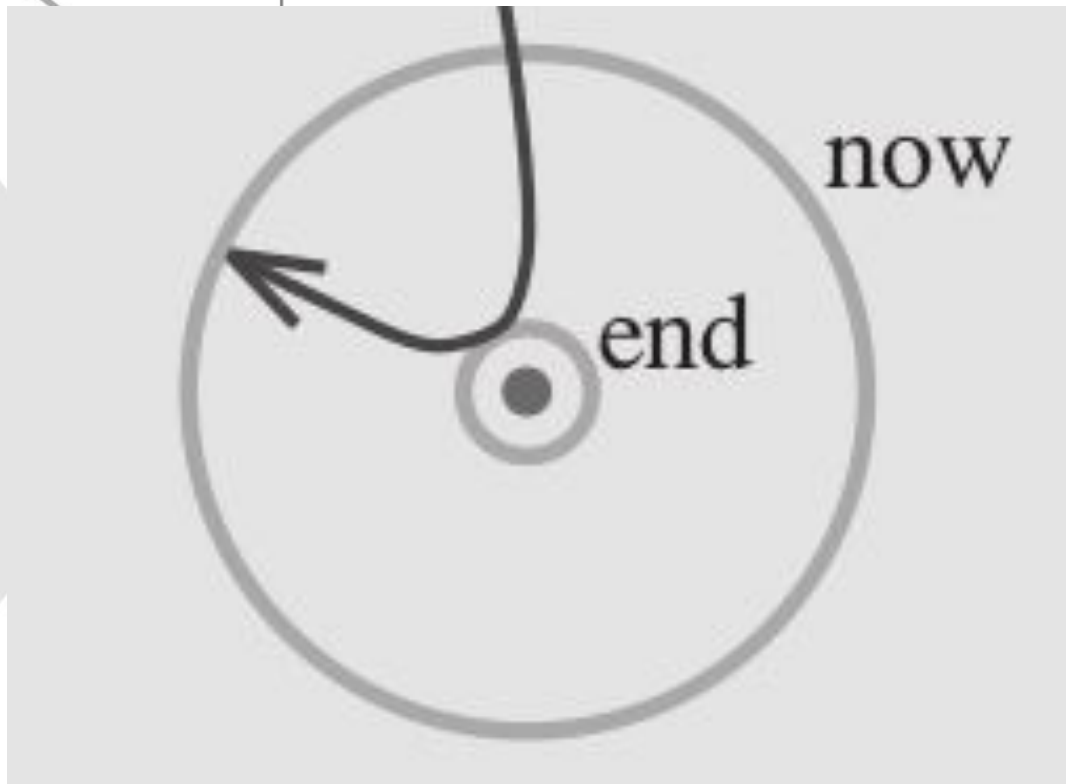
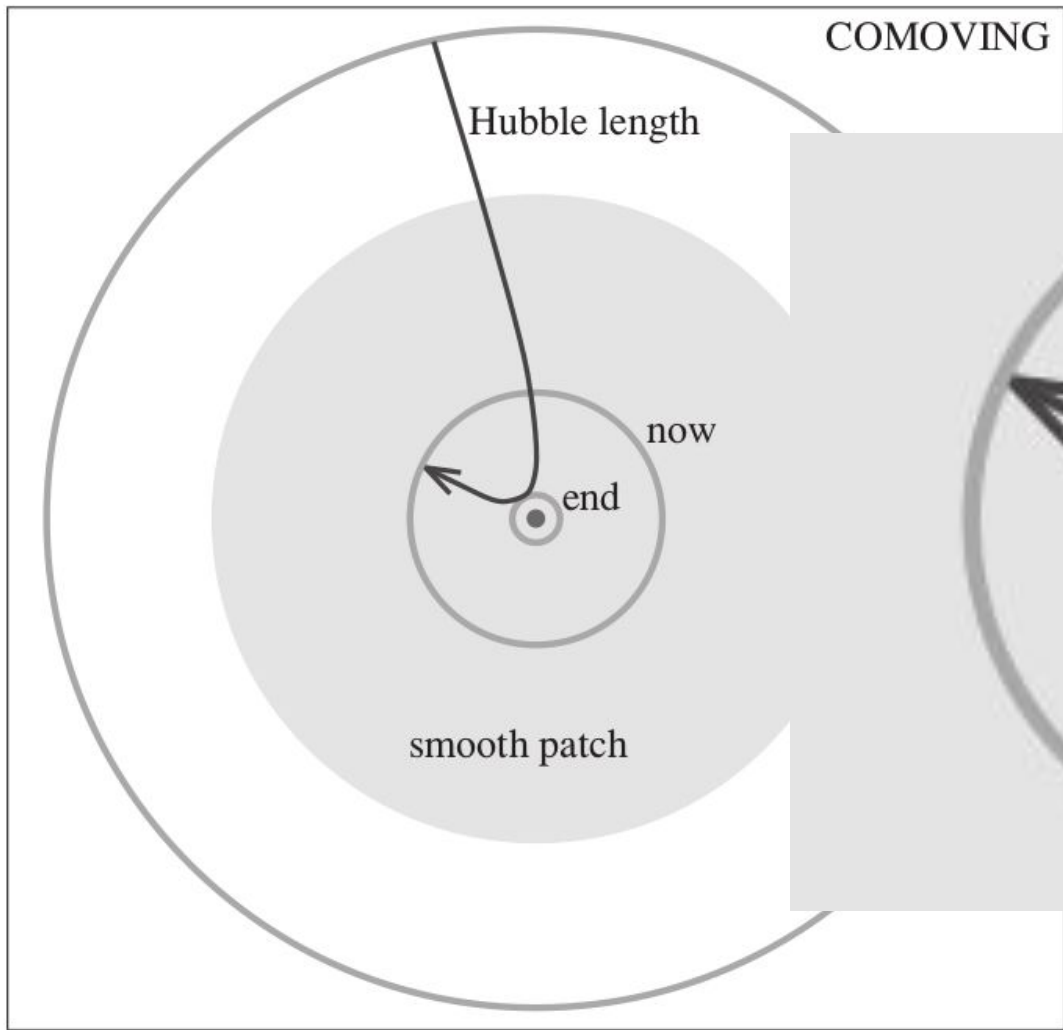
$$\frac{H^{-1}}{a}$$

O horizonte **crece** conforme voltamos no tempo durante a inflação!

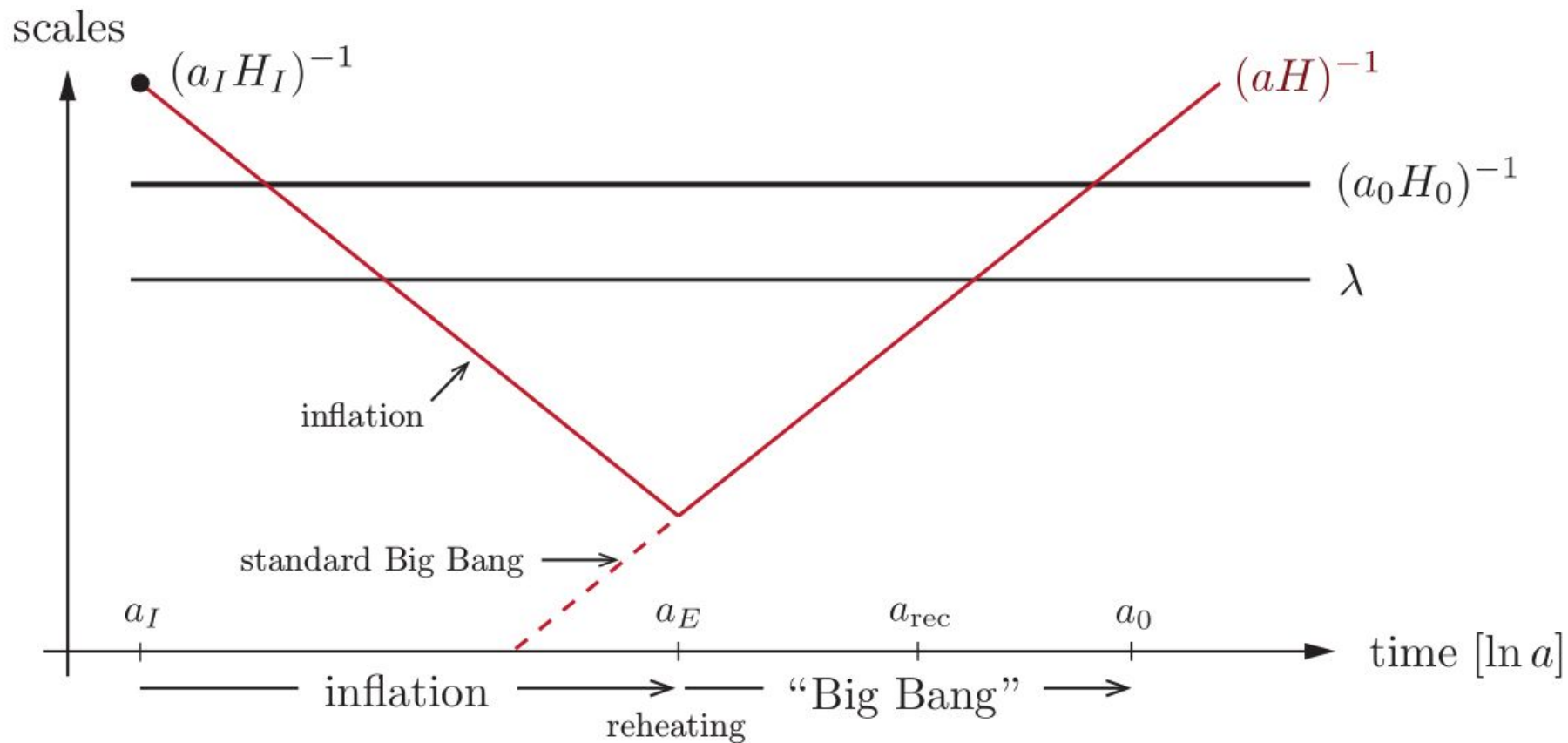


**Raio de Hubble Comóvel:**

$$\frac{H^{-1}}{a}$$







# CURVATURA PARA EXPANSÃO ACELERADA

- Como desejado, na inflação o **parâmetro de curvatura diminui**
- Para H constante, ele é proporcional ao inverso do fator de escala

$$1 - \Omega \propto a^{-2}$$

$$\frac{|1 - \Omega|_{t_f}}{|1 - \Omega|_{t_i}} = \left( \frac{a_i}{a_f} \right)^2 = e^{-2N} \approx e^{-135}$$

# CURVATURA PARA EXPANSÃO ACELERADA

- Como desejado, na inflação o **parâmetro de curvatura diminui**
- Para H constante, ele é proporcional ao inverso do fator de escala

$$1 - \Omega \propto a^{-2}$$

Redução Exponencial

$$\frac{|1 - \Omega|_{t_f}}{|1 - \Omega|_{t_i}} = \left( \frac{a_i}{a_f} \right)^2 = e^{-2N} \approx e^{-135}$$

# PERTURBAÇÕES QUÂNTICAS VERSÃO 1

- Resta justificar a presença das **flutuações de temperatura**
- De **flutuações quânticas** do ingrediente cosmológico que promove a inflação – levam à **perturbações da curvatura**
- Perturbações de curvatura em **temperatura**: **Efeito Sachs-Wolfe**
- Um campo escalar: o **inflaton**

Chegamos no **como** a inflação resolve os problemas do HBB

# O INFLATON – AÇÃO E DINÂMICA

- **Promove a inflação: domina** o conteúdo de matéria primordial

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + V(\varphi) \right]$$

- Equação de Movimento: **Klein-Gordon + Universo em Expansão**

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} - \frac{\nabla^2 \varphi}{a^2} + V'(\varphi) = 0$$

# O INFLATON – AÇÃO E DINÂMICA

- **Promove a inflação: domina** o conteúdo de matéria **Potencial** radial

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + V(\varphi) \right]$$

- Equação de Movimento: **Klein-Gordon + Universo em Expansão**

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} - \frac{\nabla^2 \varphi}{a^2} + V'(\varphi) = 0$$

# O INFLATON – AÇÃO E DINÂMICA

- Promove a inflação: domina o conteúdo de matéria **Potencial** escalar

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + V(\varphi) \right]$$

- **“Arrasto”** lento: Klein-Gordon **Inhomogeneidades** Expansão

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} - \frac{\nabla^2 \varphi}{a^2} + V'(\varphi) = 0$$

# INFLATON – EQUAÇÃO DE ESTADO

- Podemos calcular a pressão e densidade de energia do inflaton

$$T_{ii} = p_{\varphi} = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} \ominus V(\varphi)$$

$$T_{00} = \rho_{\varphi} = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} \oplus V(\varphi)$$



# INFLATON – EQUAÇÃO DE FRIEDMANN

- Expansão devido apenas ao inflaton e sua densidade de energia

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_\varphi = \frac{8\pi G}{3} \left( V(\varphi) + \frac{\dot{\varphi}^2}{2} \right)$$

- Sabemos que a solução tem **H constante\***, fator de escala **exponencial** – para isso, precisamos de  $p = -\rho$ 
  - O que implica para o campo? E para a dinâmica do universo?

# INFLATON – CONDIÇÕES DE SLOW-ROLL

- Condição sobre o **potencial** do inflaton

$$p = -\rho \Rightarrow V(\varphi) \gg \dot{\varphi}^2$$

- Velocidade baixa – é o que chamamos de **slow-roll**
  - Campo “rola” o seu potencial de forma lenta por causa do **termo de fricção** na equação de Klein-Gordon!

# INFLATON - CONDIÇÕES DE SLOW-ROLL

- O requerimento acima implica em **condições/simplificações**
- 1ª condição: Equação de Estado + Friedmann

$$V(\varphi) \gg \dot{\varphi}^2 \Rightarrow \frac{(V')^2}{V} \gg H^2$$

- 2ª condição: Velocidade e Aceleração na Equação de Movimento

$$\ddot{\varphi} \ll 3H\dot{\varphi} \Rightarrow V'' \ll H^2$$

# PARÂMETROS DE SLOW ROLL – HUBBLE

- Podemos expressar essas **condições** através de **parâmetros**
- A 1ª condição de slow-roll diz respeito a evolução do **background**

$$\epsilon_H = -\frac{\dot{H}}{H^2} \lll 1$$

- Na verdade, **H não é constante**, mas evolui devagar – necessário para acontecer o chamado **graceful exit**

# PARÂMETROS DE SLOW ROLL – HUBBLE

- A 2ª condição de slow-roll diz respeito a equação de movimento

$$\eta_H = -\frac{\ddot{\varphi}}{H\dot{\varphi}}, \quad |\eta_H| \ll 1$$

- Demonstra a dominação do **termo de fricção** frente à aceleração
- Não são os únicos parâmetros que podem ser definidos

# PARÂMETROS DE SLOW ROLL – POTENCIAL

- Construindo relações através da Equação de Friedmann

$$\epsilon_V \simeq \frac{1}{16\pi G} \left( \frac{V'}{V} \right)^2 \quad \eta_V \simeq \frac{1}{8\pi G} \left( \frac{V''}{V} \right)$$

- *Potential Slow-Roll Parameters*. Não são exatos!
- Mais fáceis de trabalhar. Fornecem resultados **apenas** com  $V(\varphi)$

# PARÂMETROS DE SLOW ROLL – POTENCIAL

- Parâmetros de SR: Hubble vs. Potencial

$$\epsilon_H \simeq \epsilon_V$$

$$\eta_H \simeq \eta_V - \epsilon_V$$

- Em 1ª ordem eles são todos **constantes**
- Na verdade, evoluem – necessário para inflação terminar!

# PARÂMETROS DE SLOW ROLL

- Relembrando:  $\epsilon_H$  quantifica evolução da função de Hubble

$$\frac{\ddot{a}}{a} = (1 - \epsilon_H) H^2$$

- Final da inflação: 1º parâmetro de ordem **unidade**
- Curiosidade: existe inflação com **ultra-slow-roll**,  $\epsilon_H$  ainda menor!
  - Procurem o que acontece com  $\eta_H$



# O QUE ACONTECE APÓS A INFLAÇÃO?

- O final da inflação não marca o fim da ação dos modelos de inflação
- Final da **expansão exponencial**: universo **frio e vazio**
- Começo da nucleossíntese: universo **quente e denso**

**Como essas duas fases se conectam?**

**Re-aquecimento – começo do hot big bang!**

# (P)REHEATING

- Pós-inflação: inflaton **oscila em torno de seu mínimo**

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} = -m^2\varphi$$


$$\ddot{\varphi} = -m^2\varphi$$

- Oscilação + acoplamento a outros campos – **(p)reaquecimento**
  - Férmions: lento, em equilíbrio, re-aquecimento
  - Bósons: rápido, fora de equilíbrio, pré-aquecimento

# (P)REHEATING

- Pós-inflação: inflaton **oscila em torno de seu mínimo**

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} = -m^2\varphi$$



$$\ddot{\varphi} = -m^2\varphi$$

**Oscilador harmônico**

- Oscilação + acoplamento a outros campos – **(p)reaquecimento**
  - Férmions: lento, em equilíbrio, re-aquecimento
  - Bósons: rápido, fora de equilíbrio, pré-aquecimento

# (P)REHEATING

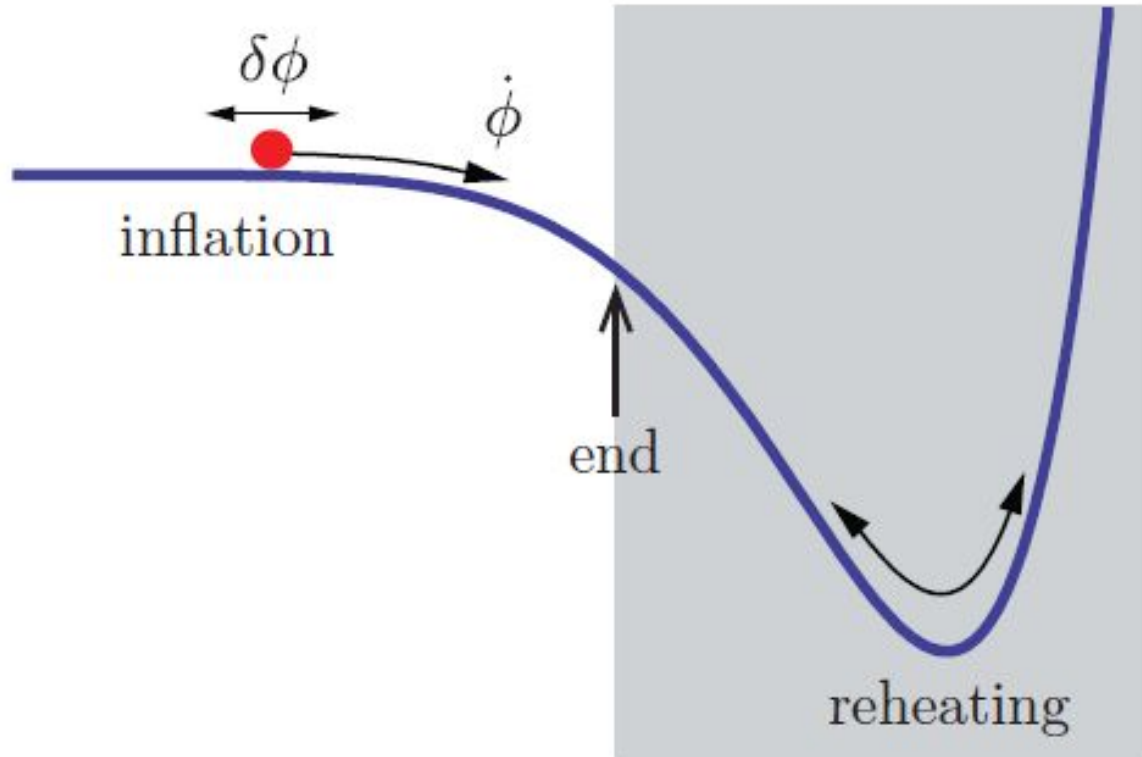
- Pós-inflação: inflaton **oscila em torno de seu mínimo**

$$\ddot{\varphi} + \cancel{3H\dot{\varphi}} = -m^2\varphi$$
$$\ddot{\varphi} = -m^2\varphi$$

Oscilação, frequência  $m$ ,  
comportamento **tipo**  
**poeira**  $\omega = 0$

- Oscilação + acoplamento a outros campos – **(p)reaquecimento**
  - Férmions: lento, em equilíbrio, re-aquecimento
  - Bósons: rápido, fora de equilíbrio, pré-aquecimento

# DINÂMICA DA INFLAÇÃO EM SLOW-ROLL



# PERTURBAÇÕES COSMOLÓGICAS v2.0

- Agora resta entender como a inflação prevê as flutuações da CMB
- Flutuações quânticas do **campo** + Flutuações na **métrica**
- Perturbações escalares: **flutuações de temperatura**
- Perturbações tensoriais: **ondas gravitacionais primordiais**
- Inflação de campo único: flutuações gaussianas
  - Mais campos: fenomenologia mais rica

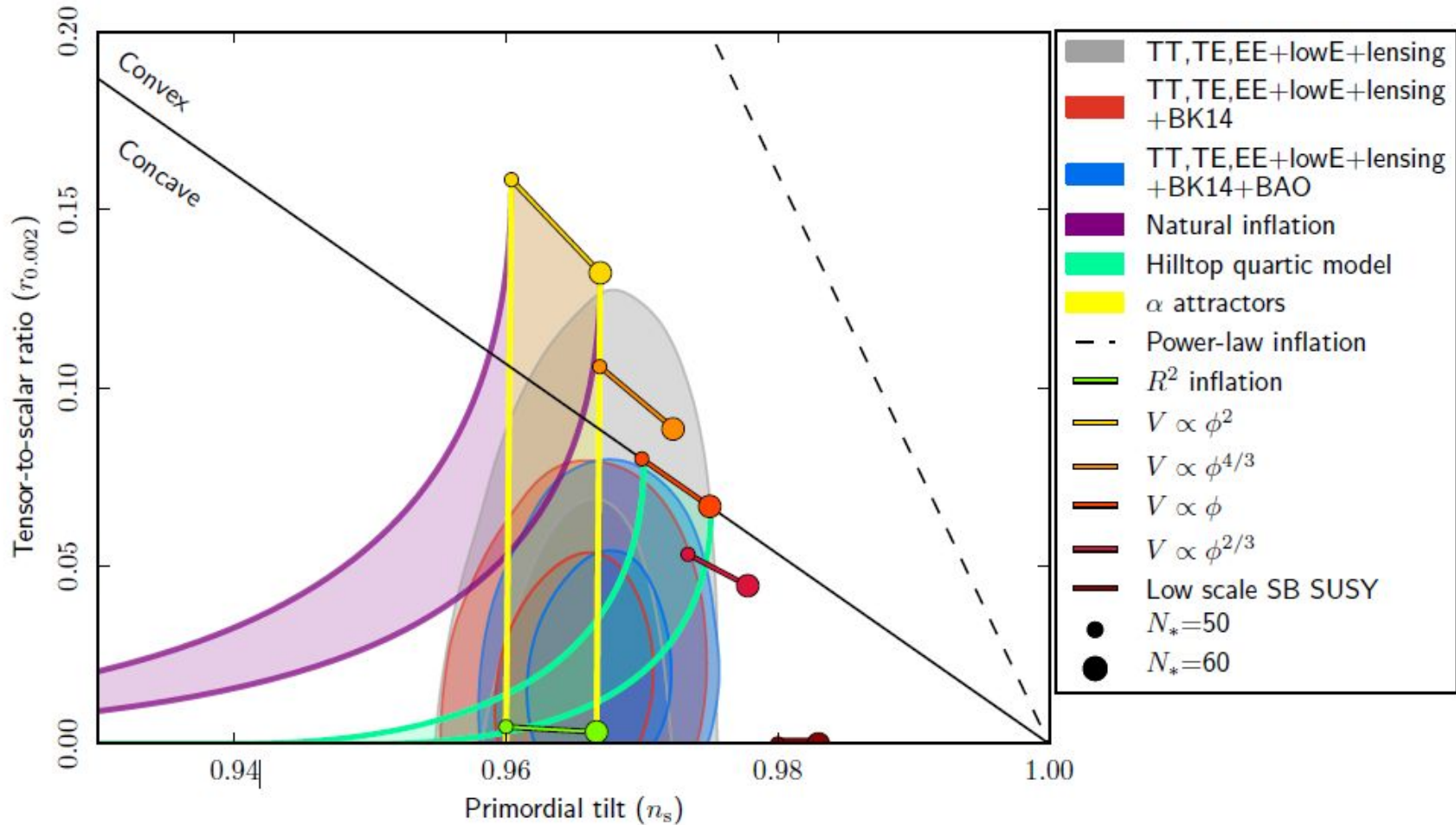
# PERTURBAÇÕES COSMOLÓGICAS v2.0

- Começam em pequenas escalas e crescem com a inflação
- Condições iniciais: **vácuo de Bunch-Davies**
- **Cruzamento do horizonte**: perturbações constantes
- Re-entram no horizonte, **marcam a CMB**
- Resultados em função dos **parâmetros de slow-roll**
- 2 exemplos: inflação **caótica** ( $m^2\varphi^2$ ) e inflação de **Starobinsky**

# RESULTADOS DO PLANCK

- Amplitude  $A_s = (2.1 \pm 0.1) \times 10^{-9}$
- Índice Espectral  $n_s = 0.9649 \pm 0.0042$
- Razão Tensorial-Escalar  $r < 0.064$
- Parâmetro de não-Linearidade  $f_{NL} = -0.9 \pm 5.1$
- Com isso conseguimos **vincular** modelos de inflação





# ESTATÍSTICA

- Estatística na CMB: **função de correlação de dois pontos**

$$\left\langle \mathcal{R}(\vec{k}) \mathcal{R}'(\vec{k}') \right\rangle = \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \frac{2\pi^2}{k^3} \mathcal{P}_{\mathcal{R}}$$

- Onde o último termo é o que chamamos de **Espectro de Potência**

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \frac{k^3}{2\pi^2} |\mathcal{R}|^2$$

# ESTATÍSTICA

- Estatística na CMB: **função de correlação de dois pontos**

$$\langle \mathcal{R}(\vec{k}) \mathcal{R}'(\vec{k}') \rangle = \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \frac{2\pi^2}{k^3} \mathcal{P}_{\mathcal{R}}$$

Vamos descrever essa  
grandeza: **perturbação  
de curvatura!**

é o que chamamos de **Espectro de Potência**

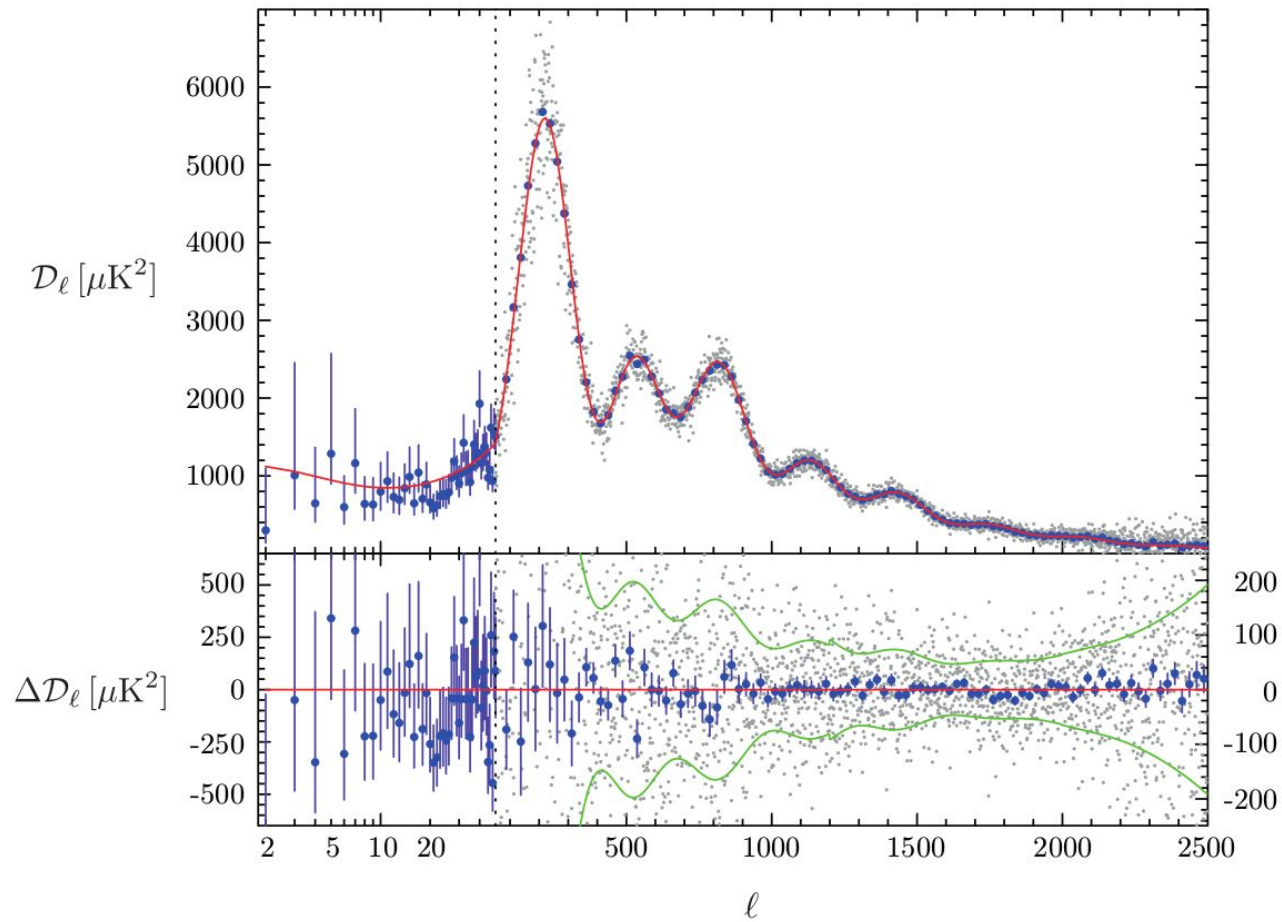
$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \frac{k^3}{2\pi^2} |\mathcal{R}|^2$$

# ESTATÍSTICA

- Índice espectral nos indica a **dependência de escala**

$$n_{\mathcal{R}} - 1 \equiv \frac{d \log \mathcal{P}_{\mathcal{R}}}{d \log k}$$

- Espectro invariante de escala tem índice espectral **nulo**
- Relembrando: inflação prevê espectro **negativo**
  - Também chamado de **red-tilt**



# INTRODUÇÃO: FLUTUAÇÃO DE CAMPO SEM MASSA

- Primeiro, vamos tratar do campo sem massa num fundo de FLRW
- Decomposição: valor de fundo + perturbação

$$\chi(t) = \chi_0(t) + \delta\chi(\mathbf{x}, t)$$

- Expansão em ondas planas: decomposição de Fourier

$$\delta\chi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \delta\chi_{\mathbf{k}}(t)$$

# CAMPO SEM MASSA – MODOS DAS PERTURBAÇÕES

- Equação de Movimento para os modos da perturbação de  $\chi$

$$\delta\ddot{\chi}_{\mathbf{k}}(t) + 3H\delta\dot{\chi}_{\mathbf{k}}(t) + \frac{k^2}{a^2}\delta\chi_{\mathbf{k}}(t) = 0$$

- Diferentes regimes: **sub** e **super-horizonte**

$$k \gg aH: \text{Sub-horizonte (dentro)} \quad \delta\ddot{\chi}_{\mathbf{k}}(t) + \frac{k^2}{a^2}\delta\chi_{\mathbf{k}}(t) = 0$$

$$k \ll aH: \text{Super-horizonte (fora)} \quad \delta\ddot{\chi}_{\mathbf{k}}(t) + 3H\delta\dot{\chi}_{\mathbf{k}}(t) = 0$$

# CAMPO SEM MASSA – MUDANÇA DE VARIÁVEIS

- Equação de Movimento para os modos da perturbação de  $\chi$

$$\delta\ddot{\chi}_{\mathbf{k}}(t) + 3H\delta\dot{\chi}_{\mathbf{k}}(t) + \frac{k^2}{a^2}\delta\chi_{\mathbf{k}}(t) = 0$$

- Essa equação está no **tempo cósmico**
- Mudança de variáveis + Tempo Conforme

$$\delta\chi_{\mathbf{k}} = \frac{\delta\sigma_{\mathbf{k}}}{a}$$



# CAMPO SEM MASSA – PERTURBAÇÃO CONFORME

- A EdM para as perturbações no **tempo conforme**

$$\delta\sigma_{\mathbf{k}}'' + \left( k^2 - \frac{a''}{a} \right) \delta\sigma_{\mathbf{k}} = 0$$

- Diferentes regimes: **sub** e **super-horizonte**

$k \gg a''/a$ : Sub-horizonte (dentro)  $\delta\sigma_{\mathbf{k}}'' + k^2 \delta\sigma_{\mathbf{k}} = 0$

$k \ll a''/a$ : Super-horizonte (fora)  $\delta\sigma_{\mathbf{k}}'' - \frac{a''}{a} \delta\sigma_{\mathbf{k}} = 0$

# CAMPO SEM MASSA – SUB-HORIZONTE: **VÁCUO**

- Em sub-horizonte, a equação é de **oscilador harmônico**

$$\delta\sigma = \frac{e^{-ik\eta}}{\sqrt{2k}}$$

- Mesmo resultado de espaço-tempo plano porque os **comprimentos de onda são pequenos!** ( $k \gg aH$ )
- Já consideramos as **relações de comutação** corretas

# CAMPO SEM MASSA – SUPER HORIZONTE

- Em super-horizonte a solução é proporcional ao fator de escala  $a$

$$\delta\sigma = B(k)a \quad |B(k)| = \frac{H}{\sqrt{2k^3}}$$

- Isso leva a um espectro **invariante de escala!**

$$\mathcal{P}_{\delta\chi} = \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 \frac{k^3}{k^3} = cte.$$

# CAMPO SEM MASSA – SOLUÇÃO FINAL

- A equação para **de Sitter (exato)**, onde  $\eta = 1/(a H)$

$$\delta\sigma_{\mathbf{k}}'' + \left( k^2 - \frac{2}{\eta^2} \right) \delta\sigma_{\mathbf{k}} = 0$$

- Essa equação tem uma solução **exata** conhecida:

$$\delta\sigma_{\mathbf{k}} = \frac{e^{-ik\eta}}{\sqrt{2k}} \left( 1 - \frac{i}{k\eta} \right)$$

# CAMPO SEM MASSA – SOLUÇÃO FINAL

- A equação para **de Sitter (exato)**, onde  $\eta = 1/(a H)$

$$\delta\sigma_{\mathbf{k}}'' + \left( k^2 - \frac{2}{\eta^2} \right) \delta\sigma_{\mathbf{k}} = 0$$

Limites para k em sub ou super-horizonte é igual ao visto anteriormente

- Essa equação tem uma solução **exata** com

$$\delta\sigma_{\mathbf{k}} = \frac{e^{-ik\eta}}{\sqrt{2k}} \left( 1 - \frac{i}{k\eta} \right)$$

# CAMPO COM MASSA – POTENCIAL

- Agora tratamos de um campo **massivo**,  $V(\chi) = m^2\chi^2$

$$\delta\sigma_{\mathbf{k}}'' + \left( k^2 - \frac{a''}{a} + m_\chi^2 a^2 \right) \delta\sigma_{\mathbf{k}} = 0$$

- Ambos os termos diferentes de  $k$  são proporcionais a  $\eta^{-2}$ 
  - Garante as condições de vácuo de Bunch-Davies

# CAMPO COM MASSA – RE-EXPRESSANDO

- Para de Sitter, podemos re-escrever essa equação como

$$\delta\sigma_{\mathbf{k}}'' + \left[ k^2 - \frac{2}{\eta^2} \left( \nu_{\chi}^2 - \frac{1}{4} \right) \right] \delta\sigma_{\mathbf{k}} = 0$$

- O parâmetro  $\nu$  contém as informações do potencial do campo

$$\nu_{\chi}^2 = \frac{9}{4} - \frac{m_{\chi}^2}{H^2}$$

# CAMPO COM MASSA – SOLUÇÃO EXATA

- Utilizando as condições de vácuo, a **solução exata** é

$$\delta\sigma_{\mathbf{k}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\left(\nu_{\chi} + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}} \sqrt{-\eta} H_{\nu_{\chi}}^{(1)}(-k\eta)$$

- Em **super-horizonte**, para as **perturbações de  $\chi$** , teremos

$$|\delta\chi_{\mathbf{k}}| \approx \frac{H}{\sqrt{2k^3}} \left(\frac{k}{aH}\right)^{\frac{3}{2} - \nu_{\chi}} \quad \eta_{\chi} \equiv \frac{m_{\chi}^2}{3H^2} \approx \frac{3}{2} - \nu_{\chi}$$



# CAMPO COM MASSA – SOLUÇÃO EXATA

- Utilizando as condições de vácuo, a **solução exata** é

Calculem qual seria o espectro de potências para  $\delta\chi$  dessa solução

$$i \left( \nu_\chi + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} \sqrt{-\eta} H \nu_\chi^{(1)} (-k\eta)$$

, para as **perturbações de  $\chi$** , teremos

$$|\delta\chi_{\mathbf{k}}| \approx \frac{H}{\sqrt{2k^3}} \left( \frac{k}{aH} \right)^{\frac{3}{2} - \nu_\chi} \quad \eta_\chi \equiv \frac{m_\chi^2}{3H^2} \approx \frac{3}{2} - \nu_\chi$$

# RESULTADOS PARA QUASI DE SITTER

- Podemos estender os resultados para **quasi de Sitter**

$$\frac{a''}{a} \approx \frac{1}{\eta^2} (2 + 3\epsilon)$$

- Após aproximações, poderemos usar o resultado anterior e obter

$$\nu_\chi \approx \frac{3}{2} + \epsilon_H - \eta_\chi$$

# ESPECTRO DE POTÊNCIA PARA QUASI DE SITTER

- Calculando o **espectro de potência em quasi-de Sitter**

$$\mathcal{P}_{\delta\chi}(k) \equiv \frac{k^3}{2\pi^2} |\delta\chi_{\mathbf{k}}|^2 = \left(\frac{H^2}{2\pi}\right) \left(\frac{k}{aH}\right)^{3-\nu_\chi}$$

- Espectro de potência em termos dos **parâmetros de slow-roll**

$$n_{\delta\chi} - 1 = 3 - 2\nu_\chi = 2\eta_\chi - 2\epsilon_H \approx 0$$

# ESPECTRO DE POTÊNCIA PARA QUASI DE SITTER

- Calculando o **espectro de potência em quasi-de Sitter**

$$\mathcal{P}_{\delta\chi}(k) \equiv \frac{k^3}{2\pi^2} |\delta\chi_{\mathbf{k}}|^2 = \left(\frac{H^2}{2\pi}\right) \left(\frac{k}{aH}\right)^{3-\nu_\chi}$$

**Espectro *quase* invariante de escala!**

- Espectro de potência em termos dos par

$$n_{\delta\chi} - 1 = 3 - 2\nu_\chi = 2\eta_\chi - 2\epsilon_H \approx 0$$

# PERTURBAÇÕES NA MÉTRICA

- Após vermos esses exemplos, podemos ver o caso real
- Diferença: agora trabalharemos apenas com o **inflaton**
- Ele que **controla** o background inflacionário
- Portanto, flutuações do campo provocam flutuações da métrica
  - E mudanças na métrica também influenciam o campo
- Equações de Einstein e Klein-Gordon **perturbadas**

# PERTURBAÇÕES NA MÉTRICA

- A métrica perturbada, para escalares e tensores, é

$$ds^2 = - (1 + 2\Phi) dt^2 + a^2 [(1 - 2\Psi) \delta_{ij} + h_{ij}] dx^i dx^j$$

- 2 graus de liberdade escalar, 6 tensoriais
  - Na verdade, são 2 graus de liberdade tensoriais: **polarização**
- Confirmam a derivação completa dessa métrica nas referências

# PERTURBAÇÃO DE CURVATURA

- **Curvatura intrínseca é proporcional à perturbação de curvatura**

$$(3) \mathcal{R} = \frac{4}{a^2} \nabla^2 \Psi$$

- No calibre comóvel, a perturbação de curvatura é:

$$\mathcal{R} = \Psi + H \frac{\delta\varphi}{\dot{\varphi}} = \Psi |_{\delta\varphi=0}$$

# PERTURBAÇÃO DE CURVATURA

- **Curvatura intrínseca é proporcional à perturbação de curvatura**

$$(3) \mathcal{R} = \frac{4}{a^2} \nabla^2 \Psi$$

- No calibre comóvel, a perturbação de curv

**Observador comóvel  
não vê flutuação de  $\varphi$**

$$\mathcal{R} = \Psi + H \frac{\delta\varphi}{\dot{\varphi}} = \Psi |_{\delta\varphi=0}$$



# PERTURBAÇÃO DE CURVATURA – CALIBRE PLANO

- No calibre **plano** temos a variável de Mukhanov-Sasaki

$$Q = \delta\varphi + \frac{\dot{\varphi}}{H}\Psi = \frac{\dot{\varphi}}{H}\mathcal{R} = \frac{z}{a}\mathcal{R}$$

- Onde definimos a quantidade  $z$ ,

$$z = a\frac{\dot{\varphi}}{H}$$

# PERTURBAÇÃO DE CURVATURA – CALIBRE PLANO

- No calibre **plano** temos a variável de perturbação  $Q$  dada por

$$Q = \delta\varphi + \frac{\dot{\varphi}}{H} \Psi$$

Flutuação do inflaton em folheamento plano

- Onde definimos a quantidade  $z$ ,

$$z = a \frac{\dot{\varphi}}{H}$$

# EQUAÇÃO DE MUKHANOV-SASAKI

- As equações perturbadas invariantes de calibre resultam em:

$$\Phi'' + 2 \left( \mathcal{H} - \frac{\varphi''}{\varphi} \right) \Phi' - \nabla^2 \Phi + 2 \left( \mathcal{R}' - \mathcal{H} \frac{\varphi''}{\varphi} \right) \Phi = 0$$

- Usando outra variável de Mukhanov-Sasaki,  $\mathbf{v} = \mathbf{a} \mathbf{Q}$ , temos,

$$v_{\mathbf{k}}'' + \left( k^2 - \frac{z''}{z} \right) v_{\mathbf{k}} = 0 \quad v = z \mathcal{R}$$

# PERTURBAÇÕES ESCALARES

- Resolvendo a equação de MS para as **perturbações escalares**
- Vamos expandir a função  $\mathbf{z}$  com os parâmetros de slow-roll

$$\frac{z''}{z} \approx \mathcal{H} (2 + 5\epsilon_H - 3\eta_H)$$

- E se colocarmos na forma que já sabemos a solução?

$$\frac{z''}{z} = \frac{1}{\eta^2} \left( \nu^2 - \frac{1}{4} \right)$$

# PERTURBAÇÕES ESCALARES - SOLUÇÃO

- O parâmetro  $\nu$  vai ser então

$$\nu \approx \frac{3}{2} + 3\epsilon_H - \eta_H$$

- Conhecemos a solução para essa equação com esse parâmetro!

$$v_{\mathbf{k}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i(\nu + \frac{1}{2})\frac{\pi}{2}} \sqrt{-\eta} H_{\nu}(-k\eta)$$

# PERTURBAÇÕES ESCALARES - ESPECTRO

- O espectro para essa solução será

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = A_{\mathcal{R}}^2 \left( \frac{k}{aH} \right)^{n_{\mathcal{R}} - 1}$$

- Onde a amplitude no horizon crossing para  $k = aH$  é

$$A_{\mathcal{R}}^2 = \frac{8\pi G}{2\epsilon_H} \left( \frac{H}{2\pi} \right)^2$$

# PERTURBAÇÕES ESCALARES - ESPECTRO

- E o índice espectral é

$$n_{\mathcal{R}} - 1 = 2\eta_H - 4\epsilon_H$$

- Finalmente, em termos dos parâmetros de **slow-roll do potencial**

$$n_{\mathcal{R}} - 1 = 2\eta_V - 6\epsilon_V$$

# PERTURBAÇÕES TENSORIAIS

- São 2 GdL porque elas são transversas e sem traço!
- Escrevendo a polarização

$$h_{ij} = h_{+}e_{ij}^{+} + h_{\times}e_{ij}^{\times}$$

- Teremos equação de movimento para cada uma, usando

$$v_{\mathbf{k}} = \frac{1}{16\pi G} a h_{\mathbf{k}}$$



# PERTURBAÇÕES TENSORIAIS

- A equação de movimento é bem parecida com a de escalares

$$v_{\mathbf{k}}'' + \left( k^2 - \frac{a''}{a} \right) v_{\mathbf{k}} = 0$$

- Vejam: não aparece massa ou campo! Apenas dinâmica de fundo
- Termo de horizonte: fator de escala vs. *pump field*
- Conhecemos a solução para esse tipo de equação

# PERTURBAÇÕES TENSORIAIS

- Solução de módulo conhecido para super-horizonte

$$|v_{\mathbf{k}}| = \left(\frac{H}{2\pi}\right) \left(\frac{k}{aH}\right)^{\frac{3}{2}-\nu_T}$$

- Onde a variável  $\nu$  tem apenas parâmetros do fundo! Ou seja,  $\epsilon_H$

$$\nu_T \approx \frac{3}{2} - \epsilon_H$$

# PERTURBAÇÕES TENSORIAIS

- Com isso, o espectro de potência tensorial é

$$\mathcal{P}_T(k) = 64\pi G \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{k}{aH}\right)^{n_T}$$

- Logo, o índice espectral tensorial só depende do fundo

$$n_T = -2\epsilon$$

# PERTURBAÇÕES TENSORIAIS – RAZÃO T/R

- A razão tensorial-escalar pode ser finalmente calculada:

$$r = \frac{A_T^2}{A_{\mathcal{R}}^2} = 16\epsilon_H$$

- Podemos ainda definir uma **relação de consistência**

$$r = -8n_T$$

# PERTURBAÇÕES TENSORIAIS – OBSERVAÇÃO

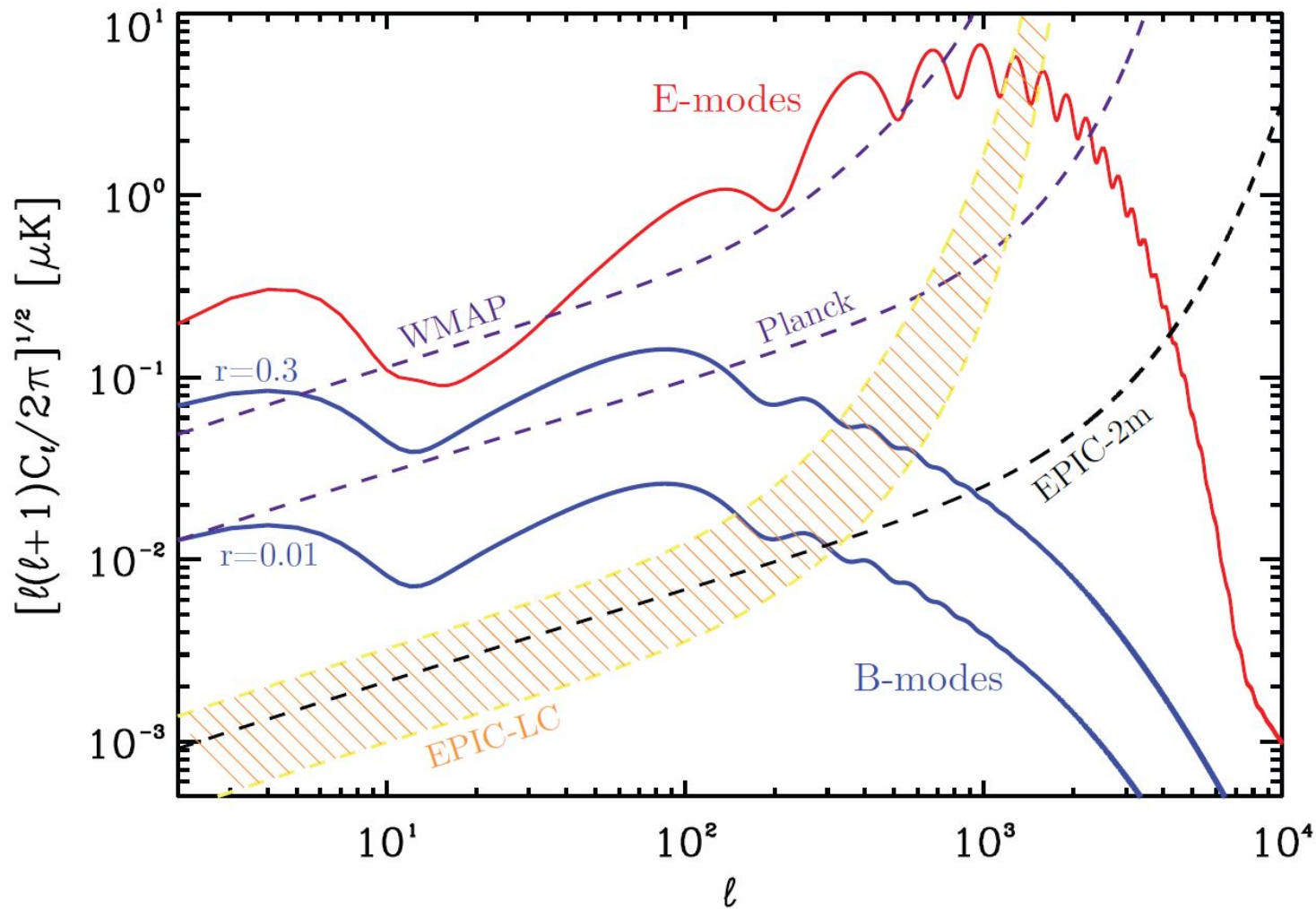
- Até o momento, não medimos ondas gravitacionais primordiais
- Presença na CMB: polarização – Modos B e Modos E
- Modos E: podem ser produzidos por escalares e tensoriais
- Modos B: produzidos **apenas** por perturbações **tensoriais**

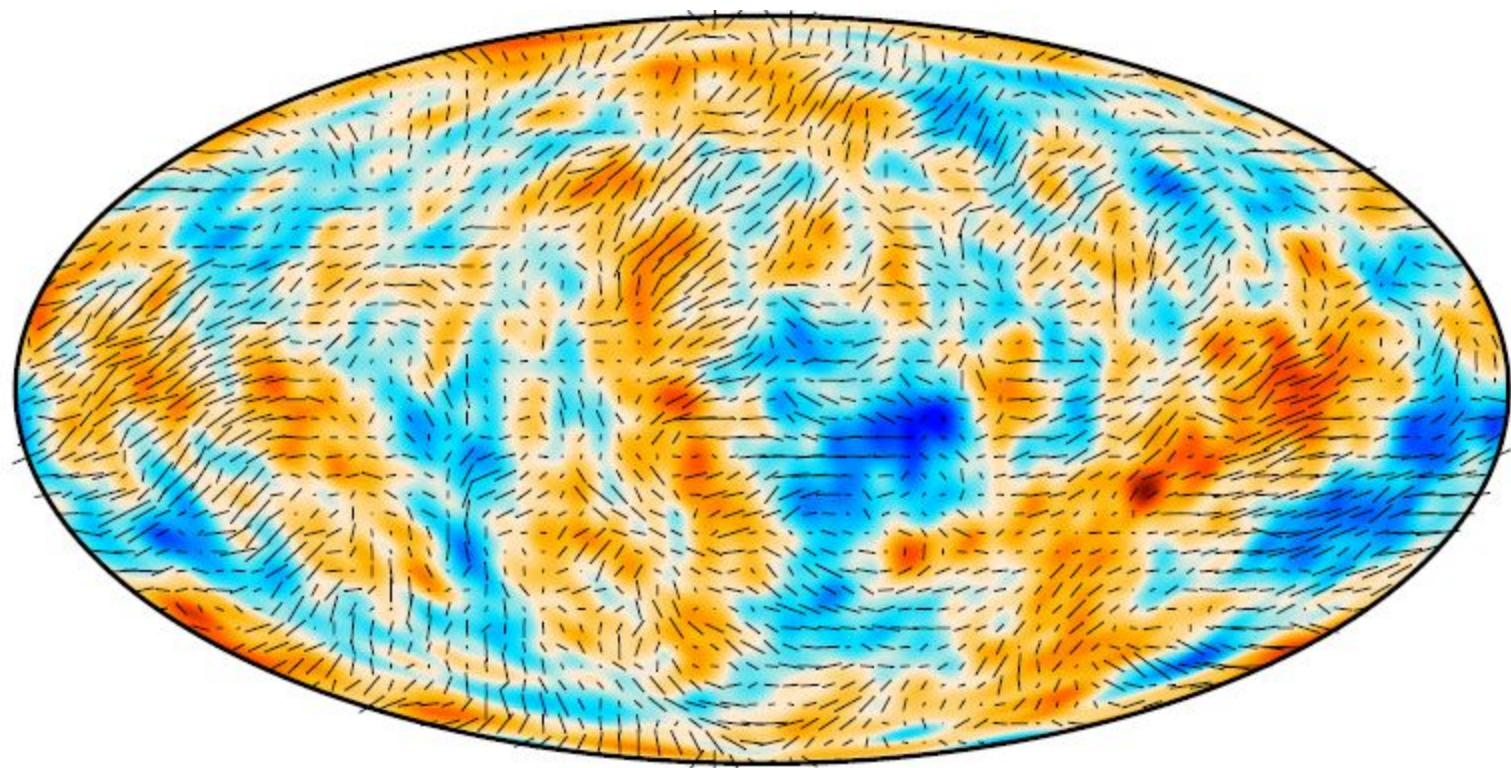


E modes



B modes





| 0.41  $\mu\text{K}$

-160



160  $\mu\text{K}$

# NOVOS AVANÇOS EM ONDAS GRAVITACIONAIS

- LIGO, Virgo, Kagra – futuramente, LISA, etc.
- Perspectiva de medirem ondas gravitacionais de modelos menos ortodoxos – multi-field, ultra-slow-roll, etc
  - Produção em escalas além-da-CMB



# NÃO-GAUSSIANIDADE

- Não-Gaussianidade: **função de correlação de 3 pontos**

$$\left\langle \hat{\zeta}_{\mathbf{k}_1} \hat{\zeta}_{\mathbf{k}_2} \hat{\zeta}_{\mathbf{k}_3} \right\rangle = (2\pi)^3 d^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) B_\zeta(k_1, k_2, k_3)$$

- A inflação de campo único em slow-roll prevê **pequena NG**

$$\lim_{k_1 \rightarrow 0} \left\langle \hat{\zeta}_{\mathbf{k}_1} \hat{\zeta}_{\mathbf{k}_2} \hat{\zeta}_{\mathbf{k}_3} \right\rangle \propto (n_s - 1) P_\zeta(k_1) P_\zeta(k_2)$$

# NÃO-GAUSSIANIDADE

- Parâmetro de não-linearidade é definido por

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi_g(\mathbf{x}) + f_{\text{NL}}^{\text{loc.}} \left[ \Phi_g(\vec{x})^2 - \langle \Phi_g(\vec{x})^2 \rangle \right]$$

- Sua relação com o biespectro permite que seja vinculado

$$B_\zeta(k_1, k_2, k_3) = \frac{6}{5} f_{\text{NL}}^{\text{loc.}} [Perm. P(k_i) P(k_j)]$$

# TIPOS DE MODELOS INFLACIONÁRIOS

- Podemos separar os modelos inflacionários em alguns tipos
- Ao longo desse seminário: Inflação de Campo Único (SFI)
- Mais campos escalares: Inflação de Vários Campos (MFI)
  - Caso particular: cenário de curvaton
- Ultra-slow-roll: produção de buracos negros primordiais

# TIPOS DE MODELOS INFLACIONÁRIOS - SFI

- Geralmente modelos de SFI separados de acordo com **energia**
- Campo forte/inflação caótica
  - Potencial côncavo, geralmente polinomial
  - Grande fricção, início próximo da escala de Planck
- Campo fraco
  - Potencial convexo, pode conter *hilltop*
  - Começo do rolamento em equilíbrio instável

## EXEMPLO: INFLAÇÃO CAÓTICA $V(\varphi) = m^2\varphi^2$

- Primeira proposta do “novo” cenário inflacionário (Linde 83)
- Inflaton massivo, alto valor do campo –  $O(10^1) M_{\text{PL}}$
- Podemos calcular os PSR do potencial

$$\epsilon_V = \eta_V = \frac{1}{2N}$$

- Onde já usamos o número de e-folds que será  $\sim 60$

## EXEMPLO: INFLAÇÃO CAÓTICA $V(\varphi) = m^2\varphi^2$

- O índice espectral tem valor dentro dos limites do Planck

$$n_s \approx 1 - \frac{2}{N} \approx 0.96$$

- Mas a razão  $r$  está fora, modelo prevê muita perturbação tensorial

$$r = \frac{8}{N} \approx 0.1$$

- Modelos excluídos pelo Planck (como SFI)

# EXEMPLO: INFLAÇÃO DE STAROBINSKY

- Na verdade, foi o 1º modelo inflacionário: Starobinsky 1980
- Modelo de  $f(R)$ : gravitação modificada

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int dx^4 \sqrt{-g} \left( R + \frac{R^2}{6M^2} \right)$$

- Idealizado para resolver singularidade utilizando de Sitter

# EXEMPLO: INFLAÇÃO DE STAROBINSKY

- Podemos re-expressar o modelo no **Einstein Frame**
- Campo Escalar minimamente acoplado

$$V(\varphi) = \frac{3M^2}{4(8\pi G)^2} \left( 1 - e^{-8\pi G \sqrt{2/3}\varphi} \right)^2$$

- Potencial tipo plateau – esperado ter baixa produção de GW



# EXEMPLO: INFLAÇÃO DE STAROBINSKY

- Grandezas obtidas da dinâmica de fundo do fator de escala

$$a(t) = a_0 (t_s - t)^{1/2} \exp \left[ -\frac{M^2}{12} (t_s - t)^2 \right]$$

- Parâmetros de slow-roll pelo parâmetro de Hubble

$$H_S = \frac{-3 + M^2 (t_s - t)^2}{6 (t_s - t)}$$

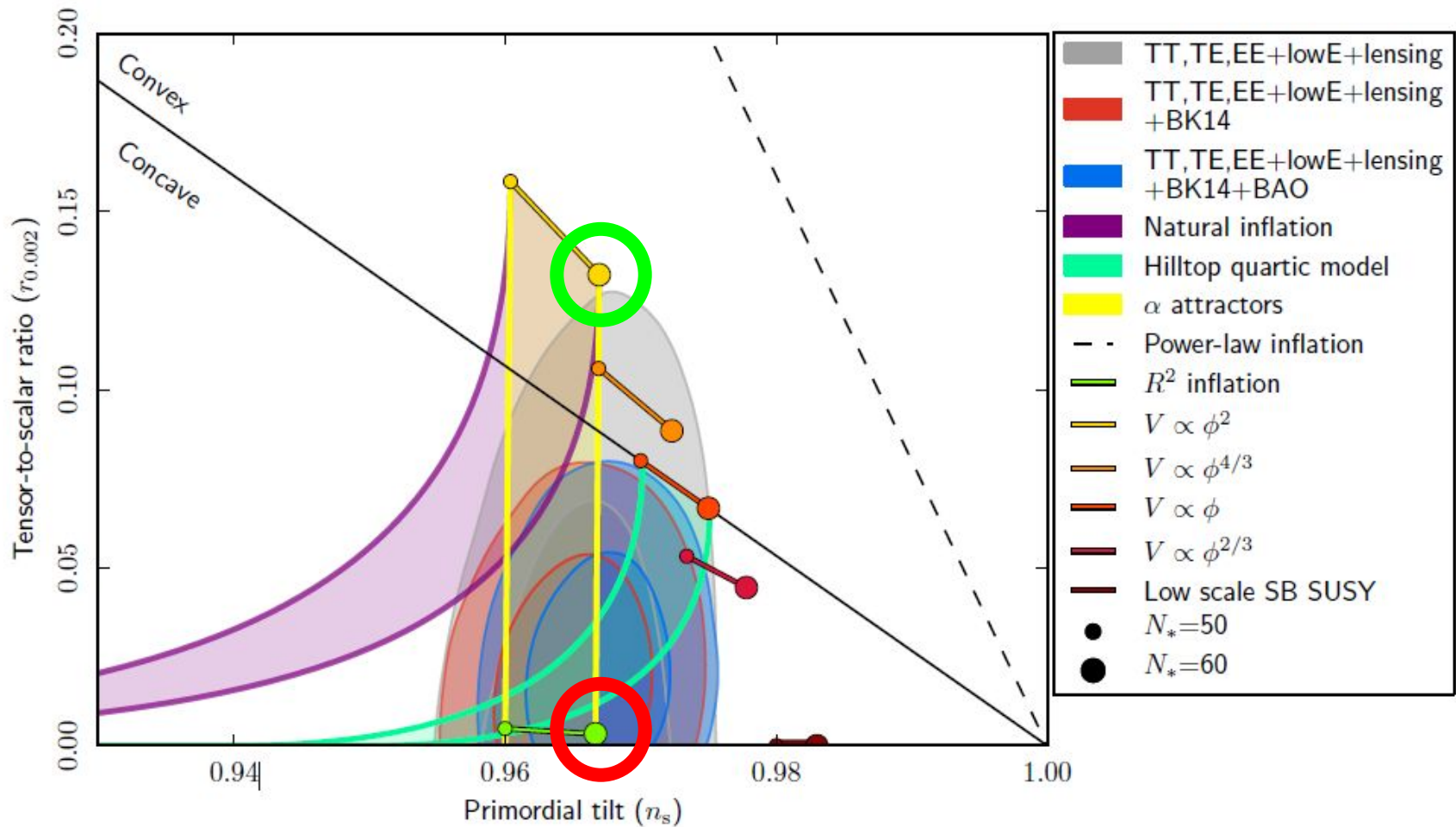
# EXEMPLO: INFLAÇÃO DE STAROBINSKY

- Índice Espectral e Razão Tensorial-Escalar

$$n_s \approx 1 - \frac{2}{N} \approx 0.96$$

$$r = \frac{12}{N^2} \approx 0.0033$$

- Dependência com e-folds diferente da inflação caótica para  $r$
- Razão tensorial-escalar é suprimida com  $N^2$



# REFERÊNCIAS

- **[A. Riotto] Inflation and the Theory of Cosmological Perturbations**
  - <https://arxiv.org/abs/hep-ph/0210162>
- **[D. Baumann] TASI Lectures on Inflation**
  - <https://arxiv.org/abs/0907.5424>
- **[D. Baumann] Cosmology course at UvA**
  - <http://cosmology.amsterdam/education/cosmology/>