

Uma introdução à

# GRAVITAÇÃO





---

# COSMO-UFES



<http://www.cosmo-ufes.org>

<https://ppgcosmo.cosmo-ufes.org/>

<http://ofp.cosmo-ufes.org>



---

# COMO



---

# PLANO DO MINICURSO

- **Um pouco de história da gravitação**
- **A gravitação Newtoniana**
- **O maior sucesso da gravitação Newtoniana: o movimento dos planetas**
- **O problema com Mercúrio: rumo a Relatividade Geral**
- **O princípio de equivalência e a revolução Einsteiniana**



---

# UM POUCO DE HISTÓRIA

**A gravidade é uma das 4 interações fundamentais. Talvez a primeira a chamar (indiretamente) a atenção dos filósofos nas observações astronômicas.**

**Entender que o movimento de um planeta em torno do Sol e a queda de uma maçã na Terra são fenômenos relacionados à mesma interação fundamental (a gravidade) teve que esperar a síntese Newtoniana.**

**De fato a astronomia é uma disciplina muito antiga, e a astrofísica é uma disciplina muito moderna.**

**As observações astronômicas alcançaram um grau de precisão impressionante (por serem de olho nu ou usando objetos simples como o gnomon). Se pense nos cálculos de Aristarco de Samo (IV-III século ac): razões entre distâncias Terra-Lua e Terra-Sol, e razões entre os diâmetros da Terra e da Lua.**

---

# UM POUCO DE HISTÓRIA

**Parece que houve disciplinas científicas no sentido moderno de teoria e experimento bem antes da revolução científica (XVI século, Galileu).**

**Se pense, por exemplo, a “Sobre a flotação dos corpos” de Arquimedes (III século ac), “Pneumática” e “Catóptrica” do Heron de Alexandria (I século dc), “Óptica” de Ptolomeu (II século dc).**

**Mas o mesmo grau de “cientifidade” não teve com a queda livre (e então a gravidade). Só com Galileu e seus experimentos com o plano inclinado e de queda livre da torre de Pisa (talvez).**

---

# O PROBLEMA DOS PLANETAS

**O problema do movimento dos planetas me parece ter sido o estímulo para o desenvolvimento da teoria da gravitação. Não somente a Newtoniana, mas também a Einsteniana (movimento de Mercúrio).**

**O problema dos planetas é que esses, em certos períodos do ano, se movimentam de forma retrograda (de oeste para leste). Aliás, “planeta” em grego antigo significa “errante” (que anda vagueando).**



Exemplo: movimento retrogrado de Marte, de julho 2020 até janeiro 2021.  
 Fonte: <https://www.antareslegnano.org/wp/2020/12/13/il-moto-retrogrado-di-marte/>



---

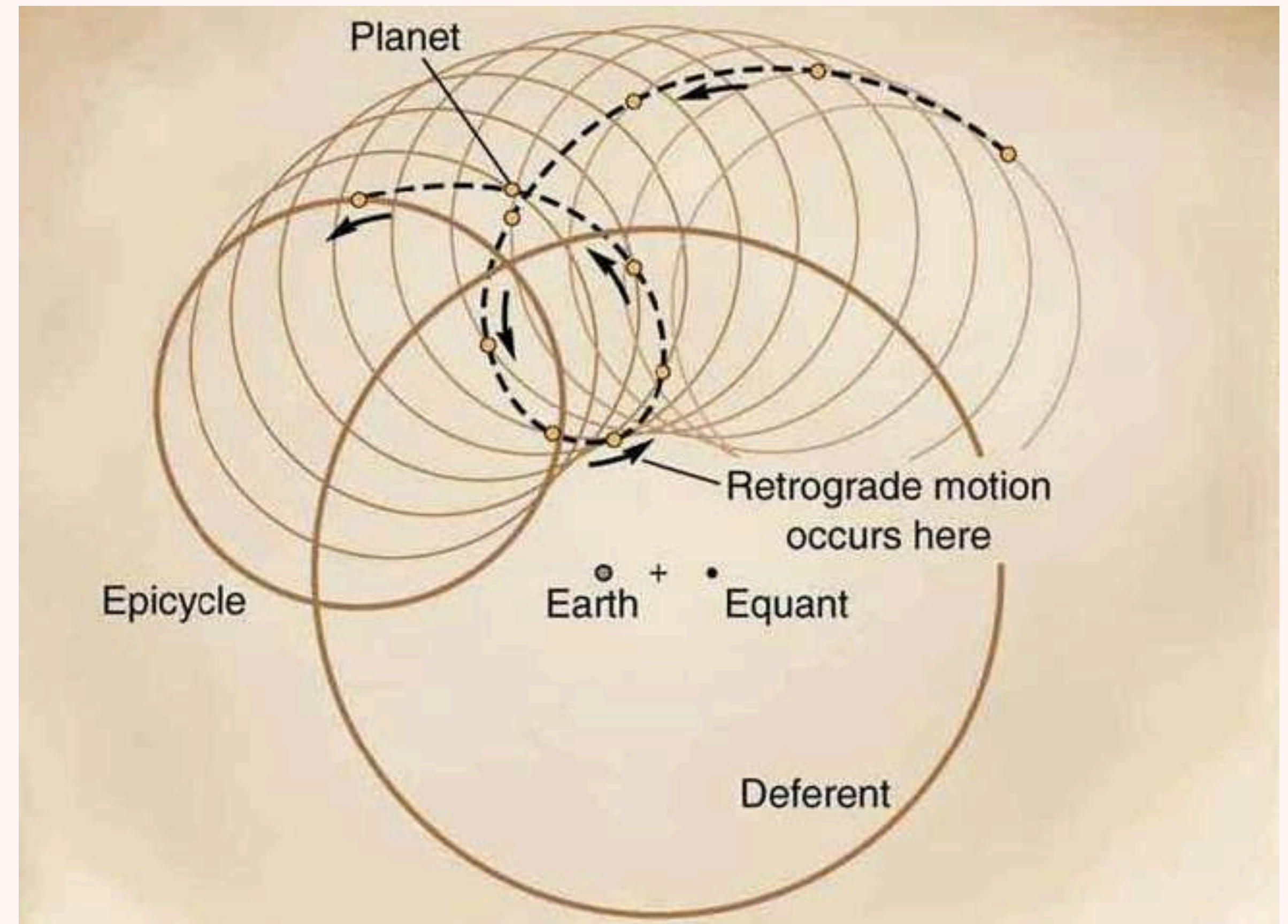
# O “DEVER DE CASA” DE PLATÃO

**Somente usando movimentos circulares uniformes (perfeição) montar um modelo de Sistema Solar (do Sol, da Lua e dos planetas conhecidos: Mercúrio, Vénus, Marte, Jupiter e Saturno) condizente com as observações.**

- **Eudoxo de Cnido e Cálipo de Cízico (IV século ac):** esféras homocentricas (com centro na Terra). Talvez um dos primeiros exemplos de “ajuste fino”.
- **Aristóteles (IV século ac) na *Metafísica*:** mais esferas que carregam outras esferas.
- **Heráclides do Ponto:** parece que foi o primeiro a sugerir que a Terra gire em torno do próprio eixo e que Mercúrio e Vénus girem em torno do Sol e não da Terra.
- **Modelos baseados no epiciclo, no deferente, no excêntrico e no equante. Cláudio Ptolemeu (II século dc) em Alexandria e sua obra: *Almagesto*.**

# O MODELO PTOLEMAICO

- **Excêntrico:** o centro do deferente não coincide exatamente com o centro da Terra (então não é exatamente um modelo geocêntrico, mas quase). Além disso, este centro muda para cada planeta.
- **Equante:** o centro do epiciclo se movimenta ao longo do deferente com velocidade constante, mas com respeito ao equante.



<https://blogs.futura-sciences.com/e-luminet/2018/03/28/geometry-cosmos-3-ptolemys-circles-inflationay-cosmology/>



---

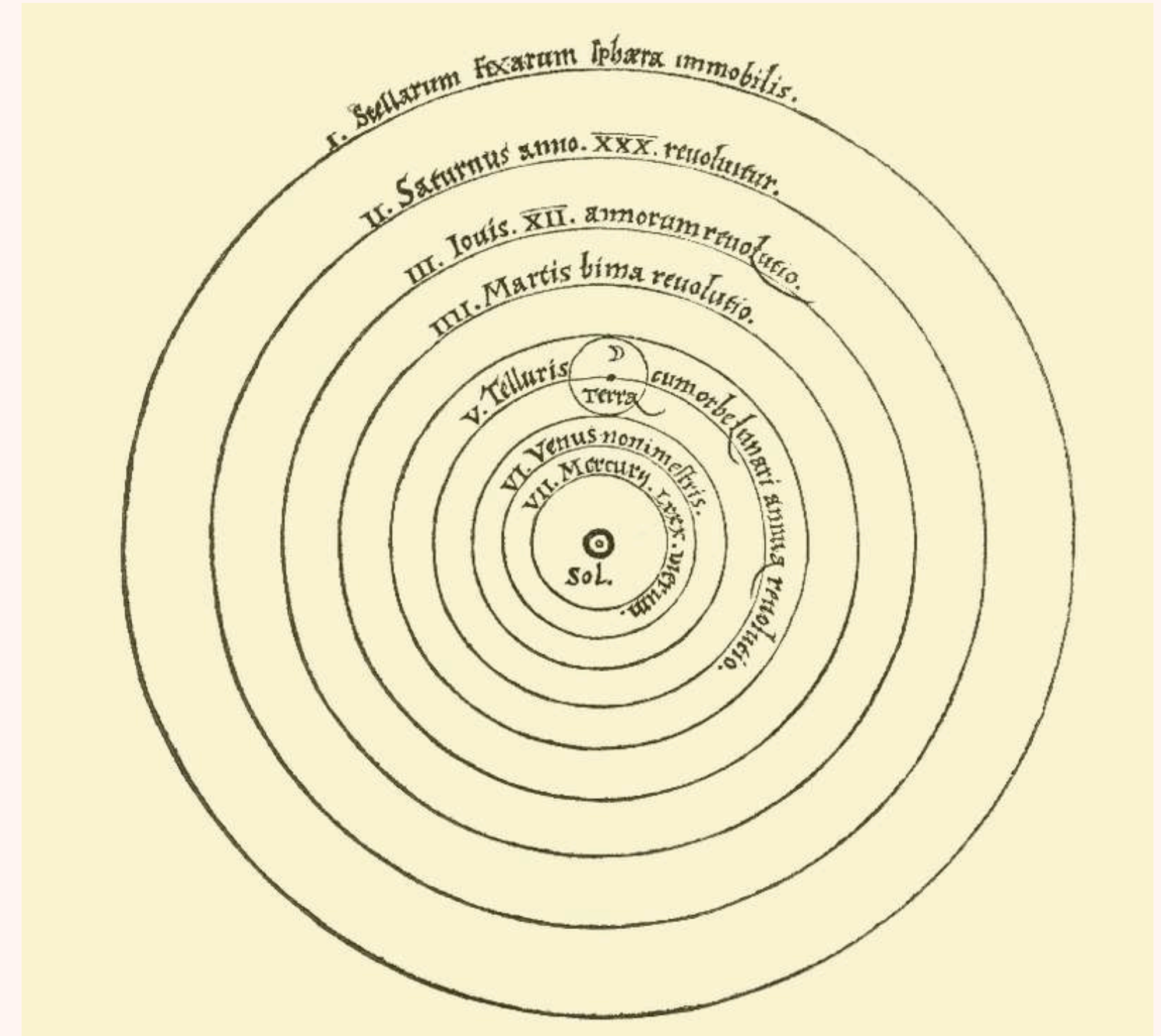
# A REVOLUÇÃO COPERNICANA

**Do Pequeno Comentário (Commentariolous) de Nicolau Copérnico (1473-1543):**

- **O centro da Terra não é o centro do Universo, mas apenas o centro da órbita da Lua;**
- **Todos os corpos celestes orbitam em torno do Sol, que é o centro do Universo (Héliocentrismo);**
- **O movimento aparente das estrelas é devido ao movimento rotacional da Terra em torno do próprio eixo;**
- **O movimento aparente do Sol é devido a ambos os movimentos de rotação da Terra em torno do próprio eixo e em torno do Sol;**
- **O movimento retrógrado dos planetas é devido ao movimento da Terra, que ultrapassa Marte, Júpiter ou Saturno ou é ultrapassada por Vénus e Mercúrio.**

# O MODELO COPERNICANO

- **Órbitas circulares;**
- **Ainda tem epiciclos (não aparecem na figura ao lado): 6 para Mercúrio, 3 para a Lua, 4 para os demais planetas.**
- **O centro da órbita da Terra não é exatamente o Sol (isso foi necessário para explicar a diferente duração das estações).**
- **Tem um terceiro movimento, de precessão do eixo terrestre, que deveria compensar o induzido pela revolução em torno do Sol, deixando o pequeno efeito da precessão dos equinócios (esse terceiro movimento é desnecessário).**



Do *Revolutionibus Orbis Cœlestium*, do próprio Copérnico



---

# A PRIMEIRA LEI DE KEPLER

**As observações do Tycho Brahe (1546-1601) são tão precisas que nenhum modelo planetário até então conseguia se ajustar adequadamente.**

**Kepler (1571-1630) em *Astronomia Nova* (1609) foi o primeiro a abandonar a hipótese fundamental até então: que as órbitas dos planetas tivessem de ser circulares.**

**Primeira Lei de Kepler: Todos os planetas se movimentam ao longo de órbitas elípticas, das quais o Sol ocupa um dos focos.**

**Esta lei elimina a necessidade dos epiciclos e quebra a antiga crença que as órbitas devam ser circulares pois os planetas são carregados pela revolução de esferas rígidas (nenhuma rotação de um corpo rígido pode gerar uma elipse).**

---

# A SEGUNDA LEI DE KEPLER

**Em 1621:**

**Segunda Lei de Kepler: A linha que une o Sol ao planeta varre áreas iguais em tempos iguais.**

**Esta lei quebra a outra antiga hipótese: que o movimento orbital fosse uniforme. Então elimina a necessidade de usar o equante. A velocidade dos planetas é maior quando eles se encontram mais próximos do Sol.**

**Kepler começa a ter alguma suspeita que o Sol exercite alguma influência que mantenha os planetas nas suas órbitas.**



---

# A TERCEIRA LEI DE KEPLER

**Terceira Lei de Kepler (1619): O quadrado do período sideral de cada planeta é proporcional ao cubo do semieixo maior da elipse.**

**Essa observação foi realmente uma novidade.**

**O golpe mortal ao modelo ptolemaico foi provavelmente dado por Galileu em 1610, descobrindo as fases de Vénus. (Galileu golpeou muito com o seu telescópio).**

---

# A QUEDA LIVRE

**Aristoteles (IV século ac): os corpos caem porque o lugar natural do elemento “terra” é para baixo, no centro do Universo (que é a Terra). Um corpo em queda livre possui uma velocidade proporcional ao peso. Problema: porque lançando uma pedra no ar ela, no começo, vai para cima ao invés de ir para baixo?**

**Outras ideias do Aristoteles: o que sustenta o movimento de um corpo lançado para cima é o ar. A Terra não pode estar rotacionando porque assim um corpo lançado para cima não cairia no mesmo lugar de onde partiu.**

**Estratão de Lâmpsaco (IV século ac): entendeu, observando o espaçamento de gotas de água em queda livre, que um corpo em queda livre acelera.**

---

# A QUEDA LIVRE

**Oresme (1325-1382):** a rotação da Terra carrega o corpo lançado com si, juntamente ao lançador e ao ar, por isso ele cai no mesmo lugar de onde partiu. Ele aplicou a noção de *impetus*, criada por Buridan (1295-1361) .

**Oresme (e outros) provou o teorema da velocidade média:** a distância percorrida por um corpo uniformemente acelerado em um dado tempo é igual a distância percorrida no mesmo intervalo de tempo por um corpo em movimento uniforme com velocidade igual à velocidade média.

**Em notação moderna:**  $v_i = 0$  ,  $v_f = aT$   $\bar{v} = \frac{v_f - v_i}{2} = \frac{1}{2}aT$  ,  $d = \frac{1}{2}aT^2$

**Curiosamente, esse resultado não foi aplicado ao caso da queda livre.**

**Exercício: tentem mostrar o teorema da velocidade média.**



---

# A QUEDA LIVRE

**Apesar do fato que fosse bastante óbvio que um corpo em queda livre acelere, não era óbvio que a velocidade aumentasse proporcionalmente ao tempo, e não à distância.**

**No segundo caso, em notação moderna:**

$$\frac{dv}{dt} = \alpha^2 x, \quad v = \frac{dx}{dt}, \quad \implies \frac{d^2x}{dt^2} = \alpha^2 x, \quad \implies x(t) = c_1 e^{\alpha t} + c_2 e^{-\alpha t}.$$

**Mas então a distância aumentaria exponencialmente! Pior que isso, se um corpo for deixado cair do repouso, não cairia mesmo!**

$$(x(0) = 0, \quad v(0) = 0, \quad \implies c_1 = c_2 = 0.)$$

**Aparentemente, o primeiro a entender isso foi o frade Domingo de Soto (1494-1560).**

---

# A QUEDA LIVRE

**Galileu (1564-1642) foi o primeiro a estudar o movimento com o *experimento*. O experimento é uma maneira de interrogar a natureza, para descobrir como ela funciona.**

**Usando planos inclinados, Galileu mostrou que a distância percorrida por um corpo acelerado uniformemente é proporcional ao quadrado do tempo.**

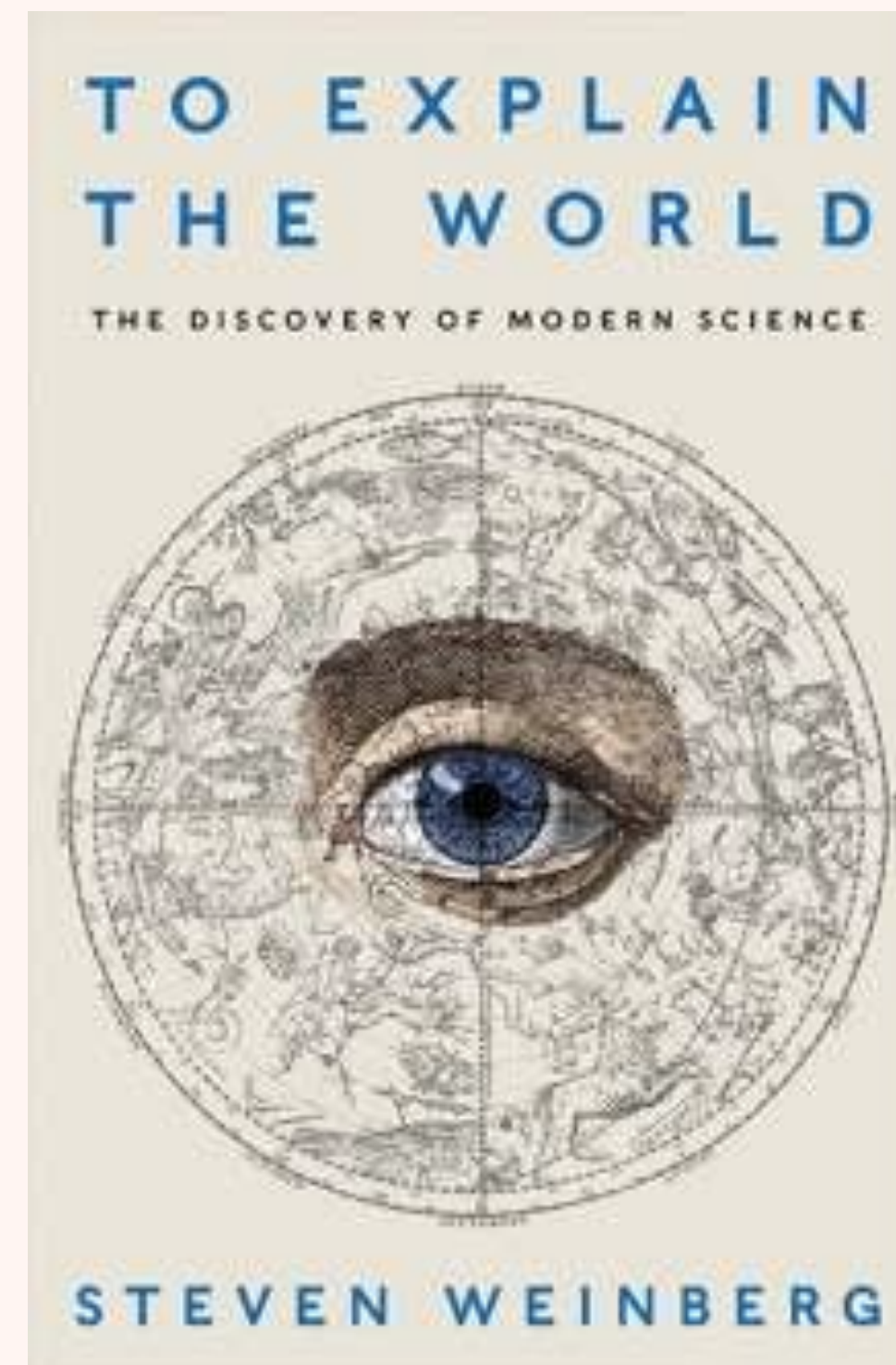
**Ele também mostrou que a trajetória de um projétil é uma parábola.**

**Huygens (1629-1695) desfrutou as descobertas do Galileu sobre o pêndulo e construiu o relógios muito precisos. Além disso, foi o primeiro a medir a aceleração de gravidade.**

**Em notação moderna:  $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ . Conhecendo o período T e o comprimento L do pêndulo, g é facilmente determinado.**

---

# UMA REFERÊNCIA PARA A HISTÓRIA DA GRAVITAÇÃO, E DA CIÊNCIA EM GERAL





---

# NEWTON (1642-1727)

**Newton é principalmente conhecido pela teoria da Dinâmica (incluindo a gravitacional), mas deu contribuições marcantes também na ótica (teoria das cores, teoria corpuscular da luz) e na matemática (cálculo diferencial).**

**Huygens e Newton realizaram que um corpo em movimento circular uniforme possui uma aceleração, a aceleração centrípeta, que mantém o corpo na sua trajetória e lhe impede de voar embora.**

**O corpo então sente uma força centrífuga, proporcional a  $v^2/r$ .**

**Newton então se perguntou qual fosse a força centrípeta mantendo os planetas nas suas órbitas.**

---

# CORPOS CELESTES E QUEDA LIVRE

**Da terceira lei de Kepler, supondo um movimento circular uniforme, o Newton calculou:**

$T = \frac{2\pi r}{v}$ ,  $T^2 \propto r^3$ ,  $\implies \frac{v^2}{r} \propto \frac{1}{r^2}$ . **Lei do inverso do quadrado. A “influência” (força gravitacional) que mantém um planeta na sua órbita decai com o inverso do quadrado da distância.**

**O que substanciou fortemente a lei do inverso do quadrado foi o cálculo envolvendo a Lua. Ou seja, o Newton tratou a Lua como um corpo em queda livre na Terra.**

$$D_L = 60R_T, \quad R_T = 6371 \text{ km}, \quad T_L = 27.3 \text{ d}, \quad \implies \frac{v_L^2}{D_L} = \frac{4\pi^2 D_L}{T_L^2} = 0.0027 \text{ m/s}^2$$

**Se a lei do inverso do quadrado está correta, então:**

$$g = \frac{v_L^2}{D_L} \frac{D_L^2}{R_T^2} = \frac{v_L^2}{D_L} 60^2 = 9.75 \text{ m/s}^2. \text{ “answer pretty nearly”, como o Newton escreveu.}$$

---

# PRINCIPIA

**Definição I: massa  $m$**

**Definição II: momento,  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  . (Já introduzindo a notação vetorial moderna).**

**Definição III: massa inercial, aquela que um corpo opões resistindo a uma mudança no seu movimento.**

**Definição IV: força, o agente que tende a mudar o estado de movimento de um corpo.**

**Anotação (Scholium): Espaço e tempo são absolutos.**



---

# LEIS DO MOVIMENTO

**Lei I (princípio de inércia):** todo corpo se mantém num estado de repouso ou de movimento uniforme, se não há forças agindo nele.

**Lei II:** a variação do movimento é proporcional à força exercida e ocorre na mesma direção desta força. Em notação moderna (não aparecem estas equações nos *Principia*):  $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$  ,

ou, se a massa é uma constante,  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  .

**Lei III:** a cada ação corresponde uma reação igual e oposta. As ações de dois corpos um no outro são iguais e ocorrem em direções opostas.

**Corolário III:** conservação do momento. (Exercício)

---

# GRAVITAÇÃO NEWTONIANA

**Livro III dos Principia: O Sistema do Mundo.**

**A força gravitacional entre dois corpos é proporcional às massas dos corpos e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles.**

**Imaginemos os corpos como sendo pontos (mais tarde a generalização para corpos extensos) com massas  $m_1, m_2$  e vetores posição  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ . A distância entre eles é então:  $r = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$ .**

**Então, a força que age na massa 1 devida à massa 2 é:  $\mathbf{F}_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{r}$ .**

**A direção desta força é a da reta que une os dois e o sentido é atrativo (a massa 1 é atraída pela massa 2).**

**A força que age na massa 2 e devida à massa 1 é igual e oposta, conforme a terceira lei da dinâmica:**

$$\mathbf{F}_{21} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{r} = -\mathbf{F}_{12} .$$

**A constante de gravitação de Newton é:  $G \approx 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ . (primeira medida: Cavendish, 1798.)**

---

# MASSAS

Em princípio, podemos definir pelo menos 3 tipos de massa:

- A massa inercial, aquela relativa à segunda lei da dinâmica:  $F = m_I a$ .
- A massa gravitacional passiva, aquela que “sente” a força gravitacional gerada por outras massas.
- A massa gravitacional ativa, aquela que “gera” a força gravitacional.

Por exemplo, em  $F_{12} = G \frac{m_1^{\text{passiva}} m_2^{\text{ativa}}}{r^2} \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{r}$ , que é a força que a massa 1 “sente”,  $m_1^{\text{passiva}}$  seria a massa gravitacional passiva da partícula 1 enquanto  $m_2^{\text{ativa}}$  seria a massa gravitacional ativa da partícula 2.



---

# EQUIVALÊNCIA ENTRE AS MASSAS GRAVITACIONAIS

**Pela terceira lei de Newton:**

$$F_{12} = F_{21} \implies G \frac{m_1^{\text{passiva}} m_2^{\text{ativa}}}{r^2} = G \frac{m_2^{\text{passiva}} m_1^{\text{ativa}}}{r^2} .$$

**Então:**

$$m_1^{\text{passiva}} m_2^{\text{ativa}} = m_2^{\text{passiva}} m_1^{\text{ativa}} \implies \frac{m_2^{\text{passiva}}}{m_2^{\text{ativa}}} = \frac{m_1^{\text{passiva}}}{m_1^{\text{ativa}}} .$$

**Portanto, sendo 1 e 2 partículas arbitrárias, a razão entre as duas massas gravitacionais é uma constante universal.**

**Seja então, por exemplo,  $m^{\text{ativa}} = \alpha m^{\text{passiva}}$  . Podemos reescrever a lei de Newton como:**

$$G \frac{m_1^{\text{passiva}} m_2^{\text{ativa}}}{r^2} = G \frac{m_2^{\text{passiva}} m_1^{\text{ativa}}}{r^2} \implies G \alpha^2 \frac{m_1^{\text{passiva}} m_2^{\text{passiva}}}{r^2} = G \alpha^2 \frac{m_2^{\text{passiva}} m_1^{\text{passiva}}}{r^2} .$$

**Encorporando o  $\alpha$  no  $G$ ,  $\alpha^2 G \longrightarrow G$  , podemos tranquilamente usar uma massa gravitacional só. (Veja, por exemplo, Will, *Living Rev. Rel.* 17 (2014) 4).**

---

# EQUIVALÊNCIA ENTRE MASSA GRAVITACIONAL E MASSA INERCIAL

Muito menos trivial é a equivalência entre massa gravitacional e massa inercial, que é um princípio (o princípio de equivalência fraco) e portanto só pode ser testado.

Se  $m_I = m_G$ , então:

$$\mathbf{F}_{12} = m_1 \mathbf{a}_1, \quad \mathbf{F}_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{r}, \quad \implies \quad \mathbf{a}_1 = G \frac{m_2}{r^2} \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{r}.$$

Então a dinâmica (aceleração) da partícula 1 em resposta à força gravitacional da partícula 2 não depende da massa da partícula 1! Como a partícula 1 é arbitrária, isso vale para todas as partículas. Ou seja a resposta dinâmica de uma partícula à força gerada pela partícula 2 é universal para todas as partículas.

Se a partícula 2 é a Terra:  $g = G \frac{M_T}{R_T^2} \approx 9.8 \text{ m s}^{-2}$ . Essa é a universalidade da queda livre, certamente conhecida por Galileu.

---

# EQUIVALÊNCIA ENTRE MASSA GRAVITACIONAL E MASSA INERCIAL

**Notem que  $F_{12} = F_{21}$  , mas as dinâmicas das partículas 1 e 2 não são idênticas! De fato:**

$$a_1 = G \frac{m_2}{r^2} , \quad a_2 = G \frac{m_1}{r^2} ,$$

**e, em geral,  $a_1 \neq a_2$  , pois  $m_1 \neq m_2$  .**

**Uma forma sugestiva de dizer isso é a seguinte: a força gravitacional exercida por um ser humano sobre a Terra é igual à força exercida pela Terra sobre o ser humano! (Terceira lei de Newton) Mas a aceleração induzida pela Terra no ser humano é (na superfície)  $g$ , enquanto a aceleração induzida pelo ser humano (digamos de 100 kg) na Terra é**

$$a_T = \frac{m}{M_T} g \approx 10^{-22} g .$$



---

# TESTES DO PRINCÍPIO DE EQUIVALÊNCIA FRACO

**Suponhamos que  $m_G = m_I(1 + \eta)$  , pois, por algum motivo, as várias formas de energia que constituem um corpo podem contribuir diferentemente para as duas massas. Então, dois corpos diferentes, digamos 1 e 2, teriam acelerações diferentes na Terra:**

$$\mathbf{a}_1 = (1 + \eta_1)\mathbf{g} , \quad \mathbf{a}_2 = (1 + \eta_2)\mathbf{g} , \quad \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = (\eta_1 - \eta_2)\mathbf{g} .$$

**Não é prático usar corpos em queda livre, melhor usar uma balança de torção (neste caso a massa inercial contribui para a força centrífuga).**

**Eötvös (começo do século XX) encontrou  $|\eta_1 - \eta_2| < 3 \times 10^{-9}$  . Resultados modernos estão na ordem de  $|\eta_1 - \eta_2| < 10^{-14}$  . (Will, *Living Rev. Rel.* 17 (2014) 4).**

---

# O POTENCIAL GRAVITACIONAL

Escolha um referencial e coloque uma massa  $M$  na sua origem. Neste caso, a força exercida por  $M$  sobre uma genérica partícula de massa  $m$  e posição  $\mathbf{r}$  é:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -G \frac{mM}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad \hat{\mathbf{r}} \equiv \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

A força exercida depende de  $r$ , então  $\mathbf{F}(\mathbf{r})/m$  é o campo de força gravitacional gerado pela massa  $M$  (dividimos por  $m$ , assim esse campo só depende da massa  $M$  e da distância dela).

Lembrando da definição de trabalho de uma força:  $W = \int_{\gamma} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ , qual é o trabalho exercido da força gravitacional, se a massa  $m$  se movimenta ao longo de um caminho fechado?

---

# O POTENCIAL GRAVITACIONAL

Como:

$$\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2}d(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = \frac{1}{2}d(r^2) = r dr ,$$

Podemos escrever que o trabalho exercido pela força gravitacional, se a partícula se movimenta de um ponto A para um ponto B:

$$W_{A \rightarrow B} = - GmM \int_A^B \frac{1}{r^3} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = - GmM \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2} dr = - GmM \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) = m(U_A - U_B) .$$

Isto é, o trabalho exercido pela força gravitacional depende essencialmente da mudança da distância radial entre m e M. Isto porque a força gravitacional é radial.

O potencial gravitacional é:  $U = - G \frac{M}{r}$  . Nota: o potencial pode ser definido a menos de uma constante, pois é a diferença entre o potencial avaliado entre dois pontos que é igual ao trabalho.



---

# O POTENCIAL GRAVITACIONAL

**Em particular, voltando de B para A:**

$$W_{B \rightarrow A} = -GmM \int_B^A \frac{1}{r^3} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = -GmM \int_{r_B}^{r_A} \frac{1}{r^2} dr = -GmM \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) = -W_{A \rightarrow B}.$$

**Então, o trabalho exercido pela força gravitacional se sairmos de A e voltarmos para A é:**

$$W_{A \rightarrow A} = W_{A \rightarrow B} + W_{B \rightarrow A} = W_{A \rightarrow B} - W_{A \rightarrow B} = 0.$$

**Ou seja, é nulo. Quando isto acontece, o campo de força se diz conservativo.**

**Perdemos qualquer referência ao ponto B e o ponto A é genérico. Isto também significa que o trabalho exercido pelo campo gravitacional, quando a massa m se movimenta de um ponto para outro, só depende do valor do potencial no ponto inicial e no ponto final, não depende da trajetória da partícula.**

---

# O POTENCIAL GRAVITACIONAL

**Notem que:**

$$U = -G \frac{M}{r}, \quad \implies \quad \mathbf{F} = -m \nabla U .$$

**Tem outra maneira de chegar neste resultado. Usando o teorema de Stokes:**

$$0 = \oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad \implies \quad \int_S \mathbf{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = 0 .$$

**Como o caminho gamma é genérico, esta relação implica que o rotacional de  $\mathbf{F}$  é nulo.**

**Um campo vetorial com rotacional nulo pode sempre ser escrito como o gradiente de uma função escalar (teorema de Helmholtz).**

---

# CAMPO GRAVITACIONAL DE UM CONJUNTO DE MASSAS

Suponham ter um conjunto de massas pontuais  $\{m_i\}_{i=1}^N$  nas posições  $\{\mathbf{r}_i\}_{i=1}^N$ . Qual é o campo de força gravitacional exercido sobre uma massa teste  $m$  na posição  $\mathbf{r}$ ? O princípio de superposição nos diz que:

$$\mathbf{F}_{\text{tot}}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i(\mathbf{r}) = -Gm \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} = -Gm \sum_{i=1}^N m_i \nabla_{\mathbf{r}} \left( -\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \right).$$

Portanto, em termos dos potenciais gravitacionais gerados pelas várias massas:

$$\mathbf{F}_{\text{tot}}(\mathbf{r}) = -Gm \nabla_{\mathbf{r}} \left[ \sum_{i=1}^N U_i(\mathbf{r}) \right] = -Gm \nabla_{\mathbf{r}} U_{\text{tot}}(\mathbf{r}), \quad U_{\text{tot}}(\mathbf{r}) \equiv \sum_{i=1}^N U_i(\mathbf{r}).$$

O potencial gravitacional de um conjunto de massas é então a soma dos potenciais gravitacionais.



---

# CAMPO GRAVITACIONAL DE UMA DISTRIBUIÇÃO CONTÍNUA DE MASSAS

Suponhamos ter um corpo com densidade de massa  $\rho(\mathbf{r}')$ . Subdividimos ele em pedacinhos de volume infinitesimal  $d\mathbf{r}'$ . Cada um desses tem massa  $dm = \rho(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'$  e então gera um potencial gravitacional infinitesimal na posição  $\mathbf{r}$ :

$$dU(\mathbf{r}) = -G \frac{dm}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Somando então todos os pedacinhos infinitesimais, isto é, integrando:

$$U(\mathbf{r}) = -G \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Aqui  $V$  é o volume do corpo, entendido como a porção de espaço onde a sua densidade é não nula.

Com esta fórmula podemos calcular o potencial gravitacional gerado por uma arbitrária distribuição de massa. Essa é a única equação ``que conta'', na gravitação Newtoniana.

---

# A EQUAÇÃO DE POISSON

**A equação de Poisson é uma equação diferencial para o potencial gravitacional. Para obter ela basta aplicar o operador laplaciano à equação:**

$$U(\mathbf{r}) = -G \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} .$$

**A sutileza importante aqui (deixada como exercício) é que:**

$$\nabla_{\mathbf{r}}^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') ,$$

**onde a delta é a delta de Dirac. Com isso, obtemos a equação de Poisson:**

$$\nabla^2 U(\mathbf{r}) = 4\pi G\rho(\mathbf{r}) .$$

---

# CAMPO GRAVITACIONAL DE UMA DISTRIBUIÇÃO ESFÉRICA DE MATÉRIA

Consideremos uma distribuição contínua e esférica de matéria, e escolhamos o centro da esfera como o centro do sistema de referência. O potencial gravitacional gerado será:

$$U(\mathbf{r}) = -G \int_V \frac{\rho(r') d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} . \text{ Note a dependência funcional de } \rho.$$

O denominador do integrando pode ser expandido (expansão de Laplace):

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma}} = \frac{1}{r} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^{\ell} \mathcal{P}_{\ell}(\cos \gamma) . \text{ Isso para } r > r' , \quad \forall r' ,$$

o que implica que esta expansão é válida somente para fora da esfera. Os  $\mathcal{P}_{\ell}$  são os polinômios de Legendre.

---

# CAMPO GRAVITACIONAL DE UMA DISTRIBUIÇÃO ESFÉRICA DE MATÉRIA

**Agora podemos substituir a expansão em polinômios de Legendre na fórmula do potencial:**

$$U(\mathbf{r}) = -\frac{G}{r} \sum_{\ell=0}^{\infty} \int_V \rho(r') \left(\frac{r'}{r}\right)^{\ell} \mathcal{P}_{\ell}(\cos \gamma) d\mathbf{r}' = -\frac{G}{r} \sum_{\ell=0}^{\infty} \int_0^R \rho(r') \left(\frac{r'}{r}\right)^{\ell} dr' \int_{\Omega} \mathcal{P}_{\ell}(\cos \gamma) d\Omega .$$

**O segundo integral é nulo (pela ortogonalidade dos polinômios de Legendre), exceto se  $\ell = 0$ . Mas  $\mathcal{P}_0 = 1$ , portanto:**

$$U(\mathbf{r}) = -\frac{G}{r} \int_V \rho(r') d\mathbf{r}' = -\frac{GM}{r} . \text{ Onde } M \text{ é a massa da esfera.}$$

**Nota, isso para  $r > R$ . Como exercício, calcule-se o potencial gravitacional internamente à esfera.**



---

# CAMPO GRAVITACIONAL DE UMA DISTRIBUIÇÃO ESFÉRICA DE MATÉRIA

**Descobrimos então que o potencial gravitacional gerado por uma distribuição de massa com simetria esférica é, fora da esfera, igual ao gerado por um ponto colocado no centro da esfera e com massa igual à massa da esfera.**

**A força gravitacional sobre uma massa teste  $m$  será então radial:**

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -m \nabla U(\mathbf{r}) = -\frac{GmM}{r^2} \hat{r}, \quad r > R.$$

**Pode-se obter o mesmo resultado geometricamente, sem considerar a expansão de Laplace (que é mais útil quando a distribuição de massa não é esférica).**

**Exercício: considere o campo de força gravitacional gerado por uma distribuição esférica de massa. Mostre geometricamente, por simetria, que este é radial. Use o teorema de Gauss para chegar no resultado acima.**

---

# ALGUNS COMENTÁRIOS

**A dependência temporal sempre foi ignorada até agora. Porém, como o tempo é absoluto na dinâmica newtoniana, podemos recuperá-la de forma simples:**

$$U(t, \mathbf{r}) = -G \int_V \frac{\rho(t, \mathbf{r}') d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

**Aqui imaginamos que a distribuição de matéria varie no tempo (usando a prescrição euleriana).**

**A característica mais impactante é que qualquer variação na densidade de matéria é transmitida instantaneamente para qualquer ponto do espaço, não importa o quanto distante. (Einstein cuida disso).**

**No eletromagnetismo isso não acontece. Para o potencial eletrostático:**

$$V_{\text{ret}}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(t_{\text{ret}}, \mathbf{r}') d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad t_{\text{ret}} \equiv t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}.$$

**O potencial tem um “tempo de resposta”.**

---

# ALGUNS COMENTÁRIOS

**Outro problema é que o potencial gravitacional, e a força, divergem se a distância de, por exemplo, duas massas pontuais tende a zero. Isto significa que a teoria de Newton tem um limite de validade. Podemos, por exemplo, estabelecer que:**

$$\frac{GM}{d} \ll c^2 ,$$

**para evitarmos de ter que tomar em conta efeitos relativísticos. Isso implica  $d \gg \frac{GM}{c^2}$ , ou seja as distâncias têm de ser muito maiores do raio gravitacional de um corpo de massa M.**

**Ou ainda:**

$$d^2 \gg \frac{h^2}{M^2 V^2} \approx \frac{h^2 d}{M^2 GM} \implies d \gg \frac{h^2}{GM^3} .$$

**Isso para evitarmos de ter que tomar em conta a natureza de onda das partículas.**

---

# EXERCÍCIO: O PROBLEMA DE DOIS CORPOS

**Temos agora, a princípio, a ferramenta para descrever o Sistema Solar na Gravitação Newtoniana.**

**O problema é que encontrar as trajetória de  $N$  corpos interagindo mutuamente pela gravitação é impossível analiticamente (só numericamente).**

**Por sorte, para cada planeta pode-se considerar o Sol como a fonte de campo gravitacional mais relevante, e tratar os campos gravitacionais dos demais planetas como pequenas perturbações do campo gravitacional do Sol.**

**Resolvamos então o problema de dois corpos na gravitação Newtoniana. Sol-planeta.**

**Sistema Terra-Sol-Lua: problema de 3 corpos restringido: pontos Lagrangeanos (onde são enviados alguns satélites para observações).**

**Perturbações na órbita de um planeta causadas pela influência gravitacional dos demais planetas: precessão dos equinócios.**



---

# PRIMEIRO PASSO: AS EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

Consideremos dois corpos com simetria esférica, massas  $m_1$  e  $m_2$ , e posições (num dado instante)  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$ . Seja  $\mathbf{r} := \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ .

Como vimos:  $\mathbf{a}_1 = -G \frac{m_2}{r^3} \mathbf{r}$ ,  $\mathbf{a}_2 = G \frac{m_1}{r^3} \mathbf{r}$ .

Se definimos a posição do centro de massa como:

$$\mathbf{R} := \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2},$$

é claro que (conforme a terceira lei da dinâmica):

$$\ddot{\mathbf{R}} = \frac{m_1 \mathbf{a}_1 + m_2 \mathbf{a}_2}{m_1 + m_2} = 0,$$

portanto o centro de massa se movimenta uniformemente.

---

# REFERENCIAL DO CENTRO DE MASSA

**Ao invés de tratar o problema de dois corpos nas coordenadas  $r_1, r_2$  é então mais conveniente usar  $R, r$  pois  $\ddot{R} = 0$ , um movimento livre.**

**A solução é um movimento retilíneo uniforme  $R(t) = R(0) + Vt$ . Em particular, somos livres de escolher um referencial comóvel com o centro de massa (pois a dinâmica Newtoniana é invariante sob transformações de Galileu) e então podemos escolher  $R(t) = 0, \forall t$ .**

**Portanto, sobra somente a equação do movimento para a separação relativa:**

$$\mathbf{a} := \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = -G \frac{(m_1 + m_2)}{r^3} \mathbf{r} .$$

**Então reduzimos o problema de dois corpos a um problema efetivo de um corpo.**

---

# ENERGIA DO SISTEMA DE 2 CORPOS

**A energia do sistema de 2 corpos é (soma da energia cinética e da energia potencial):**

$$E = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - G\frac{m_1m_2}{r}.$$

**Introduzindo  $R, r$  ao invés de  $r_1, r_2$  obtém-se (exercício):**

$$E = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 + \frac{1}{2}\mu v^2 - G\frac{(m_1 + m_2)\mu}{r}, \quad \mu := \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}.$$

**Como podemos escolher o referencial do centro de massa:**

$$E_{\text{cdm}} = \frac{1}{2}\mu v^2 - G\frac{(m_1 + m_2)\mu}{r},$$

**então o problema de 2 corpos se reduz a tratar o problema de um corpo de massa reduzida  $\mu$  no potencial gerado pela soma das massas (tratação efetiva a 1 corpo).**

---

# TRAJETÓRIAS

**Vamos resolver agora a equação do movimento:**

$$\mathbf{a} = -G \frac{M}{r^3} \mathbf{r} . \quad M := m_1 + m_2 .$$

**Escolhemos o referencial do centro de massa. A energia se torna:**

$$E = \frac{1}{2} \mu v^2 - G \frac{M\mu}{r} .$$

**Introduzir o momento angular  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  é muito útil também, pois:**

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{v} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} .$$

**Como a força é central, o momento angular é constante. Então, o movimento é planar.**

---



---

# TRAJETÓRIAS

**O problema se tornou bidimensional (planar). Exercício: usando coordenadas polares, mostrar que:**

$$\frac{d^2r}{dt^2} - \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -G\frac{M}{r^2}, \quad r\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\frac{d\varphi}{dt}\frac{dr}{dt} = 0.$$

**Além disso:**

$$L = \mu r^2 \frac{d\varphi}{dt}.$$

**Portanto:**

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{L^2}{\mu^2 r^3} - G\frac{M}{r^2}.$$

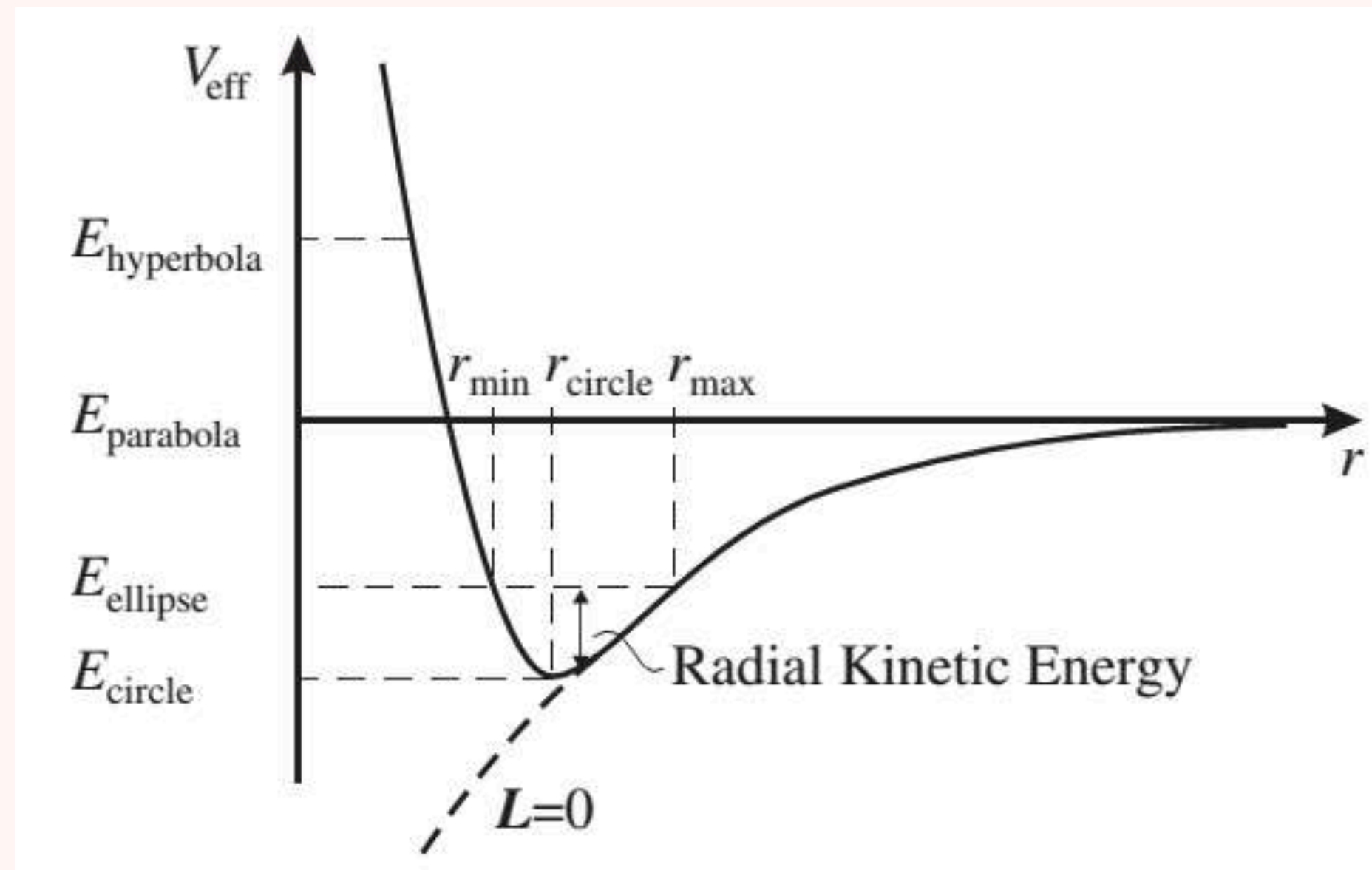
**Repare-se o termo de força centrífuga, dependente do módulo quadrado do momento angular.**

# POTENCIAL EFETIVO

Re-escrevemos a energia em coordenadas polares (o ponto representa a derivada temporal):

$$E = \frac{1}{2}\mu v^2 - G\frac{M\mu}{r} = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - G\frac{M\mu}{r} = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + \frac{L^2}{\mu^2 r^2}\right) - G\frac{M\mu}{r}.$$

A contribuição angular desapareceu, temos apenas um movimento em uma dimensão com potencial efetivo:



<https://physics.stackexchange.com/>

---

# TRAJETÓRIAS

Mais que saber a posição do planeta num dado tempo, estamos interessados na trajetória (órbita). Para isso, da expressão da energia obtemos:

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{\mu} \left( E + \frac{GM\mu}{r} - \frac{L^2}{2\mu r^2} \right)}.$$

Podemos eliminar o tempo dividindo por  $\dot{\varphi} = L/(\mu r^2)$ :

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\mu r^2}{L} \sqrt{\frac{2}{\mu} \left( E + \frac{GM\mu}{r} - \frac{L^2}{2\mu r^2} \right)}.$$

Introduzindo a variável de Binet  $u := 1/r$ , a equação da trajetória pode ser encontrada por meio de integração:

$$\varphi = \varphi_0 - \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{\frac{2\mu E}{L^2} + \frac{2G\mu^2 M u}{L^2} - u^2}}.$$

---

# TRAJETÓRIAS

**A integral**

$$\varphi = \varphi_0 - \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{\frac{2\mu E}{L^2} + \frac{2G\mu^2 M u}{L^2} - u^2}},$$

**pode ser resolvida exatamente, dando:**

$$\frac{1}{r} = \frac{GM\mu^2}{L^2} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{(GM\mu)^2\mu}} \cos(\varphi - \varphi_0) \right].$$

**Essa é a equação, em coordenadas polares, de uma cônica com fogo na origem do referencial.**



---

# TRAJETÓRIAS

$$\frac{1}{r} = \frac{GM\mu^2}{L^2} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{(GM\mu)^2\mu}} \cos(\varphi - \varphi_0) \right] .$$

**A forma geral da equação, em coordenadas polares, de uma cônica com fogo no centro do referencial é:**

$$\frac{1}{r} = C [1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)] .$$

**Podemos então ler a excentricidade:**

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{(GM\mu)^2\mu}} .$$

---

# PRIMEIRA LEI DE KEPLER PROVADA

**Quando a excentricidade é zero, temos uma órbita circular. Isto requer:**

$$E = -\frac{(GM\mu)^2\mu}{2L^2}.$$

**Quando a energia é negativa, mas maior deste valor, temos uma órbita elíptica:**

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)}, \quad a = -\frac{GM\mu}{2E}.$$

**Assim, a primeira lei de Kepler está provada.**

**Nota, o cálculo acima pode ser repetido para qualquer tipo de potencial, não somente o gravitacional. Porém, somente para este e para o potencial harmônico existem trajetórias fechadas (teorema de Bertrand).**

---

# SEGUNDA LEI DE KEPLER PROVADA

Essencialmente a segunda lei de Kepler é a conservação do momento angular.

Lembrando:

$$L = \mu r^2 \dot{\varphi} .$$

A velocidade areal é:

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\varphi , \quad \implies \quad \frac{dA}{dt} = \frac{L}{2\mu} .$$

Então, constante.

---

# TERCEIRA LEI DE KEPLER PROVADA

**Lembrando:**

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{\mu} \left( E + \frac{GM\mu}{r} - \frac{L^2}{2\mu r^2} \right)}, \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{E + \frac{GM\mu}{r} - \frac{L^2}{2\mu r^2}}}.$$

**Para o movimento elíptico:**

$$t = - \frac{1}{\sqrt{2GM}} \int_{r_0}^r \frac{r dr}{\sqrt{r - \frac{r^2}{2a} - \frac{a(1-e^2)}{2}}}.$$



---

# TERCEIRA LEI DE KEPLER PROVADA

Para resolvermos essa integral, introduzimos uma nova variável: a anomalia excêntrica, ou periapsis:

$$r = a(1 - e \cos \psi) .$$

**Desta forma:**

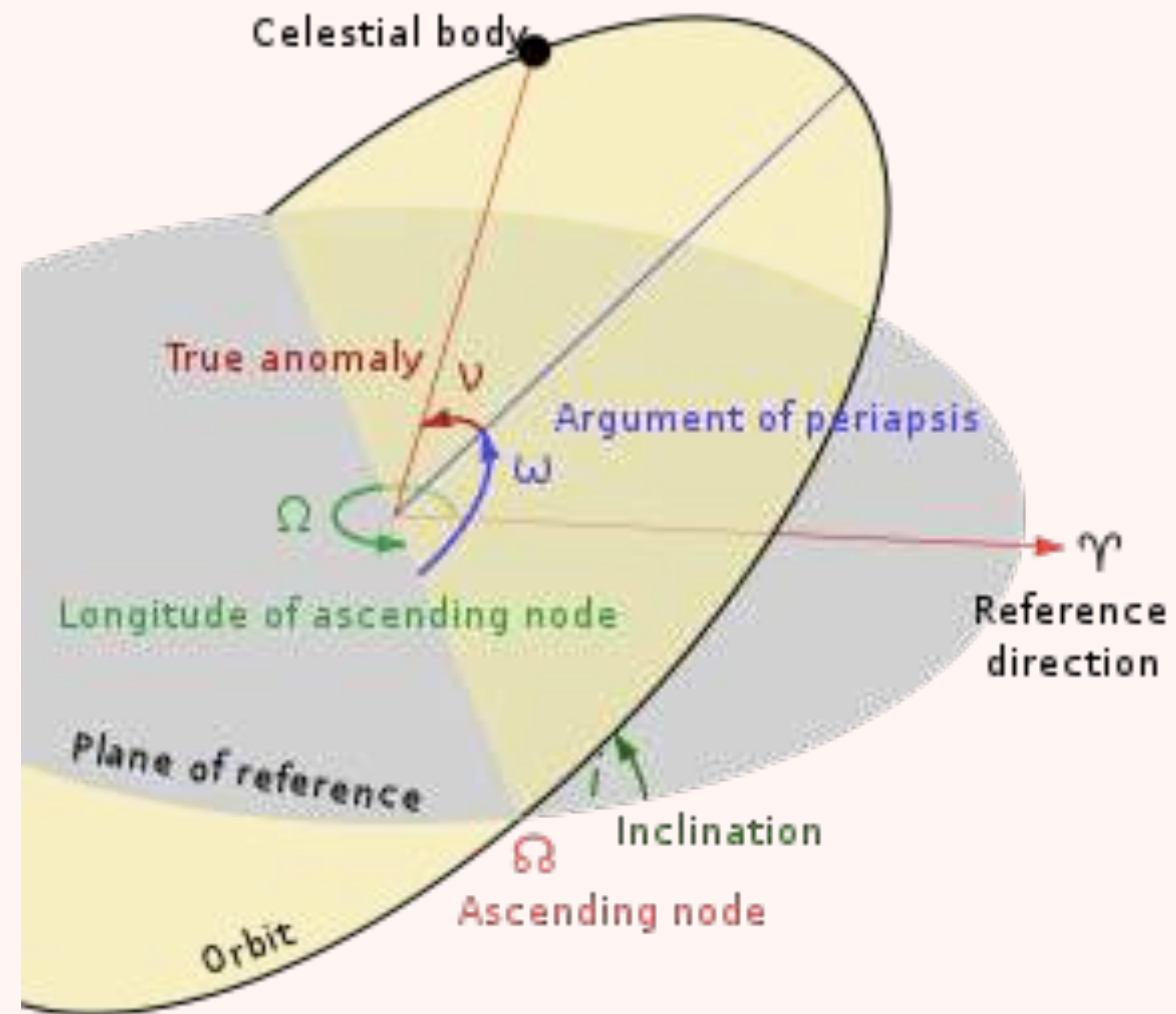
$$t = \sqrt{\frac{a^3}{GM}} \int_0^\psi (1 - e \cos \psi) d\psi .$$

**Integrando sobre uma órbita completa:**

$$\tau = \sqrt{\frac{a^3}{GM}} \int_0^{2\pi} (1 - e \cos \psi) d\psi = 2\pi a^{3/2} \frac{1}{\sqrt{GM}} .$$

**Assim, a terceira lei de Kepler também fica provada (e essa prova por Newton a tornou aceita).**

# ELEMENTOS KEPLERIANOS

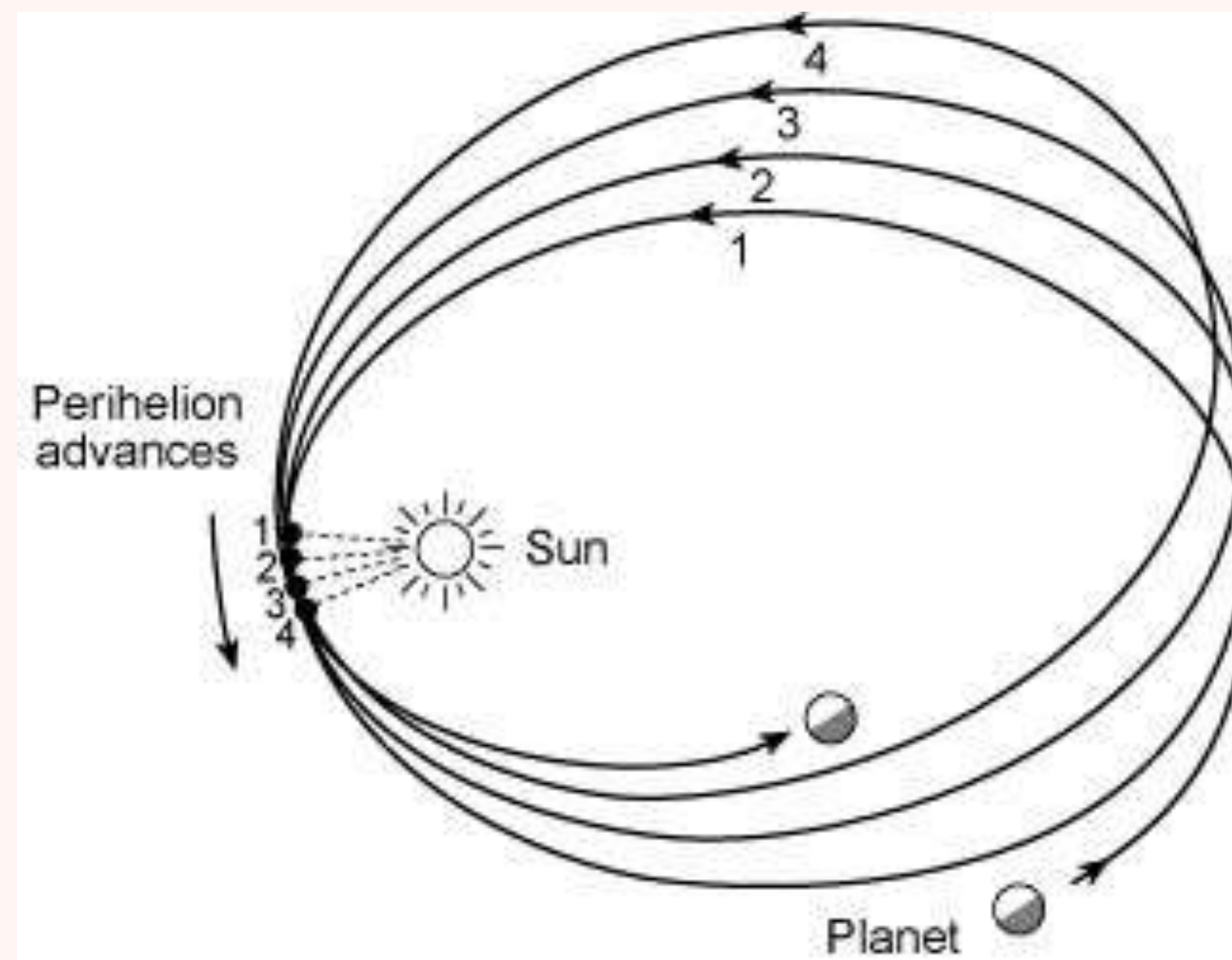


[https://en.wikipedia.org/wiki/Orbital\\_elements](https://en.wikipedia.org/wiki/Orbital_elements)

---

# VÁRIOS EXERCÍCIOS BEM DIFÍCEIS

- **Considere o problema de três corpos (restringido) Sol-Terra-Lua, e calcule as posições dos pontos Lagrangeanos;**
- **Calcule a precessão do periélio de Mercúrio causada das perturbações no campo gravitacional do Sol devidas aos outro planetas.**



---

# MERCÚRIO

**A precessão do periélio de Mercúrio observada é de cerca 575 segundos de arco por século.**

**Porém, somente 532 segundos de arco podem ser explicados pelos efeitos gravitacionais dos demais planetas. Faltam 43 segundos de arco por século.**

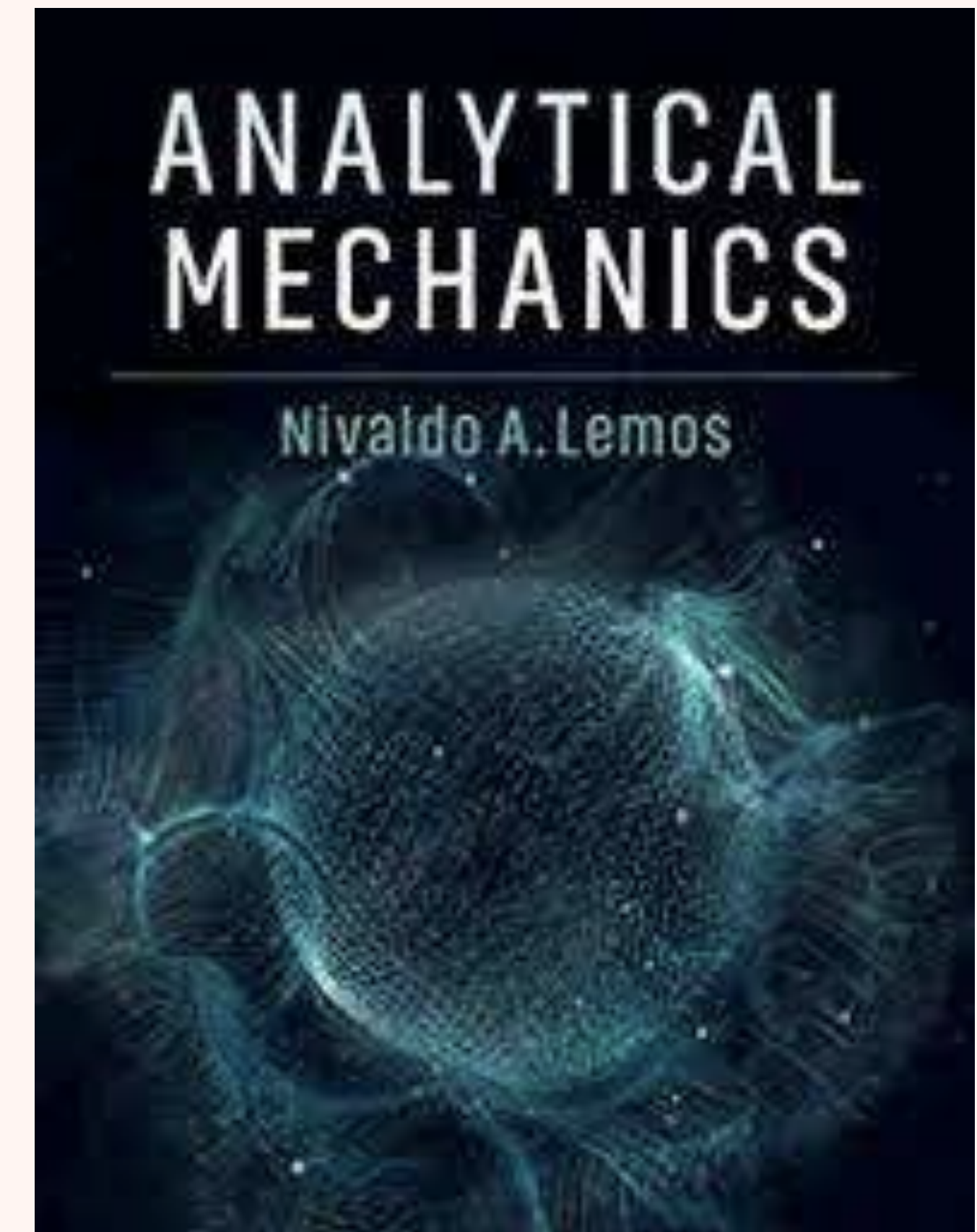
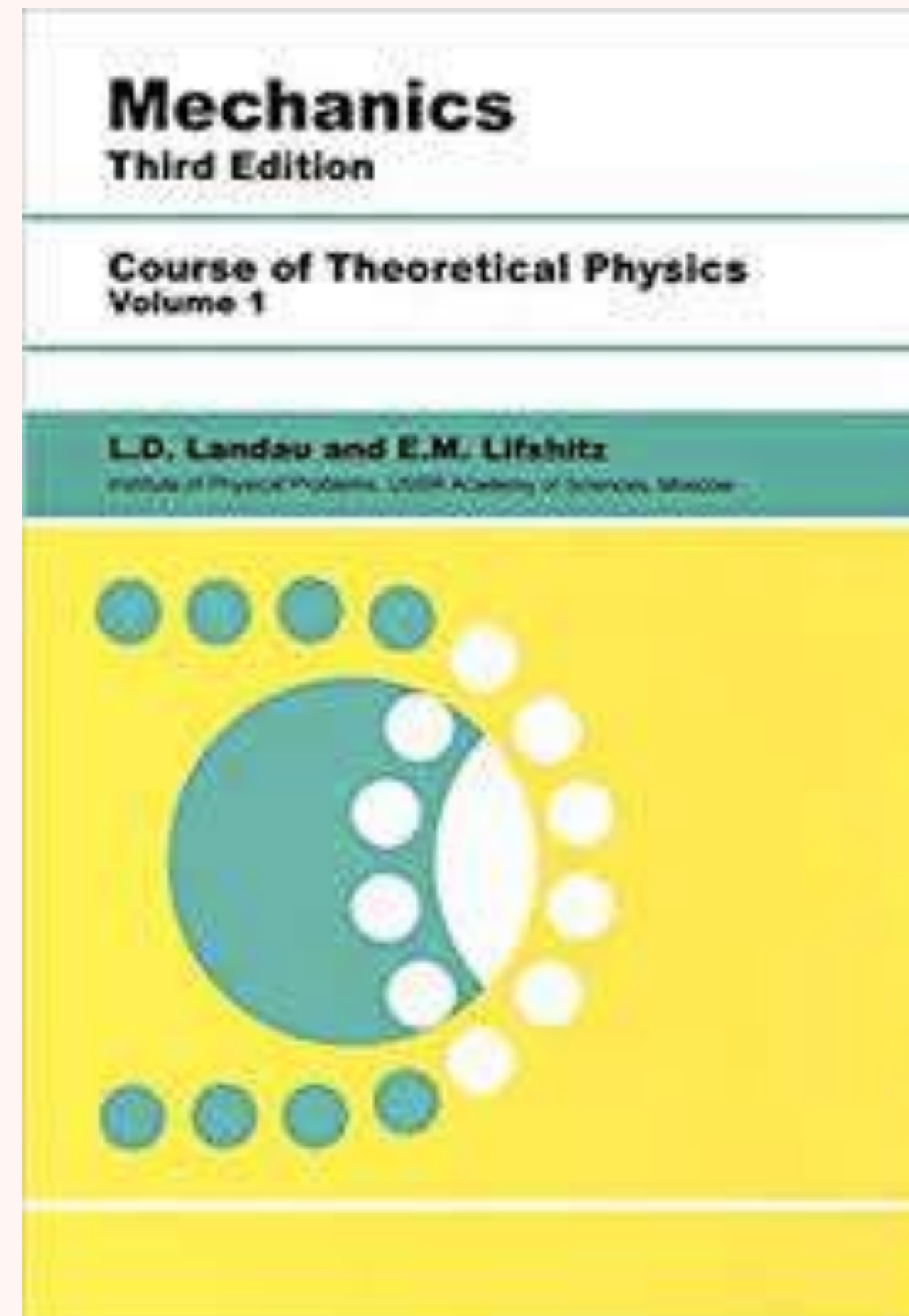
**Qual a explicação para essa discrepância? Existe outro planeta entre Mercúrio e o Sol (Vulcano)? Acrescentar um planeta funcionou no caso de Neptuno.**

**Aqui não, precisamos estender a teoria gravitacional. Existe um paralelo com a questão da matéria escura hoje: partículas além do modelo padrão (Neptuno) ou nova teoria gravitacional (Relatividade Geral)?**



---

# REFERÊNCIAS (MECÂNICA CLÁSSICA)





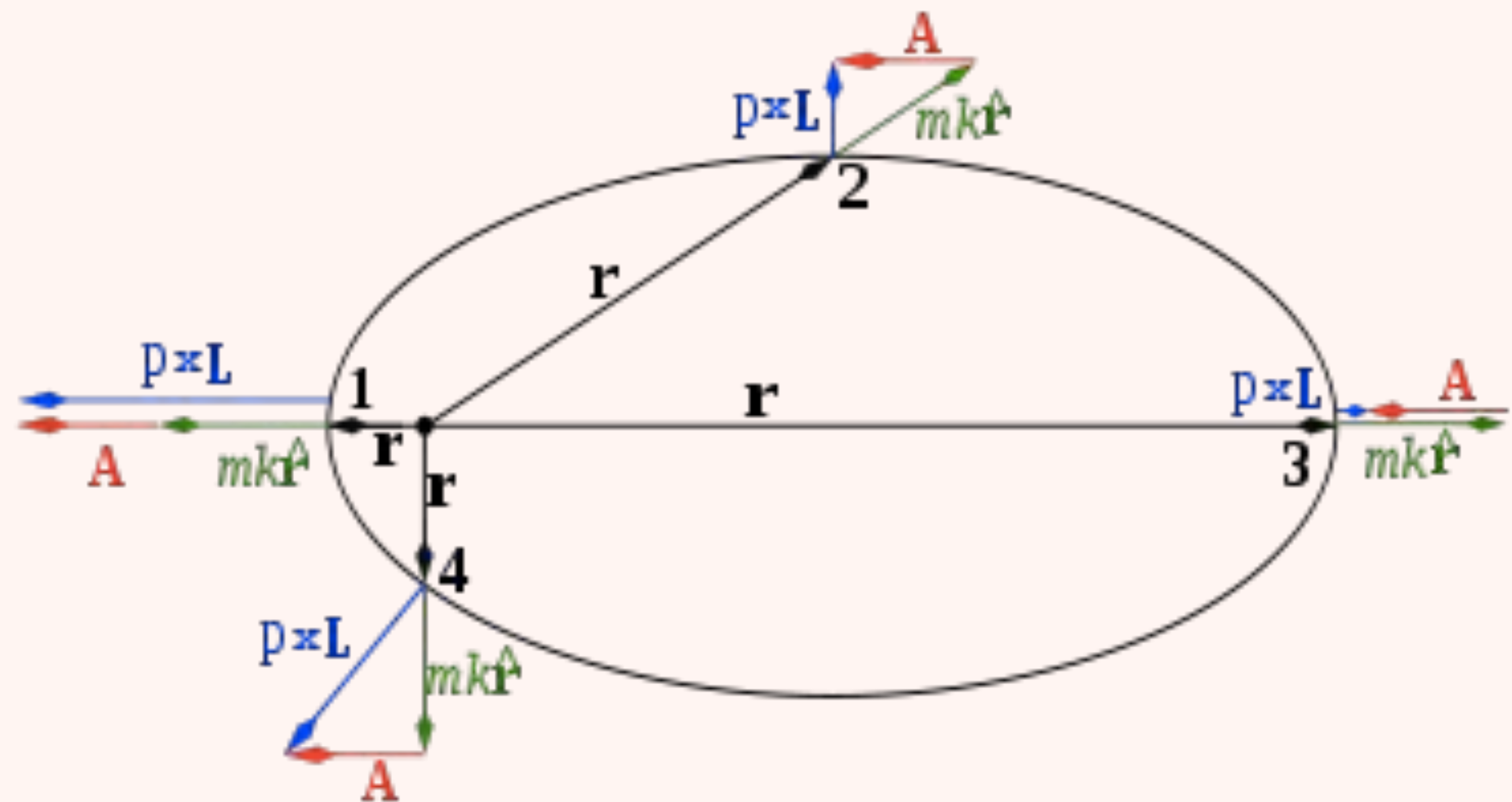
# O VETOR DE LAPLACE-RUNGE-LENZ

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - GM\mu^2 \hat{\mathbf{r}} .$$

É constante em direção e magnitude.

Permite reescrever a solução ao problema de Kepler de forma mais compacta:

$$\frac{1}{r} = \frac{GM\mu^2}{L^2} + \frac{A}{L^2} \cos(\varphi - \varphi_0) .$$



---

# POTENCIAL NEWTONIANO RETARDADO

Possibilidade de descrever o avanço do periélio de Mercúrio.

744

*PHYSICS: R. J. KENNEDY*

PROC. N. A. S.

*PLANETARY MOTION IN A RETARDED NEWTONIAN  
POTENTIAL FIELD*

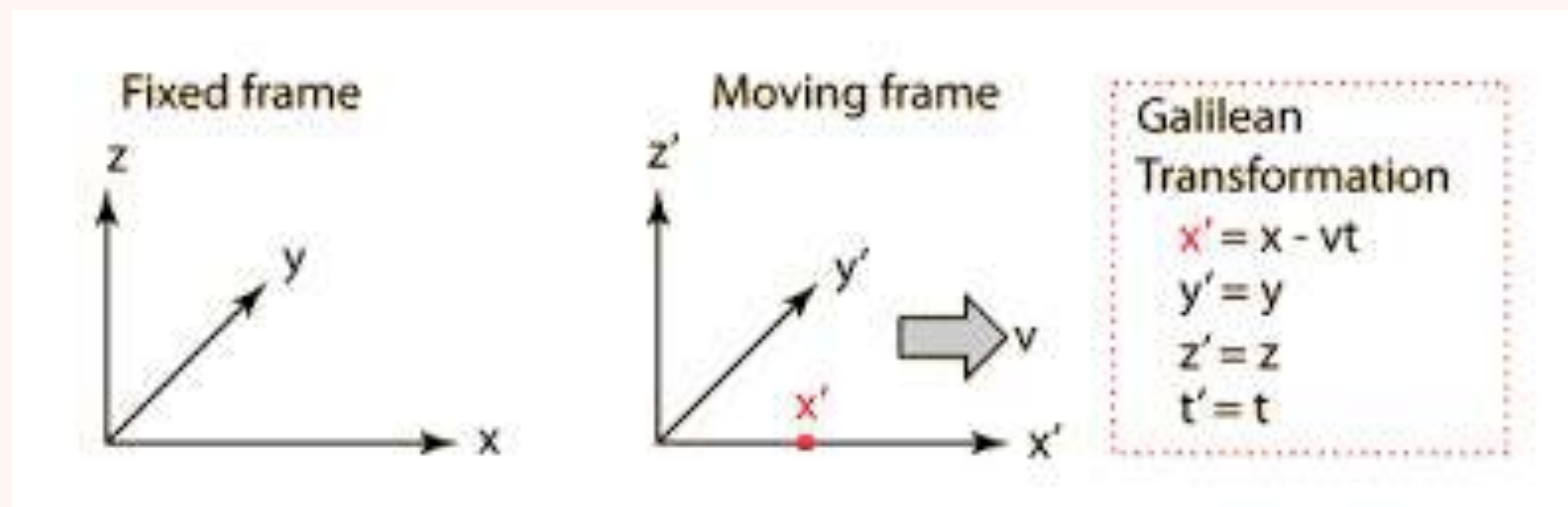
BY ROY J. KENNEDY\*

DEPARTMENT OF PHYSICS, CALIFORNIA INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Communicated July 31, 1929

# INTERMEZZO: RELATIVIDADE RESTRITA

**Havia um problema com a eletrodinâmica de Maxwell: as equações não são invariantes sob uma transformação de Galileu. Isto implicaria uma quebra do princípio de relatividade?**



$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

---

# INTERMEZZO: RELATIVIDADE RESTRITA

**Segundo Einstein (1905), não. O princípio de relatividade continua valendo (é verificado experimentalmente) e a eletrodinâmica de Maxwell é correta.**

**Reparem que a velocidade da luz entra nas equações de Maxwell. Para então satisfazermos o princípio de Relatividade,  $c$  tem que ser uma constante universal (não depende do referencial escolhido). Mas  $c$  é uma velocidade!**

**O que tem de modificar são as transformações de Galileu. Tem que passar para as transformações de Lorentz. Nestas o tempo também transforma.**

THE LORENTZ-EINSTEIN TRANSFORMATIONS

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - vt) & x &= \gamma(x' + vt') \\y' &= y & y &= y' \\z' &= z & z &= z' \\t' &= \gamma(t - vx/c^2) & t &= \gamma(t' + vx'/c^2)\end{aligned}$$

with  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ , where  $v$  is the velocity of  $S'$  as measured in  $S$

(3-16)

---

# INTERMEZZO: RELATIVIDADE RESTRITA

**As transformações de Galileu são o limite para a velocidade da luz que tende ao infinito das de Lorentz.**

**Interpretação geométrica das transformações de Lorentz e conceito de espaço-tempo: Minkowski (1908). Espaço de Minkowski.**

**Métrica: como medir distâncias no espaço-tempo.**

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu .$$

$$\eta_{\mu\nu} = \mathbf{diag}(-1, 1, 1, 1) .$$

**Da invariância sob rotações à invariância sob as transformações de Lorentz: do conceito de vetor na mecânica clássica ao conceito de quadrivetor.**

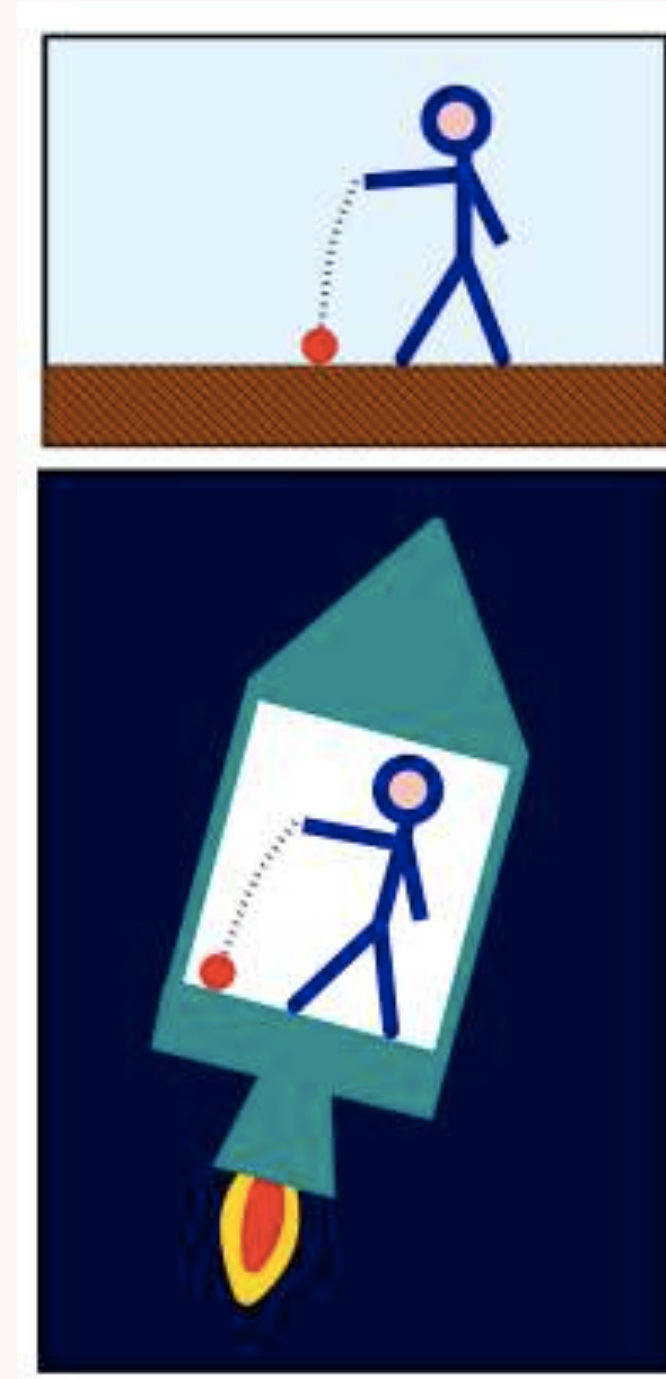
$$x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} x^{\nu} , \quad \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\rho} \Lambda^{\nu}_{\sigma} = \eta_{\rho\sigma} .$$



---

# O PRINCÍPIO DE EQUIVALÊNCIA

**(Einstein, 1911) Em queda livre, não sentimos mais o campo gravitacional (a parte efeitos de maré). Num referencial acelerado somos puxados exatamente como nos puxa a gravidade.**



---

# A MÉTRICA

**A equivalência não é global, mas vale localmente (num ponto). Então a gravidade é como uma força inercial, mas não exatamente (no sentido que não é fictícia).**

**Escolhendo um referencial oportuno (inercial ou de queda livre) então eliminamos os efeitos da gravitação:**

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} d\xi^\mu d\xi^\nu .$$

**Isto vale somente em um ponto. Em ausência de outras interações temos então Relatividade Restrita. Trocando de coordenadas (covariância geral) temos:**

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\rho} dx^\rho \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\sigma} dx^\sigma , \implies ds^2 = g_{\rho\sigma} dx^\rho dx^\sigma .$$

**O campo gravitacional está então descrito pela métrica  $g_{\rho\sigma}$ . Não tem então 1 potencial, mas sim 10!**

---

# A EQUAÇÃO DA GEODÉSICA

**Novamente, escolhendo um referencial oportuno (inercial ou de queda livre) a equação do movimento é (aceleração nula):**

$$\frac{d^2 \xi^\mu}{d\tau^2} = 0 .$$

**Trocando de coordenadas (covariância geral) temos:**

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0 , \quad \Gamma_{\nu\rho}^\mu \equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\nu \partial x^\rho} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} \left( \frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\rho} + \frac{\partial g_{\sigma\rho}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\sigma} \right) .$$

**Essa equação já era conhecida antes do Einstein. Essa descreve o caminho mais breve num espaço curvo.**

---

# LIMITE NEWTONIANO

**Em caso de baixas velocidades num campo fraco estacionário:**

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0, \text{ se torna } \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\mu \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0,$$

**Como o campo é fraco podemos escrever a métrica como  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ , com  $h_{\mu\nu} \ll 1$  e**

**como  $\Gamma_{00}^\mu = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{00,\nu}$ , temos que:**

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \frac{1}{2} \nabla h_{00}.$$

**Comparando com o caso newtoniano, temos então  $g_{00} = -(1 + 2U)$ .**

---

# CURVATURA

**Vimos que:**  $\eta_{\mu\nu} \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\sigma} = g_{\rho\sigma}$ .

**Os  $g_{\rho\sigma}$  são 10 enquanto os  $\frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\rho}$  são 16. Ou seja, temos infinitos referenciais em queda livre (pois há invariância de Lorentz local, 6 graus de liberdade a mais).**

**Na conexão afim temos  $\Gamma_{\nu\rho}^\mu \equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\nu \partial x^\rho}$ , 40 objetos, que podem ser escolhidos nulos.**

**A derivada segunda da métrica  $\frac{\partial^2 g_{\rho\sigma}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}$  são 100 objetos, mas os  $\frac{\partial^3 \xi^\alpha}{\partial x^\nu \partial x^\rho \partial x^\sigma}$  são 80. Sobram 20 componentes que não podemos por a zero por meio de uma transformação de coordenadas. Estas constituem a curvatura.**



---

# TENSOR DE CURVATURA

As derivadas segundas e primeiras da métrica podem ser organizadas no tensor de curvatura:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\rho}^{\nu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} \Gamma_{\rho\sigma}^{\nu} - \Gamma_{\mu\rho}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\nu}^{\rho} .$$

Este é o único tensor que pode ser construído a partir da métrica e suas derivadas até a segunda e linear nestas últimas.

**Tensor:** se  $x^{\mu} \longrightarrow x^{\mu'}(x)$  então

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\mu'\nu'\rho'\sigma'} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^{\sigma}} .$$

---

# ANALOGIA COM TEORIAS DE CALIBRE NÃO ABELIANAS

**Transformação de calibre não abeliana  $\leftrightarrow$  Transformação de coordenadas**

**Derivada covariante  $\leftrightarrow$  Derivada covariante**

**Campo de calibre  $A^\alpha_\mu \leftrightarrow$  Conexão afim  $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$**

**Field strength  $F^\alpha_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A^\alpha_\nu - \partial_\nu A^\alpha_\mu + C^\alpha_{\beta\gamma} A^\beta_\mu A^\gamma_\nu \leftrightarrow$  Tensor de Riemann  $R^\mu_{\nu\rho\sigma}$**

**A analogia porém não é completa. O campo de calibre numa teoria abeliana é fundamental, enquanto a conexão afim se expressa em termos da derivadas primeira da métrica.**

---

# EQUAÇÕES DA RELATIVIDADE GERAL

**Como o tensor de curvatura é o único que existe linear nas derivadas segundas, se procuramos equações de campo de segunda ordem para a métrica a possibilidade mais natural é a seguinte:**

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} .$$

**Estas são as equações de Einstein. O lado esquerdo é o chamado tensor de Einstein:**

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R , \quad R_{\mu\nu} = g^{\rho\sigma} R_{\rho\mu\sigma\nu} , \quad R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} .$$

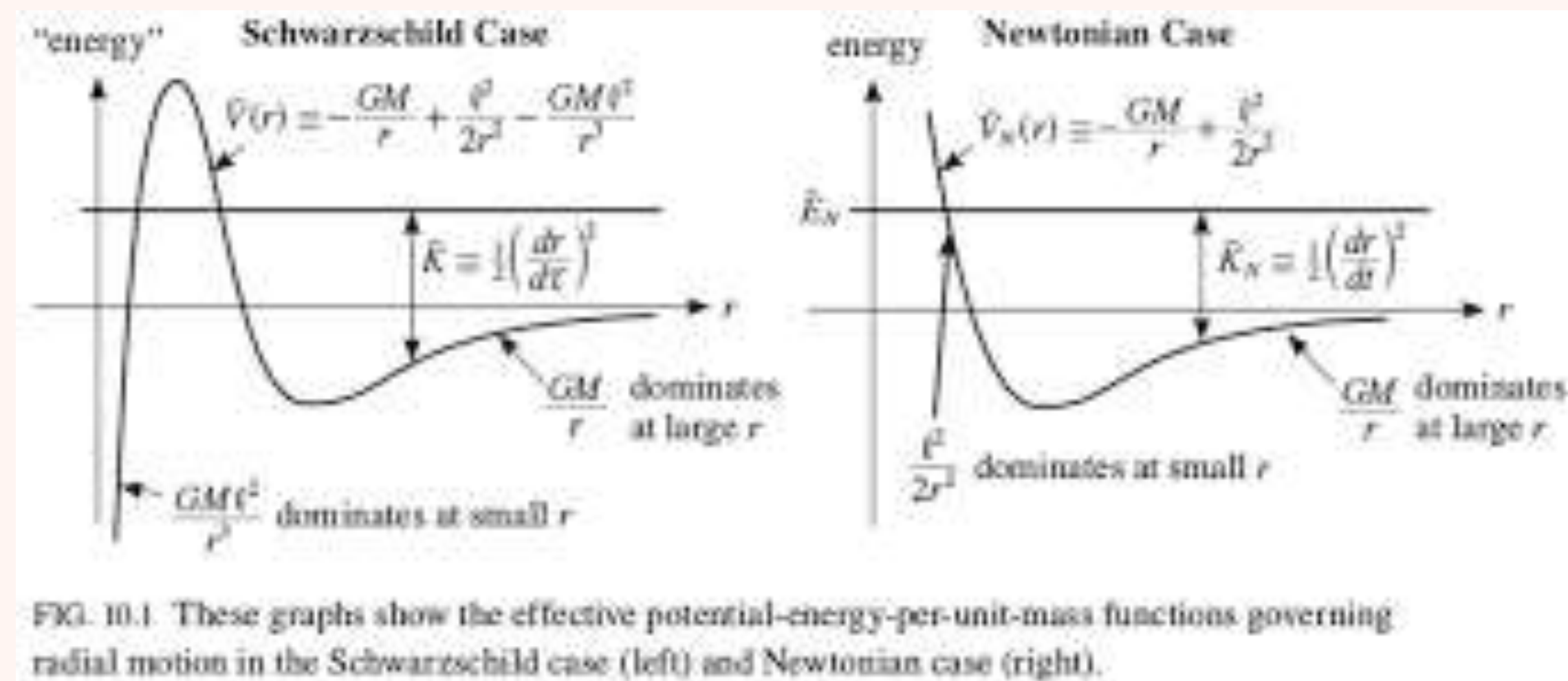
**O lado direito representa o conteúdo material (tensor energia-momento). Em Relatividade Geral não somente a massa gravita mas toda forma de energia (o momento também).**

# O PROBLEMA DE MERCÚRIO RESOLVIDO

**Em RG nem o problema de dois corpos sabe-se resolver. Mas no Sistema Solar não precisa. As correções relativísticas são importantes somente para Mercúrio.**

**Podemos incluir as correções relativísticas no potencial Newtoniano do Sol de forma muito simples. O acordo observacional é espetacular.**

**Os 43 segundos de arco que faltavam são agora explicados.**



# TESTES CLÁSSICOS DE RELATIVIDADE GERAL

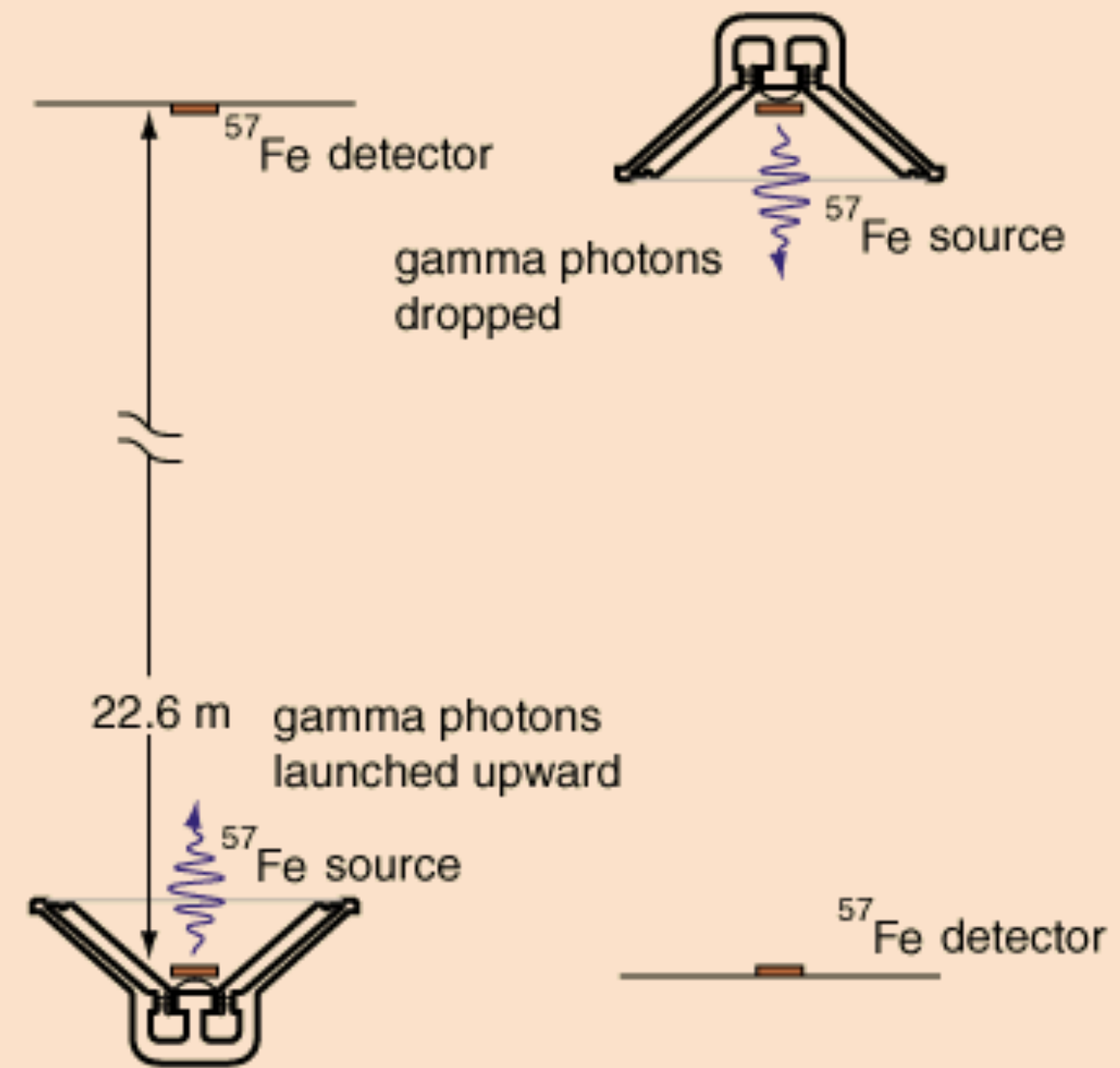
O redshift gravitacional (Pound e Rebka, 1959)

Precessão do periélio de Mercúrio

Deflexão do raios de luz

(Retardo de Shapiro)

## Harvard Tower Experiment



In just 22.6 meters, the fractional [gravitational red shift](#) given by

$$\nu = \nu_0 \left[ 1 + \frac{gh}{c^2} \right]$$

is just  $4.92 \times 10^{-15}$ , but the [Mössbauer effect](#) with the 14.4 keV gamma ray from [iron-57](#) has a high enough resolution to detect that difference. In the early 60's physicists Pound, Rebka, and Snyder at the Jefferson Physical Laboratory at Harvard measured the shift to within 1% of the predicted shift.



---

# MAIS TESTES

**Predição da RG. Existência debatida por várias décadas. Detecção em 2015.**

**Sistemas de pulsares: laboratório de RG.**