

Gravidade modificada com o termo de Yukawa

Vitor Petri Silva

Universidade Federal do Espírito Santo

Agosto/2023

Sumário

- 1 Introdução
- 2 Equação de trajetória
- 3 Vetor LRL
- 4 Anomalia excêntrica
- 5 Conclusão

Potencial de Yukawa

Seguindo a hipótese de Yukawa, consideramos que a interação gravitacional possui um méson de comunicação, o graviton.

$$\begin{aligned}\nabla^2 V(r) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} V(r) &= bV(r), \\ \nabla^2 V(r) &= bV(r), \\ V(r) &= \frac{ke^{-br}}{r},\end{aligned}\tag{1}$$

onde $k = GM$ e

$$b = \frac{m_g c}{\hbar}.$$

Potencial efetivo

Podemos comparar o potencial efetivo de (1) com o de Newton,

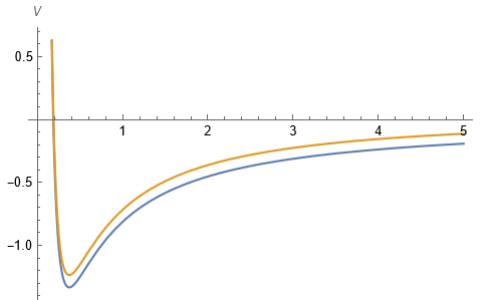


Figura: Potencial efetivo, newtoniano (Azul), com o termo de Yukawa (laranja). Mesmos valores usados anteriormente, com $b = 0.1$.

Equação de trajetória

Seguindo [Fabris et al., 2021], pelo fato de (1) ser um potencial conservativo, podemos calcular sua lei de força

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V,$$

$$\vec{F}(r) = -\frac{ke^{-br}}{r^2}(br + 1)\hat{r}. \quad (2)$$

Igualando a 2ª lei de Newton, encontramos uma EDO para a trajetória

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{GMe^{-br}}{r^2}(br + 1) + \frac{l^2}{r^3}, \quad (3)$$

onde l é o momento angular por unidade de massa.

Análise numérica

Utilizando uma solução numérica, temos o gráfico.

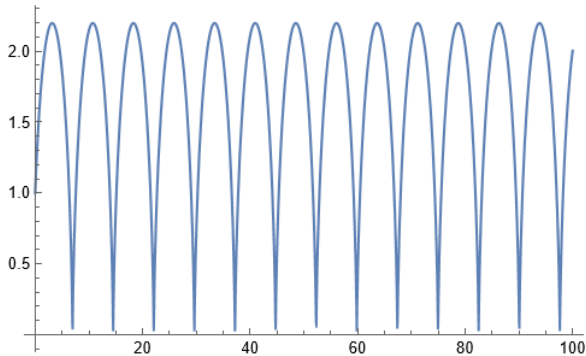


Figura: Solução numérica de (3). Eixos fora de escala. $b = 0.02GM$.

Vetor de Laplace-Runge-Lenz

O vetor é uma constante de movimento

$$\vec{a} = \frac{\vec{A}}{m^2} = \vec{\pi} \times \vec{l} - \frac{k}{r} \vec{r}, \quad (4)$$

onde $\vec{\pi}$ é o momento linear por unidade de massa. Fazendo produto interno com \vec{r} , temos

$$\vec{a} \cdot \vec{r} = ar \cos(\theta) = \vec{r} \cdot (\vec{\pi} \times \vec{l}) - kr,$$

$$\frac{1}{r(\theta)} = \frac{k}{l^2} \left(1 + \frac{a}{k} \cos(\theta) \right); e = \frac{a}{k} = \sqrt{1 + \frac{2\epsilon l^2}{k^2}}$$

Generalização

Podemos reescrever (4) como,

$$\vec{a} = \left(\frac{l^2}{r^2} - r \frac{dV}{dr} \right) \vec{r} - r \dot{r} \vec{r}_\perp, \quad (5)$$

onde $\vec{r}_\perp = r \hat{\theta} \dot{\theta}$. Seguindo a hipótese de [Batic et al., 2023], podemos generalizar (5) como,

$$\vec{A} = g(r) \vec{r} + r \dot{h}(r) \vec{r}_\perp, \quad (6)$$

onde buscamos $h(r)$ e $g(r)$ a partir de um dado potencial.

Solução

Encontramos $h(r)$ com

$$h''(r) + P(r)h'(r) + Q(r)h(r) = 0, \quad (7)$$

em que

$$P(r) = \frac{4(\varepsilon - V_{eff}) - 3rV'_{eff}}{2r(\varepsilon - V_{eff})}; \quad Q(r) = \frac{l^2 - r^4 \Delta V_{eff}}{2r^4(\varepsilon - V_{eff})}.$$

Com $h(r)$ calculamos $g(r)$ com,

$$g(r) = rV'_{eff}h(r) - 2r(\varepsilon - V_{eff})h'(r), \quad (8)$$

Solução

Com $g(r)$ e $h(r)$ calculamos a norma do vetor LRL com a equação

$$A^2 = r^2 g^2(r) + 2l^2 h^2(r)(\varepsilon - V_{eff}), \quad (9)$$

e com a norma, e a função $g(r)$, resolvemos a equação

$$\frac{A}{r} \cos(\theta) = g(r), \quad (10)$$

para r e assim temos a equação de trajetória $r(\theta)$.

Aplicando o potencial

Para o potencial (1) temos

$$V(r) = -\frac{ke^{-br}}{r}; V_{\text{eff}}(r) = \frac{l^2}{2r^2} - \frac{ke^{-br}}{r}; k = GM. \quad (11)$$

Porém

$$h''(r) + \left[\frac{4\epsilon r^2 + kre^{-br}(1 - 3br) + l^2}{r(2\epsilon r^2 + 2kre^{-br} - l^2)} \right] h'(r) + \left[\frac{kb^2 re^{-br}}{2\epsilon r^2 + 2kre^{-br} - l^2} \right] h(r) = 0,$$

não possui solução.

Método perturbativo

Façamos expansão do exponencial

$$V(r) = -\frac{k}{r} \left(1 - br + \frac{b^2 r^2}{2} - \dots \right),$$

$$V(r) = -\frac{k}{r} + kb - \frac{kb^2 r}{2} + \dots,$$

$$V(r) = V^{(0)} + V^{(1)} + V^{(2)} + \dots$$

A solução será a combinação linear das soluções de cada potencial.

Potencial de Kepler

Para o potencial de Kepler temos

$$V(r) = -\frac{C}{r}; V_{\text{eff}}(r) = \frac{l^2}{2r^2} - \frac{C}{r}; C > 0. \quad (12)$$

Com este potencial, temos

$$h_1(r) = c_1; h_2(r) = \frac{c_2(2Cr - 4l^2)}{(C^2 + 8\epsilon l^2)\sqrt{r(C + 2\epsilon r) - l^2}}.$$

$$g_1(r) = c_1 \left(\frac{C}{r} - \frac{l^2}{r^2} \right); g_2(r) = c_2 \frac{l^2}{r^2} \sqrt{2\epsilon r^2 + 2Cr - l^2}.$$

Potencial de Kepler

Calculamos então a norma

$$a_1^2 = c_1^2(C^2 + 2\epsilon l^2); \quad a_2^2 = c_2^2 l^2(C^2 + 2\epsilon l^2).$$

Temos então as trajetória

$$r_{\pm}^{(1)}(\theta) = \frac{l^2/C}{1 \pm \text{Cos}(\theta)}; \quad r_{\pm}^{(2)}(\theta) = \frac{l^2/C}{1 \pm \text{Sen}(\theta)}.$$

Potencial Constante

Para o potencial constante temos

$$V(r) = C; V_{eff}(r) = \frac{l^2}{2r^2} + C; C > 0. \quad (13)$$

Com este potencial, temos

$$h_1(r) = c_1; h_2(r) = -\frac{c_2}{2(C - \epsilon)\sqrt{l^2 + 2Cr^2 - 2\epsilon r^2}}.$$
$$g_1(r) = -c_1 \frac{l^2}{r^2}; g_2(r) = c_2 \frac{\sqrt{l^2 + 2Cr^2 - 2\epsilon r^2}}{2r^2(C - \epsilon)}. \quad (14)$$

Potencial Constante

Calculamos então a norma

$$a_1^2 = 2c_1^2 l^2 (\varepsilon - C); \quad a_2^2 = c_2^2 \frac{1}{C - \varepsilon}.$$

Temos então as trajetória

$$r_{\pm}^{(1)}(\theta) = \frac{\pm l}{\sqrt{2(\varepsilon - C)} \cos(\theta)}; \quad r_{\pm}^{(2)}(\theta) = \frac{\pm l}{\sqrt{2(C - \varepsilon)} \cos(2\theta)}. \quad (15)$$

Potencial Linear

Para o potencial constante temos

$$V(r) = -Cr; V_{\text{eff}}(r) = \frac{l^2}{2r^2} - Cr; C > 0. \quad (16)$$

É preciso resolver a EDO homogênea de segunda ordem,

$$h''(r) + \left[\frac{4\epsilon r^2 + 7Cr^3 + l^2}{r(2\epsilon r^2 + 2Cr^3 - l^2)} \right] h'(r) + \left[\frac{2Cr}{2\epsilon r^2 + 2Cr^3 - l^2} \right] h(r) = 0 \quad (17)$$

que ainda não conseguimos solucionar.

Potencial de Yukawa

Utilizando o método de [Brouwer & Clemence, 2013], parametrizamos a trajetória com a anomalia excêntrica η .

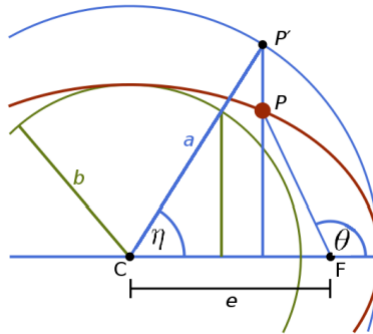


Figura: Demonstração da diferença entre θ e η .

Potencial de Yukawa

Escrevendo a energia por unidade de massa do potencial (1), temos

$$\epsilon = \frac{\dot{r}^2}{2} - \frac{GMe^{-br}}{r} + \frac{l^2}{2r^2}. \quad (18)$$

Utilizando a condição de extremidade, $\dot{r}[a(1 \pm e)] = 0$, temos,

$$\frac{l^2}{GMa(1 - e^2)} = 1 - \frac{b^2 a^2}{2}(1 - e^2) = 1 - H, \quad (19)$$

$$\epsilon = -\frac{GM}{2a} \left[1 - 2ba - \frac{b^2 a^2}{2}(3 + e^2) \right] = -\frac{GM}{2a}(1 - J), \quad (20)$$

em que,

$$H = \frac{b^2 a^2}{2}(1 - e^2); \quad J = 2ba + \frac{b^2 a^2}{2}(3 + e^2).$$

Potencial de Yukawa

Voltando a (10), isolando \dot{r} e aplicando (11) e (12),

$$\sqrt{\frac{GM}{a}} dt = \frac{rdr}{\sqrt{-r^2(1-J) + 2are^{-br} + (a^2e^2 - a^2)(1-H)}} \quad (21)$$

Precisamos então parametrizar $r(\eta)$, para então solucionar (13), tendo $t(\eta)$. Com as duas equações, podemos calcular $\theta(\eta)$.

Perspectivas

- Comparar os dados numéricos com os dados observacionais para determinar os *constraints*.
- Utilizar de *ansatz* para calcular uma solução analítica para (17).
- Determinar a parametrização de $r(\eta)$ com base em fundamentos teóricos além de geométricos.

Agradecimentos



UFES





FUNDAÇÃO DE AMPARO À PESQUISA E INOVAÇÃO DO ESPÍRITO SANTO



Center for Astrophysics and Cosmology

Referências

-  Batic, D., Nowakowski, M., & Abdelhaq, A. M. (2023).
New vistas on the laplace–runge–lenz vector.
Reviews in Physics, 10:100084.
-  Brouwer, D. & Clemence, G. (2013).
Methods of Celestial Mechanics.
Elsevier Science.
-  Fabris, J. C., Toniato, J. D., & Velten, H. (2021).
Gravitação.
Livraria da Física.