

Equações diferenciais como *toy models* de teorias $f(R)$ inflacionárias

Aluno: Pedro Inácio de Carvalho Pereira Lacerda

Orientador(a): Prof Sergio Eduardo de Carvalho Eyer Jorás

Matilde, ES, Agosto de 2023



UF *m* G

Estrutura do Seminário

- 1 Introdução
- 2 Equação diferencial como *toy model*
- 3 Conclusão

Uma formulação lagrangiana

- A peça central da relatividade geral são as equações de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (1)$$

Assim como o Eletromagnetismo e a Mecânica Clássica, a Relatividade Geral (i.e, as equações de Einstein) pode ser obtida a partir de uma formulação Lagrangiana:

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int_V \mathcal{L}_g \sqrt{-g} d^4x + S_M \quad (2)$$

sendo $\mathcal{L}_g \equiv R - 2\Lambda$.

Uma formulação lagrangiana

- A peça central da relatividade geral são as equações de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (1)$$

Assim como o Eletromagnetismo e a Mecânica Clássica, a Relatividade Geral (i.e, as equações de Einstein) pode ser obtida a partir de uma formulação Lagrangiana:

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int_V \mathcal{L}_g \sqrt{-g} d^4x + S_M \quad (2)$$

sendo $\mathcal{L}_g \equiv R - 2\Lambda$.

Uma formulação lagrangiana

- A peça central da relatividade geral são as equações de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (1)$$

Assim como o Eletromagnetismo e a Mecânica Clássica, a Relatividade Geral (i.e, as equações de Einstein) pode ser obtida a partir de uma formulação Lagrangiana:

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int_V \mathcal{L}_g \sqrt{-g} d^4x + S_M \quad (2)$$

sendo $\mathcal{L}_g \equiv R - 2\Lambda$.

Uma formulação lagrangiana

- A peça central da relatividade geral são as equações de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (1)$$

Assim como o Eletromagnetismo e a Mecânica Clássica, a Relatividade Geral (i.e, as equações de Einstein) pode ser obtida a partir de uma formulação Lagrangiana:

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int_V \mathcal{L}_g \sqrt{-g} d^4x + S_M \quad (2)$$

sendo $\mathcal{L}_g \equiv R - 2\Lambda$.

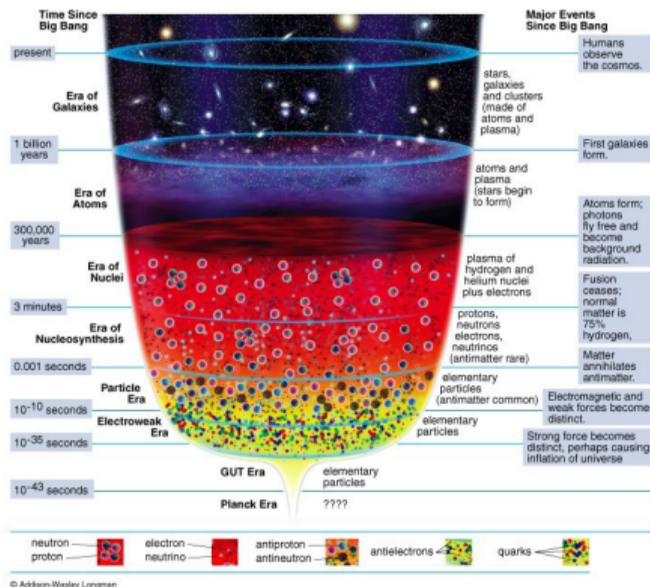
Uma formulação lagrangiana

- Essa formulação produz resultados espetaculares, e é a base da Cosmologia contemporânea.

Figura: Ilustração esquemática da evolução do Universo.

Uma formulação lagrangiana

- Essa formulação produz resultados espetaculares, e é a base da Cosmologia contemporânea.



Pra que $f(R)$?

- Entretanto, a RG tem dificuldades em explicar:
 - Energia escura
 - Renormalização
 - Inflação
- Surgem, então, tentativas de modificar a RG e solucionar alguns desses problemas. Uma classe dessas tentativas é composta pelas teorias $f(R)$.

Pra que $f(R)$?

- Entretanto, a RG tem dificuldades em explicar:
 - Energia escura
 - Renormalização
 - Inflação
- Surgem, então, tentativas de modificar a RG e solucionar alguns desses problemas. Uma classe dessas tentativas é composta pelas teorias $f(R)$.

Pra que $f(R)$?

- Entretanto, a RG tem dificuldades em explicar:
 - Energia escura
 - Renormalização
 - Inflação
- Surgem, então, tentativas de modificar a RG e solucionar alguns desses problemas. Uma classe dessas tentativas é composta pelas teorias $f(R)$.

Pra que $f(R)$?

- Entretanto, a RG tem dificuldades em explicar:
 - Energia escura
 - Renormalização
 - Inflação
- Surgem, então, tentativas de modificar a RG e solucionar alguns desses problemas. Uma classe dessas tentativas é composta pelas teorias $f(R)$.

Pra que $f(R)$?

- Entretanto, a RG tem dificuldades em explicar:
 - Energia escura
 - Renormalização
 - Inflação

- Surgem, então, tentativas de modificar a RG e solucionar alguns desses problemas. Uma classe dessas tentativas é composta pelas teorias $f(R)$.

O que é $f(R)$?

- As teorias $f(R)$ consistem em modificar a RG alterando \mathcal{L}_g .
- Nessas teorias, o escalar de Ricci R é substituído por $\mathcal{L}_g \equiv f(R)$.
 - por exemplo, $f(R) = R + \frac{R^2}{6M^2}$
 - como consequência, teorias $f(R)$ geram equações de campo de 4^ª ordem e não lineares.

O que é $f(R)$?

- As teorias $f(R)$ consistem em modificar a RG alterando \mathcal{L}_g .
- Nessas teorias, o escalar de Ricci R é substituído por $\mathcal{L}_g \equiv f(R)$.
 - por exemplo, $f(R) = R + \frac{R^2}{6M^2}$
 - como consequência, teorias $f(R)$ geram equações de campo de 4^o ordem e não lineares.

O que é $f(R)$?

- As teorias $f(R)$ consistem em modificar a RG alterando \mathcal{L}_g .
- Nessas teorias, o escalar de Ricci R é substituído por $\mathcal{L}_g \equiv f(R)$.
 - por exemplo, $f(R) = R + \frac{R^2}{6M^2}$
 - como consequência, teorias $f(R)$ geram equações de campo de 4^o ordem e não lineares.

O que é $f(R)$?

- As teorias $f(R)$ consistem em modificar a RG alterando \mathcal{L}_g .
- Nessas teorias, o escalar de Ricci R é substituído por $\mathcal{L}_g \equiv f(R)$.
 - por exemplo, $f(R) = R + \frac{R^2}{6M^2}$
 - como consequência, teorias $f(R)$ geram equações de campo de 4ª ordem e não lineares.

Por que $f(R)$?

- Certas renormalizações da RG exigem termos de ordem superior (Utiyama e DeWitt, 1962)
- Certos modelos de gravitação quântica e teoria das cordas admitem termos de ordem superior (Birrell e Davies, 1982; Buchbinder et al., 1992; Vilkovisky, 1992)
- Certos modelos inflacionários, como o de Starobinsky, produzem modificações na lagrangiana usual.

Por que $f(R)$?

- Certas renormalizações da RG exigem termos de ordem superior (Utiyama e DeWitt, 1962)
- Certos modelos de gravitação quântica e teoria das cordas admitem termos de ordem superior (Birrell e Davies, 1982; Buchbinder et al., 1992; Vilkovisky, 1992)
- Certos modelos inflacionários, como o de Starobinsky, produzem modificações na lagrangiana usual.

Por que $f(R)$?

- Certas renormalizações da RG exigem termos de ordem superior (Utiyama e DeWitt, 1962)
- Certos modelos de gravitação quântica e teoria das cordas admitem termos de ordem superior (Birrell e Davies, 1982; Buchbinder et al., 1992; Vilkovisky, 1992)
- Certos modelos inflacionários, como o de Starobinsky, produzem modificações na lagrangiana usual.

Por que $f(R)$?

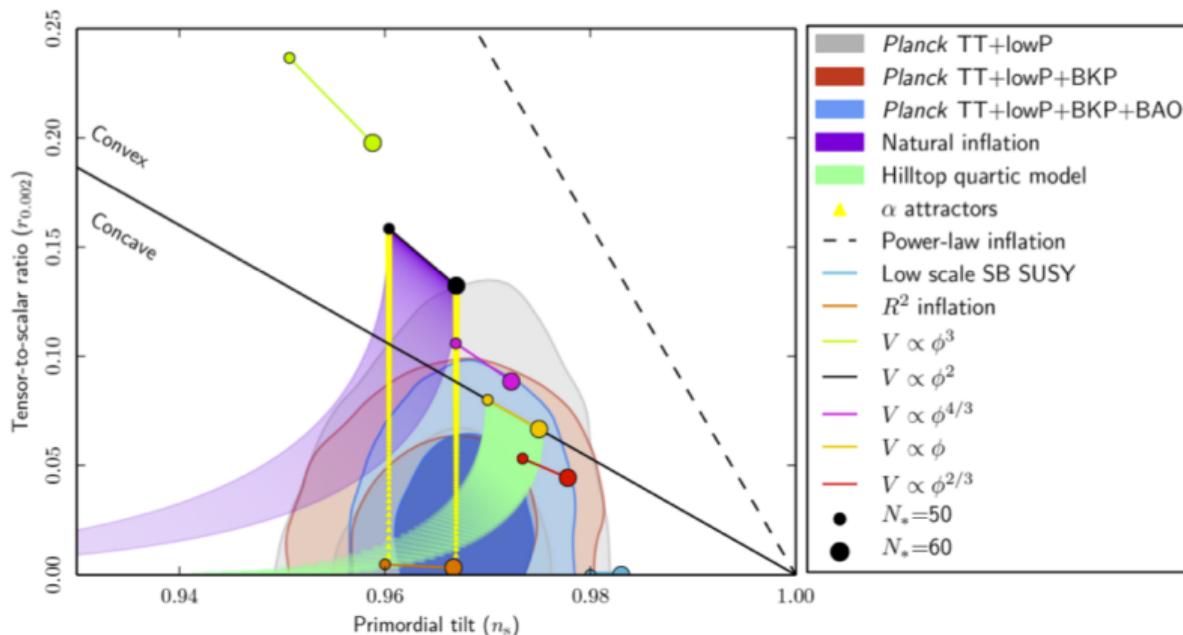


Figura: Fonte: Planck 2015 results. XX. Constraints on inflation, arXiv:1502.02114

Equações de Euler-Lagrange

- Equações não lineares de 4^a ordem são bastante complicadas.
- Entretanto, é possível entender vários de seus comportamentos utilizando *toy models* lineares da Mecânica Clássica.
- Podemos, por exemplo, encontrar uma 'equação do movimento' de 4^a ordem usando as Equações de Euler-Lagrange.

Equações de Euler-Lagrange

- Equações não lineares de 4^a ordem são bastante complicadas.
- Entretanto, é possível entender vários de seus comportamentos utilizando *toy models* lineares da Mecânica Clássica.
- Podemos, por exemplo, encontrar uma 'equação do movimento' de 4^a ordem usando as Equações de Euler-Lagrange.

Equações de Euler-Lagrange

- Equações não lineares de 4^a ordem são bastante complicadas.
- Entretanto, é possível entender vários de seus comportamentos utilizando *toy models* lineares da Mecânica Clássica.
- Podemos, por exemplo, encontrar uma 'equação do movimento' de 4^a ordem usando as Equações de Euler-Lagrange.

Equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \right) = 0 \quad (3)$$

■ Supondo $L = A(a) + T(v) - V(x)$, com $V(x) = \frac{kx^2}{2}$, $T(v) = \frac{mv^2}{2}$ e $A(a) = -\frac{\lambda a^2}{2}$:

$$\lambda \ddot{x} + m \ddot{x} + kx = 0 \quad (4)$$

Equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \right) = 0 \quad (3)$$

- Supondo $L = A(a) + T(v) - V(x)$, com $V(x) = \frac{kx^2}{2}$, $T(v) = \frac{mv^2}{2}$ e $A(a) = -\frac{\lambda a^2}{2}$:

$$\lambda \ddot{x} + m\ddot{x} + kx = 0 \quad (4)$$

Equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \right) = 0 \quad (3)$$

- Supondo $L = A(a) + T(v) - V(x)$, com $V(x) = \frac{kx^2}{2}$, $T(v) = \frac{mv^2}{2}$ e $A(a) = -\frac{\lambda a^2}{2}$:

$$\lambda \ddot{x} + m \ddot{x} + kx = 0 \quad (4)$$

Análise da Equação de Movimento

- Resolvendo a eq. diferencial usando sua equação característica:

$$k + mp^2 + \lambda p^4 = 0 \quad (5)$$

- Encontramos 4 soluções:

$$\left\{ p \rightarrow -\frac{\sqrt{\frac{\sqrt{m^2 - 4k\lambda}}{\lambda} - \frac{m}{\lambda}}}{\sqrt{2}} \right\}, \left\{ p \rightarrow \frac{\sqrt{\frac{\sqrt{m^2 - 4k\lambda}}{\lambda} - \frac{m}{\lambda}}}{\sqrt{2}} \right\}, \left\{ p \rightarrow -\frac{\sqrt{\frac{\sqrt{m^2 - 4k\lambda}}{\lambda} + \frac{m}{\lambda}}}{\sqrt{2}} \right\}, \left\{ p \rightarrow \frac{\sqrt{\frac{\sqrt{m^2 - 4k\lambda}}{\lambda} + \frac{m}{\lambda}}}{\sqrt{2}} \right\}$$

- Por conta do termo $\sqrt{m^2 - 4k\lambda}$, as soluções tem dois comportamentos diferentes dependentes de λ .

Análise da Equação de Movimento

- Resolvendo a eq. diferencial usando sua equação característica:

$$k + mp^2 + \lambda p^4 = 0 \quad (5)$$

- Encontramos 4 soluções:

$$\left\{ p \rightarrow -\frac{\sqrt{-\frac{\sqrt{m^2-4k\lambda}}{\lambda} - \frac{m}{\lambda}}}{\sqrt{2}} \right\}, \left\{ p \rightarrow \frac{\sqrt{-\frac{\sqrt{m^2-4k\lambda}}{\lambda} - \frac{m}{\lambda}}}{\sqrt{2}} \right\}, \left\{ p \rightarrow -\frac{\sqrt{\frac{\sqrt{m^2-4k\lambda}}{\lambda} - \frac{m}{\lambda}}}{\sqrt{2}} \right\}, \left\{ p \rightarrow \frac{\sqrt{\frac{\sqrt{m^2-4k\lambda}}{\lambda} - \frac{m}{\lambda}}}{\sqrt{2}} \right\}$$

- Por conta do termo $\sqrt{m^2 - 4k\lambda}$, as soluções tem dois comportamentos diferentes dependentes de λ .

Análise da Equação de Movimento

- Resolvendo a eq. diferencial usando sua equação característica:

$$k + mp^2 + \lambda p^4 = 0 \quad (5)$$

- Encontramos 4 soluções:

$$\left\{ p \rightarrow -\frac{\sqrt{-\frac{\sqrt{m^2-4k\lambda}}{\lambda} - \frac{m}{\lambda}}}{\sqrt{2}} \right\}, \left\{ p \rightarrow \frac{\sqrt{-\frac{\sqrt{m^2-4k\lambda}}{\lambda} - \frac{m}{\lambda}}}{\sqrt{2}} \right\}, \left\{ p \rightarrow -\frac{\sqrt{\frac{\sqrt{m^2-4k\lambda}}{\lambda} - \frac{m}{\lambda}}}{\sqrt{2}} \right\}, \left\{ p \rightarrow \frac{\sqrt{\frac{\sqrt{m^2-4k\lambda}}{\lambda} - \frac{m}{\lambda}}}{\sqrt{2}} \right\}$$

- Por conta do termo $\sqrt{m^2 - 4k\lambda}$, as soluções tem dois comportamentos diferentes dependentes de λ .

Análise da Equação de Movimento

- Um desses comportamentos, válido para $\lambda < \frac{m^2}{4k}$, produz duas soluções reais de sinal opostos (1 e 2) e duas soluções imaginárias (3 e 4).
- Dessa forma, a parte real da solução é nula, restando apenas as imaginárias. A soma dessas soluções é a solução da eq. diferencial $x(t)$:

$$x(t) = C_1 \cosh \left(i\theta + \frac{t\sqrt{-\frac{m+\sqrt{m^2-4k\lambda}}{\lambda}}}{\sqrt{2}} \right) + C_2 \cos \left(\frac{it\sqrt{-\frac{m+\sqrt{m^2-4k\lambda}}{\lambda}}}{\sqrt{2}} + \psi \right) \quad (6)$$

Análise da Equação de Movimento

- Um desses comportamentos, válido para $\lambda < \frac{m^2}{4k}$, produz duas soluções reais de sinal opostos (1 e 2) e duas soluções imaginárias (3 e 4).
- Dessa forma, a parte real da solução é nula, restando apenas as imaginárias. A soma dessas soluções é a solução da **eq. diferencial** $x(t)$:

$$x(t) = C_1 \cosh \left(i\theta + \frac{t\sqrt{-\frac{m+\sqrt{m^2-4k\lambda}}{\lambda}}}{\sqrt{2}} \right) + C_2 \cos \left(\frac{it\sqrt{-\frac{m+\sqrt{m^2-4k\lambda}}{\lambda}}}{\sqrt{2}} + \psi \right) \quad (6)$$

Análise da Equação de Movimento

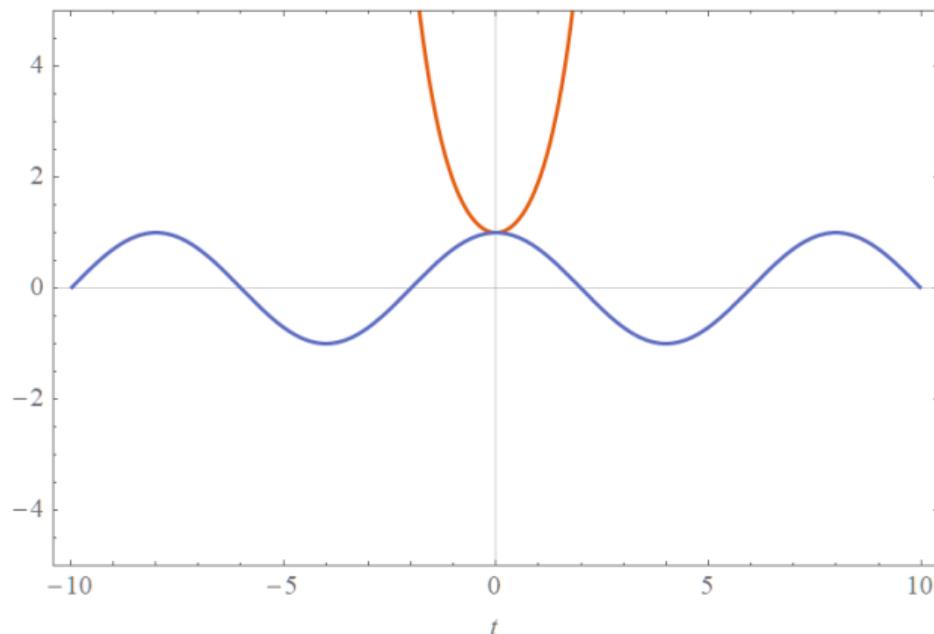


Figura: Exemplo de evolução temporal das duas soluções da equação diferencial. Em vermelho, o primeiro termo e em azul, o segundo.

Análise da Equação de Movimento

- A solução do tipo cosseno possui frequência $w = \frac{\sqrt{-\frac{\sqrt{m^2 - 4k\lambda} - m}{\lambda}}}{\sqrt{2}}$. Podemos comparar essa frequência com a de um oscilador harmônico convencional de frequência $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

- Fazendo a substituição $\lambda \rightarrow \frac{\alpha m^2}{4k}$, e expandindo em termos de α , temos:

$$\omega + \frac{\lambda \omega^3}{2m} + \frac{7\lambda^2 \omega^5}{8m^2} + O[\alpha]^3 \quad (7)$$

- Em ordem zero, a frequência de oscilação é idêntica!

Análise da Equação de Movimento

- A solução do tipo cosseno possui frequência $w = \frac{\sqrt{-\frac{\sqrt{m^2 - 4k\lambda} - m}{\lambda}}}{\sqrt{2}}$. Podemos comparar essa frequência com a de um oscilador harmônico convencional de frequência $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

- Fazendo a substituição $\lambda \rightarrow \frac{\alpha m^2}{4k}$, e expandindo em termos de α , temos:

$$\omega + \frac{\lambda\omega^3}{2m} + \frac{7\lambda^2\omega^5}{8m^2} + O[\alpha]^3 \quad (7)$$

- Em ordem zero, a frequência de oscilação é idêntica!

Análise da Equação de Movimento

- A solução do tipo cosseno possui frequência $w = \frac{\sqrt{-\frac{\sqrt{m^2 - 4k\lambda} - m}{\lambda}}}{\sqrt{2}}$. Podemos comparar essa frequência com a de um oscilador harmônico convencional de frequência $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

- Fazendo a substituição $\lambda \rightarrow \frac{\alpha m^2}{4k}$, e expandindo em termos de α , temos:

$$\omega + \frac{\lambda\omega^3}{2m} + \frac{7\lambda^2\omega^5}{8m^2} + O[\alpha]^3 \quad (7)$$

- Em ordem zero, a frequência de oscilação é idêntica!

Análise da Equação de Movimento

- Podemos também comparar a frequência de oscilação da eq. diferencial completa.
- Para isso, é necessário zerar o coeficiente C_1 da eq. divergente a partir de condições iniciais.
 - Não foi possível zerar esse coeficiente de maneira analítica.
- Usando $x_0 \rightarrow 0, v_0 \rightarrow 1, a_0 \rightarrow 0$, obteve-se uma solução numérica para os coeficientes θ e ψ , e uma solução dependente de m, k e λ para C_2 .

Análise da Equação de Movimento

- Podemos também comparar a frequência de oscilação da eq. diferencial completa.
- Para isso, é necessário zerar o coeficiente C_1 da eq. divergente a partir de condições iniciais.
 - Não foi possível zerar esse coeficiente de maneira analítica.
- Usando $x_0 \rightarrow 0$, $v_0 \rightarrow 1$, $a_0 \rightarrow 0$, obteve-se uma solução numérica para os coeficientes θ e ψ , e uma solução dependente de m , k e λ para C_2 .

Análise da Equação de Movimento

- Podemos também comparar a frequência de oscilação da eq. diferencial completa.
- Para isso, é necessário zerar o coeficiente C_1 da eq. divergente a partir de condições iniciais.
 - Não foi possível zerar esse coeficiente de maneira analítica.
- Usando $x_0 \rightarrow 0, v_0 \rightarrow 1, a_0 \rightarrow 0$, obteve-se uma solução numérica para os coeficientes θ e ψ , e uma solução dependente de m, k e λ para C_2 .

Análise da Equação de Movimento

- Podemos também comparar a frequência de oscilação da eq. diferencial completa.
- Para isso, é necessário zerar o coeficiente C_1 da eq. divergente a partir de condições iniciais.
 - Não foi possível zerar esse coeficiente de maneira analítica.
- Usando $x_0 \rightarrow 0$, $v_0 \rightarrow 1$, $a_0 \rightarrow 0$, obteve-se uma solução numérica para os coeficientes θ e ψ , e uma solução dependente de m , k e λ para C_2 .

Análise da Equação de Movimento

- Escolhendo $\lambda = 0.1$, $m = 1$ e $k = 1$, tem-se um *jerk* inicial $j_0 = -1.12702$, capaz de zerar $C1$.
- Esse j_0 é o mesmo que seria obtido por um oscilador harmônico convencional de frequência w sob as mesmas condições iniciais!
 - $\frac{da(t)}{dt} = \frac{d(-w^2x(t))}{dt} = -w^2$

Análise da Equação de Movimento

- Escolhendo $\lambda = 0.1$, $m = 1$ e $k = 1$, tem-se um *jerk* inicial $j_0 = -1.12702$, capaz de zerar $C1$.
- Esse j_0 é o mesmo que seria obtido por um oscilador harmônico convencional de frequência w sob as mesmas condições iniciais!
 - $\frac{da(t)}{dt} = \frac{d(-w^2x(t))}{dt} = -w^2$

Análise da Equação de Movimento

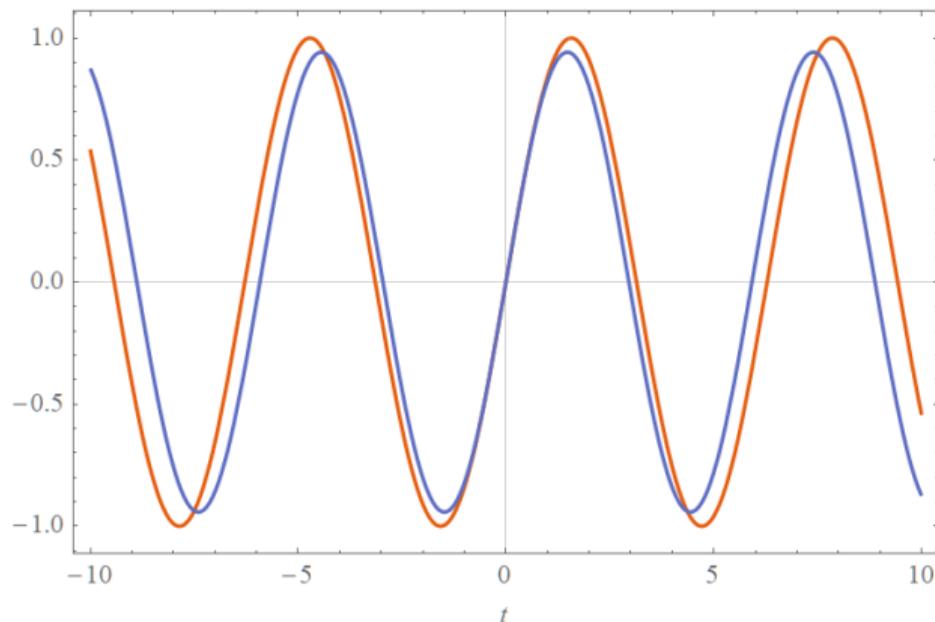


Figura: Curvas de um oscilador harmônico convencional (em vermelho) e o oscilador harmônico obtido zerando o coeficiente C_1 (em azul).

Em breve..

- Se $\lambda > \frac{m^2}{4k}$, as soluções da eq. característica se modificam.
- Nesse caso, tem-se dois pares de complexos conjugados, e as soluções da eq. diferencial são osciladores amortecidos!
- Mas isso é uma história para outro dia..

Em breve..

- Se $\lambda > \frac{m^2}{4k}$, as soluções da eq. característica se modificam.
- Nesse caso, tem-se dois pares de complexos conjugados, e as soluções da eq. diferencial são osciladores amortecidos!
- Mas isso é uma história para outro dia..

Em breve..

- Se $\lambda > \frac{m^2}{4k}$, as soluções da eq. característica se modificam.
- Nesse caso, tem-se dois pares de complexos conjugados, e as soluções da eq. diferencial são osciladores amortecidos!
- Mas isso é uma história para outro dia..

Conclusão

OBRIGADO!

Referências

- ▶ Thomas P. Sotiriou and Valerio Faraoni, " $f(R)$ theories of gravity" arXiv:0805.1726 [gr-qc], 2010
- ▶ Antonio De Felice and Shinji Tsujikawa, " $f(R)$ Theories", arXiv:1002.4928 [gr-qc], 2010