

Equação de Boltzmann e RCF

Wiliam Santiago Hipólito Ricaldi

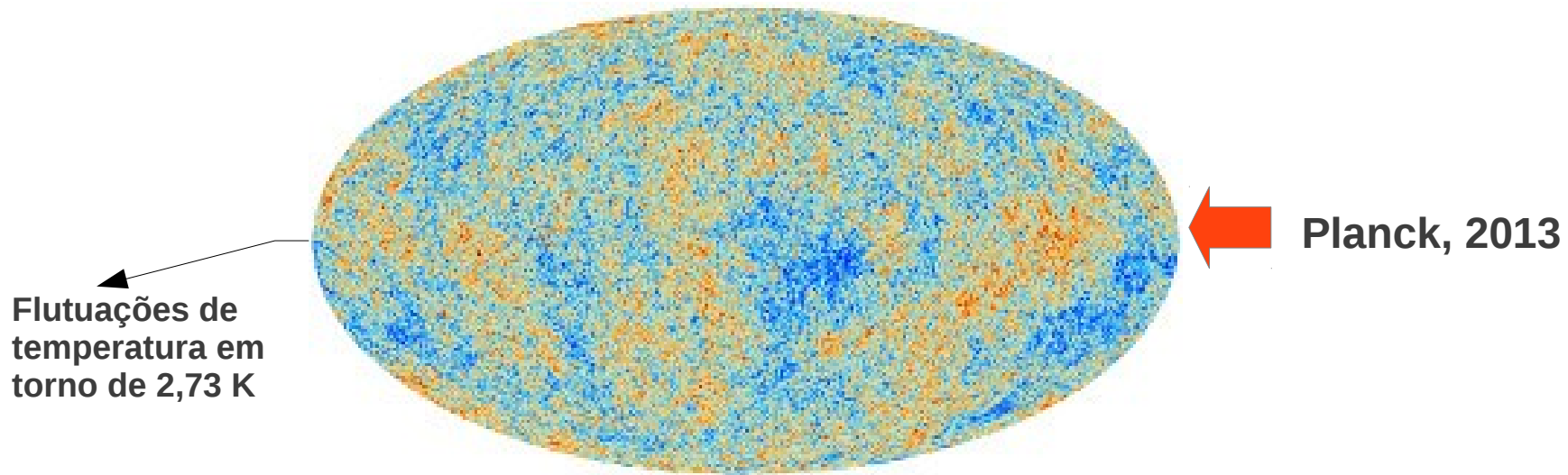
Departamento de Ciências Naturais,

Universidade Federal do Espírito Santo

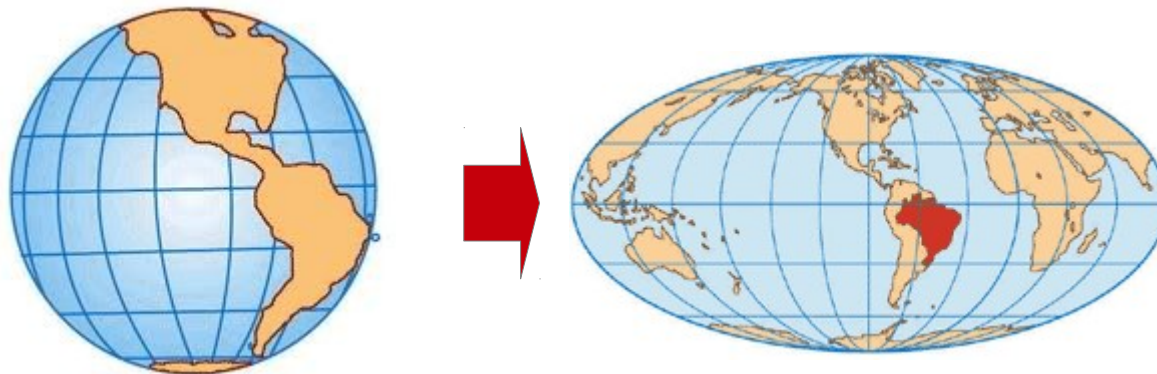
Campus-São Mateus

Como são apresentados os resultados da RCF?

RCF = Fótons que vêm desde os primórdios do Universo



Projeção de Mollweide

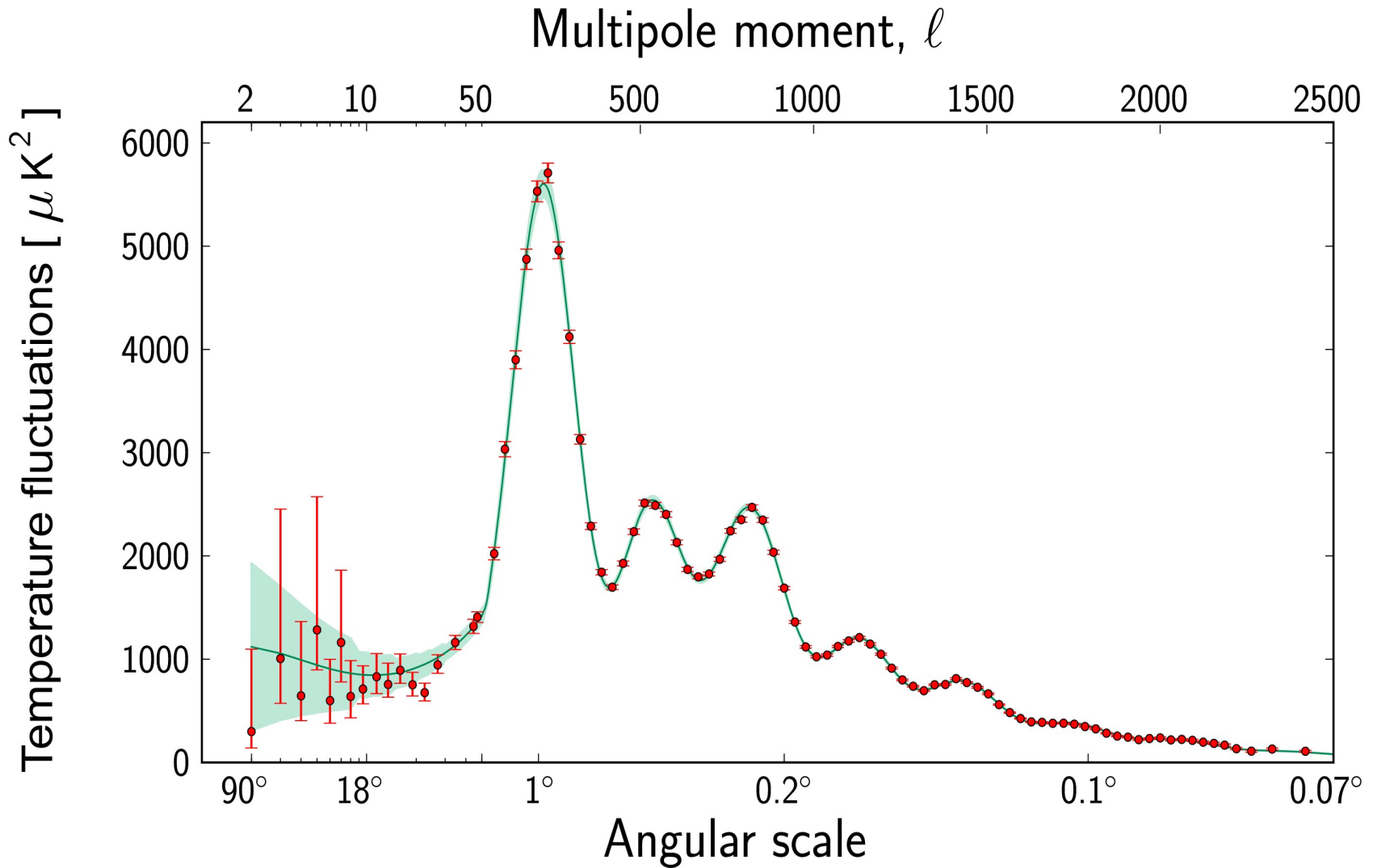


-) Fótons vindo de todas direções do céu

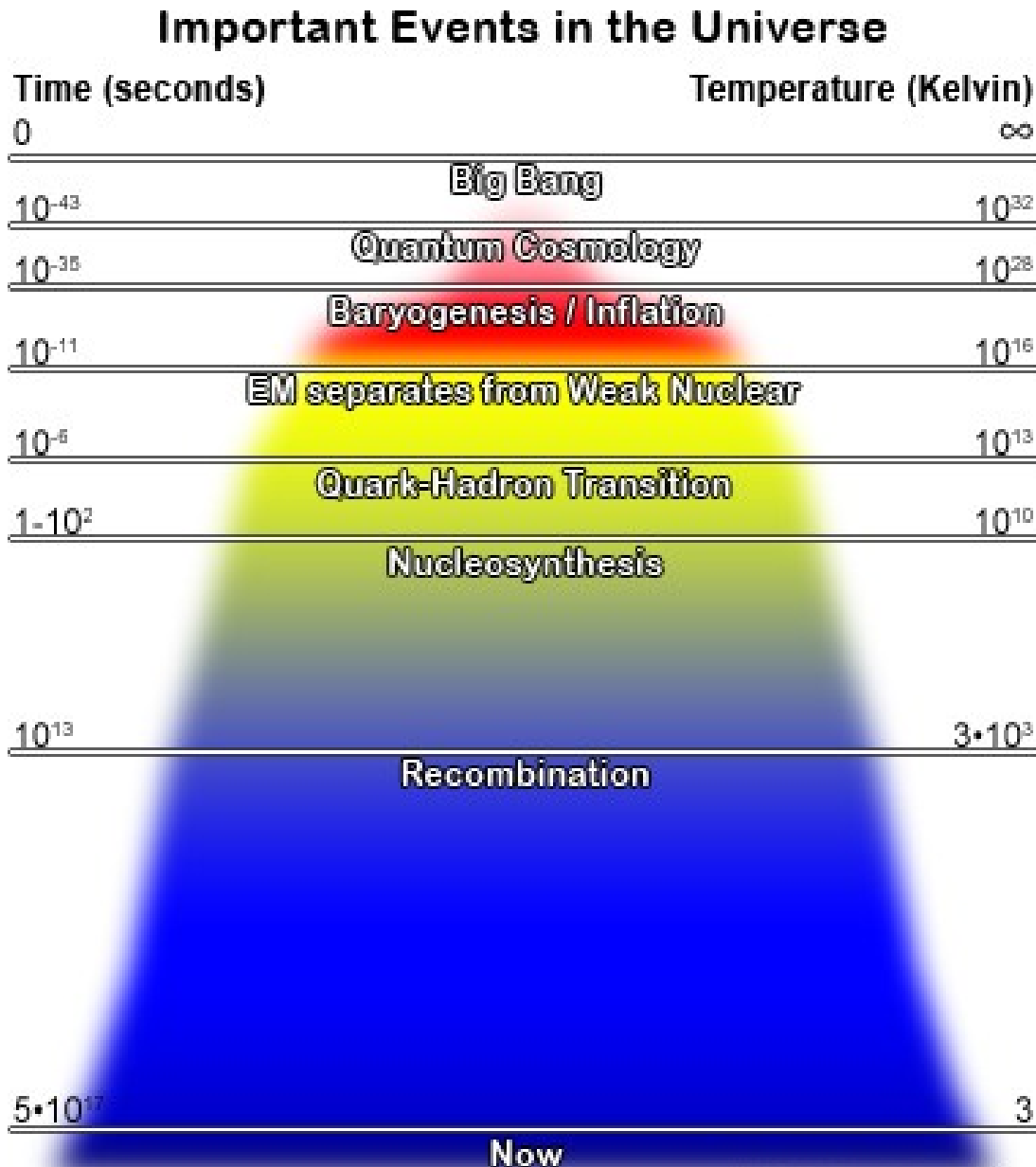
-) A temperaturas são, ligeiramente diferentes a cada direção. Diferenças da ordem de micro K.

-) A temperatura média dos fótons é 2.73 K

Espectro de Potência da RCF - C_l



História dos fótons I



$$T \propto \frac{1}{a}$$

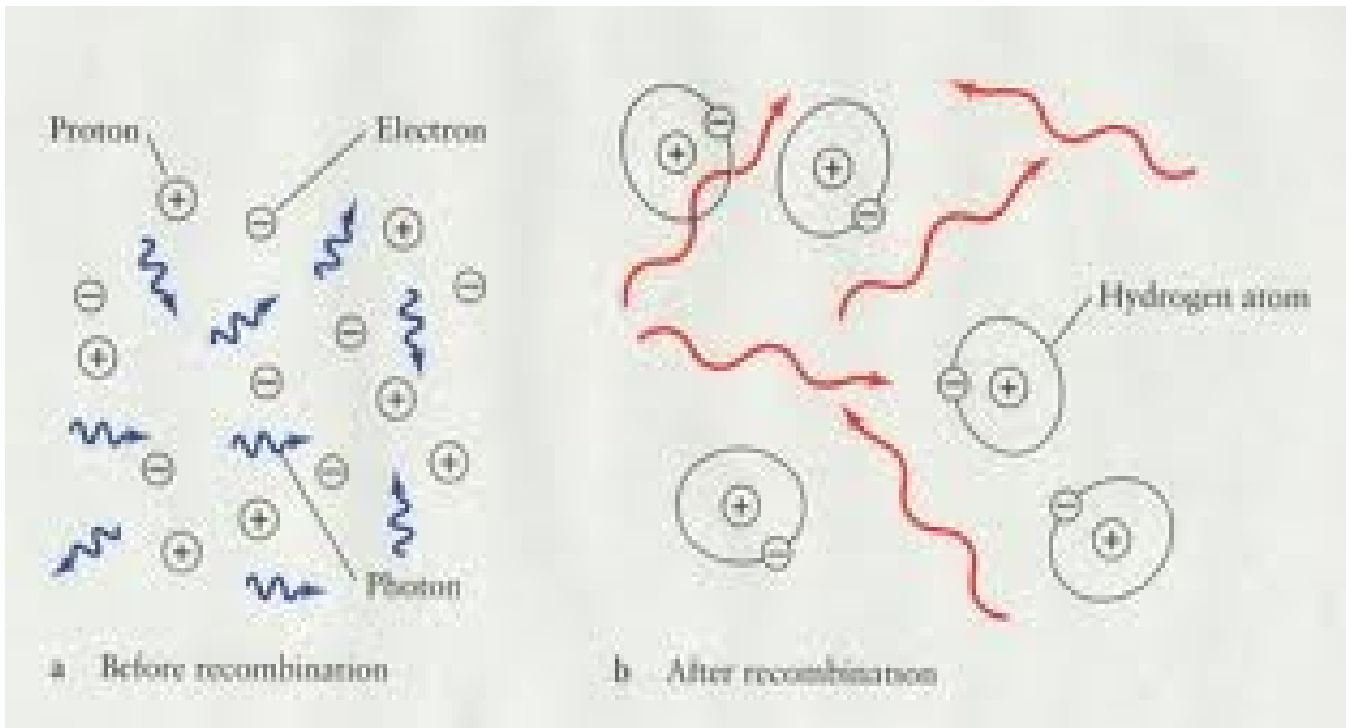


Fótons interagem com os bárions

História dos fótons II – Era da recombinação

Espalhamento Compton

$$e^{-}(q') + \gamma(p') \longrightarrow e^{-}(q) + \gamma(p)$$

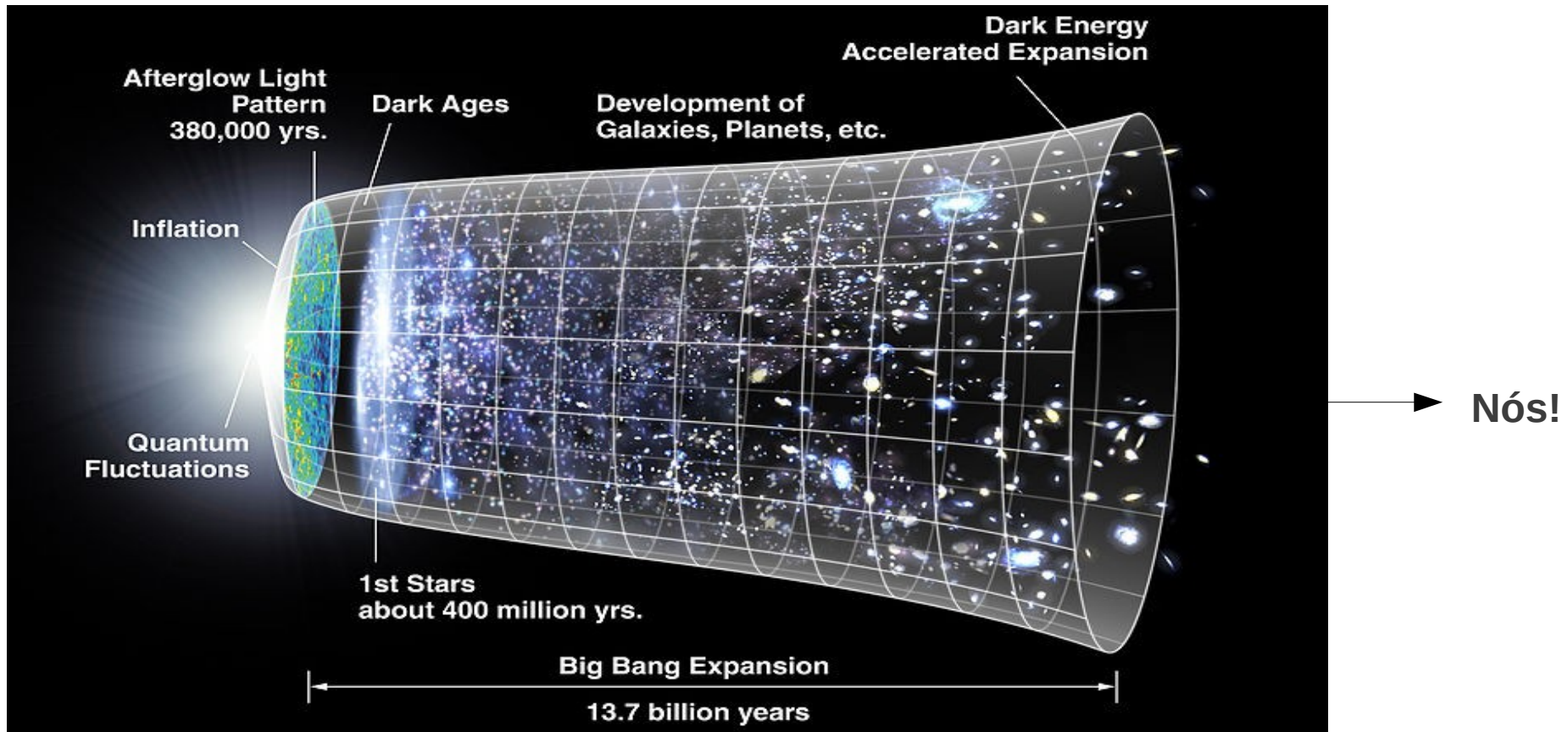


Superfície de último Espalhamento (SUE)



Região na qual os Fótons começaram viajar livremente (RCF)

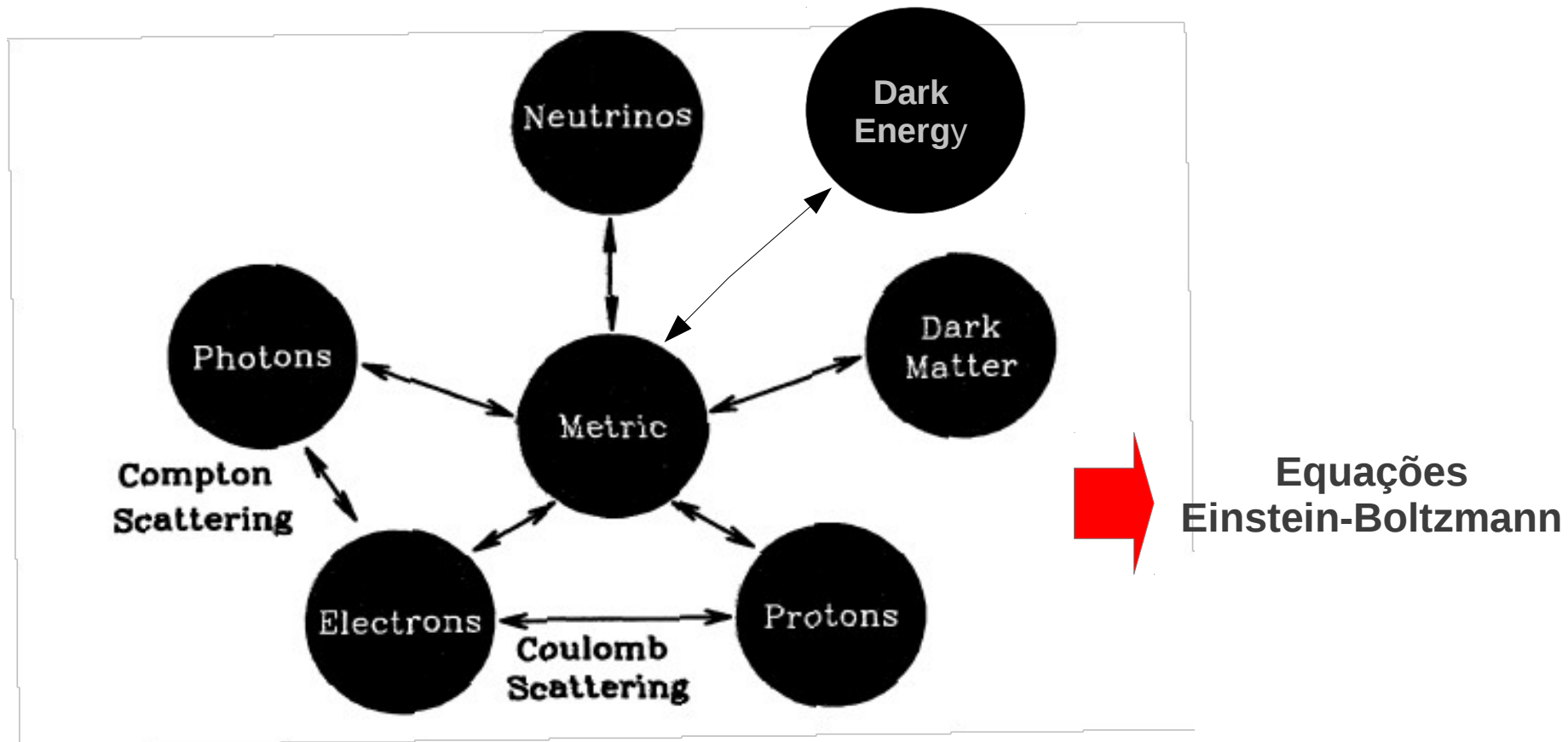
História dos fótons III – Após recombinação



Para estudar a RCF temos que reconstruir toda a história dos fótons!

Reconstrução da História dos Fótons

Universo = fótons+ bárions + matéria escura + energia escura + neutrinos



Equações Einstein - Boltzmann

Equações de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

~~(Equações de Conservação:)~~

~~$$T_{;\nu}^{\mu\nu} = 0$$~~

Equação de Boltzmann:

$$\frac{d}{dt} f(x, p) = C[f(x, p)]$$

Função de distribuição

Termo de colisões

Eq. conserv e
Eq Boltzmann são
Equivalentes quando
É conhecido a natureza
Microscopica da
Interação.

Dado um sistema de
Partículas, ela vai possuir um
Função de distribuição que vai
Caracterizar o sistema.
Pode ser aplicado para todas
As componentes do universo

O termo de colisões vai
Depender do tipo de
Interação e ela estão incluído
todos os processos que sofre
 $f(x, p) dx dp$

(número de partículas Na p
x em um elemento De volun
Com um momento entre p e

Equação de Boltzmann para o Fóton

O lado esquerdo é escrito em função das derivadas parciais em relação às variáveis $x = (\eta, x^i)$ e ao seu momento conjugado $p = (\omega, p^i)$

$$\frac{df}{d\eta} = \frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{dx^i}{d\eta} \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{d\omega}{d\eta} \frac{\partial f}{\partial \omega} + \frac{dn^i}{d\eta} \frac{\partial f}{\partial n^i}, \quad (5.2)$$

Evolução do momento via eq. geodésica $p^2 = 0$

$$\frac{dp^\nu}{d\lambda} + \Gamma^\nu_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta = 0,$$

Métrica perturbada

$$g_{\mu\nu} = -a^2(\eta)[\gamma_{\mu\nu} - h_{\mu\nu}]$$



Perturbação da métrica

$$\gamma_{00} = -1,$$

$$\gamma_{0i} = \gamma_{i0} = 0,$$

$$\gamma_{ij} = \left(1 + \frac{K}{4}(x^2 + y^2 + z^2)\right)^{-2} \delta_{ij}$$

$$K = 0, \pm 1$$

Equação de Boltzmann para o Fóton

$$\frac{1}{\omega} \frac{d\omega}{d\eta} = -\frac{a'}{a} - \frac{1}{2} h_{00,i} n^i + h'_{0i} n^i - \frac{1}{2} h'_{ij} n^i n^j,$$

onde ' indica derivada total com respeito ao tempo conforme.

Expandindo:

$$f(x, p) = f_0(\eta, \omega) + f_1(x, p)$$

$$C[f(x, p)] = C_0[f(x, p)] + C_1[f(x, p)]$$

Ordem 0

$$\frac{\partial f_0}{\partial \eta} - \omega \frac{a'}{a} \frac{\partial f_0}{\partial \omega} = a C_0[f(x, p)]$$

**Primeira
Ordem:**

$$\frac{\partial f_1}{\partial \eta} + n^i \frac{\partial f_1}{\partial x^i} - \left(\frac{1}{2} h_{00,i} n^i - h'_{0i} n^i + \frac{1}{2} h'_{ij} n^i n^j \right) \omega \frac{\partial f_0}{\partial \omega} = a C_1[f(x, p)]$$

Equação de Boltzmann (desprezando o termo de colisões)

Em ordem 0:

$$f_0 = \frac{1}{e^{\omega/T_e} - 1} \quad T \propto \frac{1}{a}$$



$$f_1(x, p) = -\omega \frac{\partial f_0}{\partial \omega} T(\vec{x}, \eta, n^i).$$

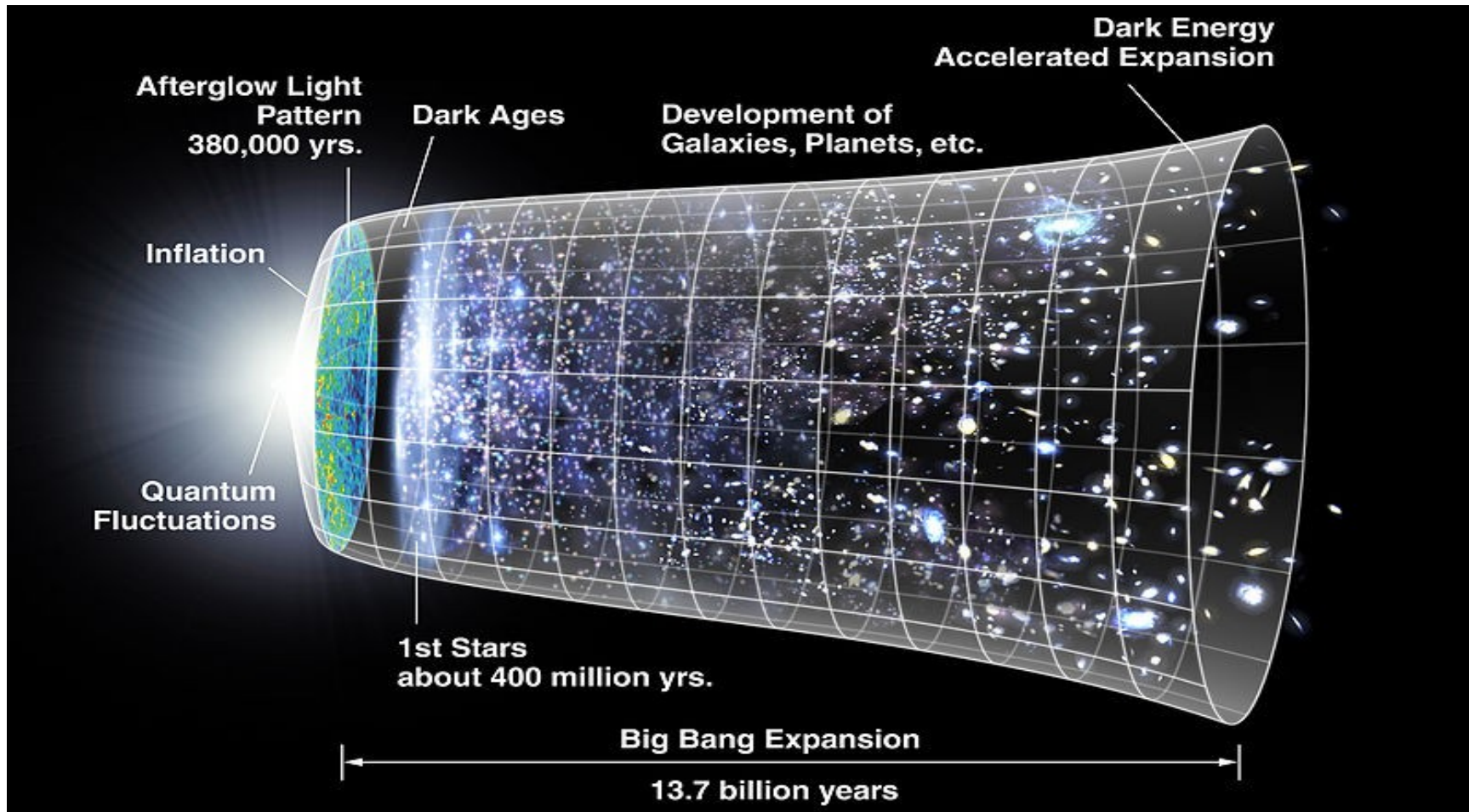
A função T indica as flutuações de temperatura da RCF em torno de T_0 .

$$\frac{\partial T}{\partial \eta} + n^i \frac{\partial T}{\partial x^i} = -\frac{1}{2} h_{00,i} n^i + h'_{0i} n^i - \frac{1}{2} h'_{ij} n^i n^j$$

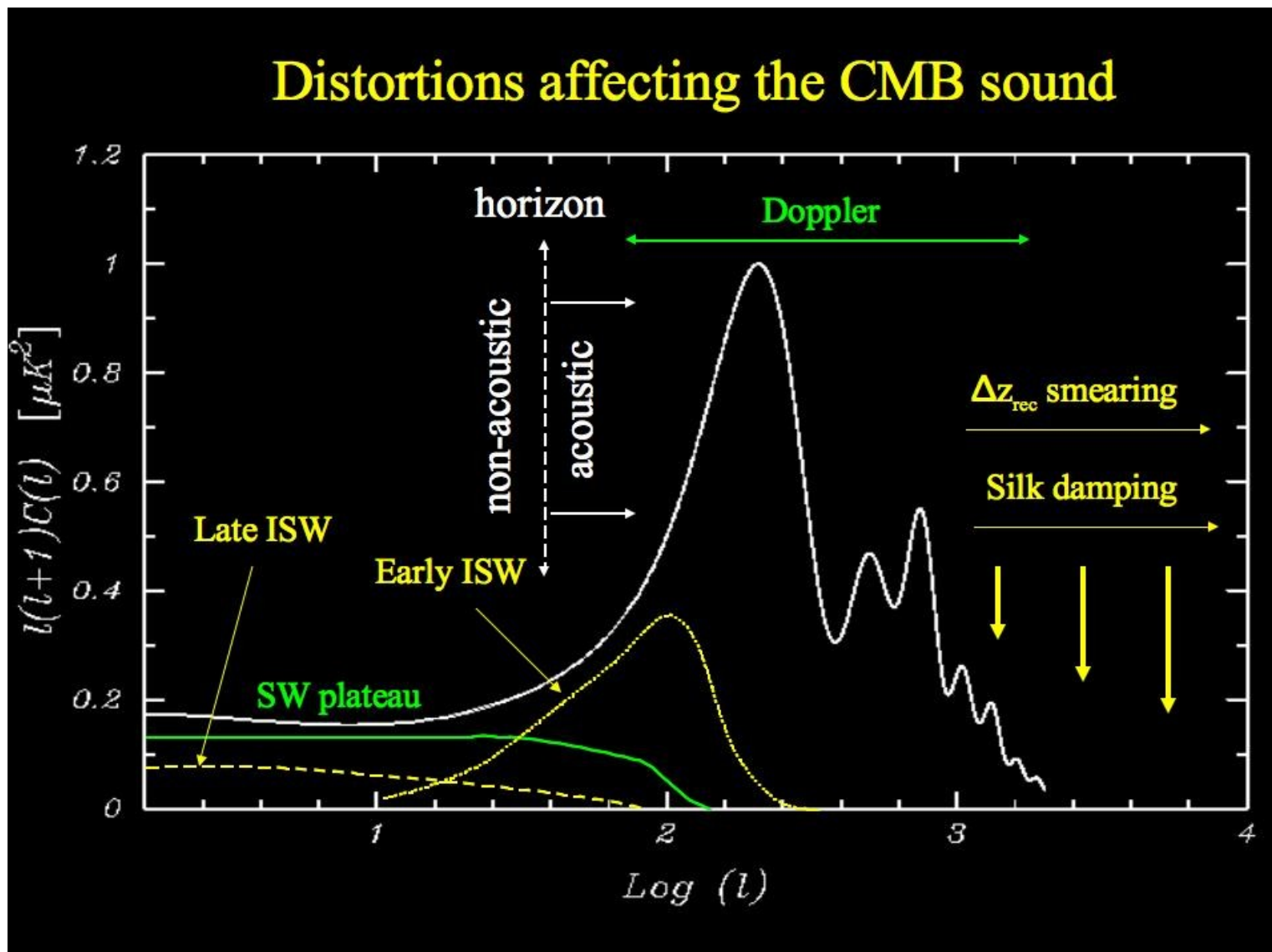
Efeito Sachs Wolfe Ordinário

Efeito Sachs Wolfe Integrado (escalares, Vetoriais e tensoriais)

Efeito Sachs-Wolfe Ordinário e Integrado



Efeito Sachs-Wolfe Ordinário e Integrado



Equação de Boltzmann com o Termo de Colisões

Espalhamento Compton: $e^-(q') + \gamma(p') \longrightarrow e^-(q) + \gamma(p)$

Se $p = (\omega, \vec{p})$, $q = (E_q, \vec{q})$, $p' = (\omega', \vec{p}')$ e $q' = (E_{q'}, \vec{q}')$

$$C[f(x, p)] = \frac{1}{\omega} \int \frac{d^3\vec{p}'}{(2\pi)^3 2\omega'} \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3 2E_q} \int \frac{d^3\vec{q}'}{(2\pi)^3 2E_{q'}} (2\pi)^4 \times \\ \delta(p + q - p' - q') \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 [g(q')f(p') - g(q)f(p)].$$

Amplitude de
espalhamento

Função de
distribuição
dos elétrons.

Função de distribuição
dos fótons.

$$|\mathcal{M}|^2 = 8\pi\sigma_T m_e [1 + \cos(n^i \cdot n'_i)] |\hat{\epsilon} \cdot \hat{\epsilon}'|^2$$

$$|\mathcal{M}|^2 \approx 8\pi\sigma_T m_e$$

Seção de choque do espalhamento
Thomson

Equação de Boltzmann com o Termo de Colisões

Função de distribuição para os eletrons:

$$g(t, \mathbf{x}, \mathbf{q}) = (2\pi)^3 x_e n_e (2\pi m_e T_e)^{-3/2} \exp \left\{ \frac{-[\mathbf{q} - m_e \mathbf{v}_b]^2}{2m_e T_e} \right\}$$



$$f(x, p) = f_0(\eta, \omega) + f_1(x, p)$$

$$C[f(x, p)] = \frac{An_e}{\pi^2 m^2 \omega} \int \frac{d^3 \vec{p}'}{\omega'} [\delta(\omega - \omega') (f_1(\eta, \vec{x}, \vec{p}') - f_1(\eta, \vec{x}, \vec{p})) + (\vec{p} - \vec{p}') \cdot \vec{v}_b \frac{\partial}{\partial \omega'} \delta(\omega - \omega') (f_0(\omega') - f_0(\omega))] ,$$

➡ $C_0[f(x, p)] = 0$



$$C[f(x, p)] = \frac{An_e}{\pi^2 m^2 \omega} \int d\omega' \omega' [\delta(\omega - \omega') \left(-p' \frac{\partial f_0}{\partial p'} T_0(\eta, \vec{x}) + p \frac{\partial f_0}{\partial p} T(\eta, \vec{x}, n^i) \right) + \frac{\partial}{\partial \omega'} \delta(\omega - \omega') (f_0(\omega') - f_0(\omega)) \int \frac{\Omega'}{4\pi} (\vec{p} - \vec{p}') \cdot \vec{v}_b]$$

Termo dipolar ➡

$$T_0(\vec{x}, \eta) = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega T(n^i, \vec{x}, \eta)$$

Equação de Boltzmann com o Termo de Colisões

Finalmente o termo de colisões é:

$$C[f(x, p)] = -pa \frac{\partial f_0}{\partial p} n_e \sigma_T [T_0(\eta, \vec{x}) - T(\eta, \vec{x}, n^i) + n^i \cdot \vec{v}_b]$$

Lembrando que

$$\frac{\partial f_1}{\partial \eta} + n^i \frac{\partial f_1}{\partial x^i} - \left(\frac{1}{2} h_{00,i} n^i - h'_{0i} n^i + \frac{1}{2} h'_{ij} n^i n^j \right) \omega \frac{\partial f_0}{\partial \omega} = a C_1[f(x, p)]$$

e

$$f_1(x, p) = -\omega \frac{\partial f_0}{\partial \omega} T(\vec{x}, \eta, n^i)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \eta} + n^i \frac{\partial T}{\partial x^i} = -\frac{1}{2} h_{00,i} n^i + h'_{0i} n^i - \frac{1}{2} h'_{ij} n^i n^j + a n_e \sigma_T \left(\frac{1}{4} \delta \epsilon_b - T + n^i v_i^b \right)$$

Equação das
flutuações
de temperatura
da RCF

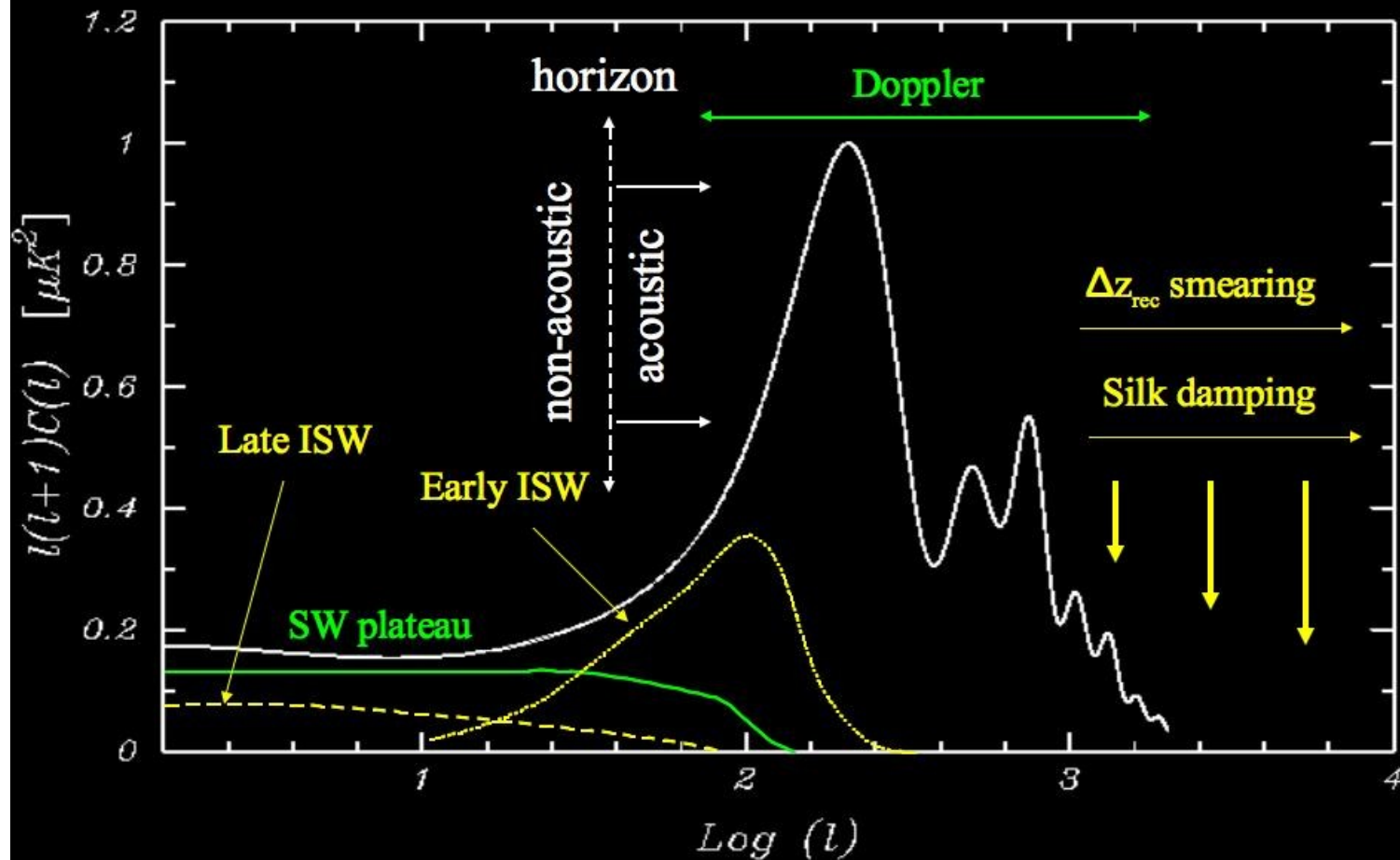
Pode ser mostrado:

$$\frac{1}{4} \delta \epsilon_b = \int d\Omega T(n^i, \vec{x}, \eta)$$

Picos acústicos

Anisotropias Primárias da RCF

Distortions affecting the CMB sound



Equação de Boltzmann no Gauge Longitudinal

$$ds^2 = a^2(\eta) \left((1 + 2\Phi)d^2\eta - (1 - 2\Psi)\gamma_{ij}dx^i dx^j \right)$$



$$\frac{\partial T}{\partial \eta} + n^i \frac{\partial T}{\partial x^i} - \tau' T = \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} n^i - \Phi' - \tau' \left(\frac{1}{4} \delta \epsilon_b + n^i v_i^b \right)$$

$$\tau(\eta) = \int_{\eta}^{\eta_0} d\eta n_e \sigma_{T\gamma} \longrightarrow \text{Profundidade ótica (parâmetro do LCDM)}$$

Atualmente: $\tau \ll 1$

No passado: $\tau \gg 1$

Função de visibilidade:
(Mede a duração da era
da recombinação)

$$g(\eta) = -\dot{\tau} e^{-\tau}$$

$$\mu = \frac{k_i \cdot n^i}{k}$$

No espaço de Fourier:

$$\tilde{T}' + ik\mu\tilde{T} - \tau'\tilde{T} = ik\mu\tilde{\Phi} - \tilde{\Phi}' - \tau' \left(\frac{1}{4} \tilde{\delta}_b + ik\mu\tilde{v}_b \right)$$

Equação de Boltzmann para Matéria Escura

$$\frac{df_{dm}}{dt} = C[f(x, p)] \quad p^2 = -m^2 \quad C[f(x, p)] = 0$$

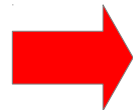
$$\frac{\partial f_{dm}}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i p}{a E} \frac{\partial f_{dm}}{\partial x^i} - \frac{\partial f_{dm}}{\partial E} \left[\frac{da/dt}{a} \frac{p^2}{E} + \frac{p^2}{E} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i p}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \right] = 0.$$

Densidade de energia

$$n_{dm} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} f_{dm}$$

$$n_{dm}^{(0)} \propto a^{-3}$$

$$n_{dm} = n_{dm}^{(0)} [1 + \delta(\vec{x}, t)]$$

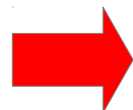


$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{1}{a} \frac{\partial v^i}{\partial x^i} + 3 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0.$$

$$\dot{\delta} + ik\tilde{v} + 3\dot{\Phi} = 0$$

Velocidade:

$$v^i \equiv \frac{1}{n_{dm}} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} f_{dm} \frac{p\hat{p}^i}{E}$$



$$\frac{\partial v^j}{\partial t} + \frac{da/dt}{a} v^j + \frac{1}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^j} = 0.$$

$$\dot{\tilde{v}} + \frac{\dot{a}}{a} \tilde{v} + ik\tilde{\Psi} = 0.$$

Equação de Boltzmann para Matéria Escura

$$\frac{df_{dm}}{dt} = C[f(x, p)] \quad p^2 = -m^2 \quad C[f(x, p)] = 0$$

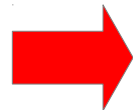
$$\frac{\partial f_{dm}}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i p}{a E} \frac{\partial f_{dm}}{\partial x^i} - \frac{\partial f_{dm}}{\partial E} \left[\frac{da/dt}{a} \frac{p^2}{E} + \frac{p^2}{E} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i p}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \right] = 0.$$

Densidade de energia

$$n_{dm} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} f_{dm}$$

$$n_{dm}^{(0)} \propto a^{-3}$$

$$n_{dm} = n_{dm}^{(0)} [1 + \delta(\vec{x}, t)]$$

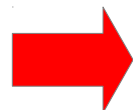


$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{1}{a} \frac{\partial v^i}{\partial x^i} + 3 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0.$$

$$\dot{\delta} + ik\tilde{v} + 3\dot{\Phi} = 0$$

Velocidade:

$$v^i \equiv \frac{1}{n_{dm}} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} f_{dm} \frac{p\hat{p}^i}{E}$$



$$\frac{\partial v^j}{\partial t} + \frac{da/dt}{a} v^j + \frac{1}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^j} = 0.$$

$$\dot{\tilde{v}} + \frac{\dot{a}}{a} \tilde{v} + ik\tilde{\Psi} = 0.$$

Equação de Boltzmann para Barions

$$\frac{df_e}{dt} = C[f(x,p)]_{coulomb} + C[f(x,p)]_{Compton}$$



$$\frac{df_b}{dt} = C[f(x,p)]_{Compton}$$

$$\frac{df_p}{dt} = C[f(x,p)]_{coulomb} + C[f(x,p)]_{proton-foton}$$

$$\frac{\partial f_b}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i p}{a E} \frac{\partial f_b}{\partial x^i} - \frac{\partial f_b}{\partial E} \left[\frac{\dot{a} p^2}{a E} + \frac{p^2}{E} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i p}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \right] = C[f(x,p)]_{Compton}$$

$$\dot{\delta}_b + ik\tilde{v}_b + 3\dot{\Phi} = 0,$$

$$\dot{\tilde{v}}_b + \frac{\dot{a}}{a}\tilde{v}_b + ik\tilde{\Psi} = \dot{\tau} \frac{4\rho_\gamma}{3\rho_b} (3i\tilde{T}_1 + \tilde{v}_b)$$

$$\tilde{T}_1 = i \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{2} \mu \tilde{T}$$

Sistema Einstein Boltzmann

$$\tilde{T}' + ik\mu\tilde{T} - \tau'\tilde{T} = ik\mu\tilde{\Phi} - \tilde{\Phi}' - \tau'\left(\frac{1}{4}\tilde{\delta}_b + ik\mu\tilde{v}_b\right)$$

$$\dot{\tilde{\delta}} + ik\tilde{v} + 3\dot{\tilde{\Phi}} = 0$$

$$\dot{\tilde{v}} + \frac{\dot{a}}{a}\tilde{v} + ik\tilde{\Psi} = 0.$$

$$\dot{\tilde{\delta}}_b + ik\tilde{v}_b + 3\dot{\tilde{\Phi}} = 0.$$

$$\dot{\tilde{v}}_b + \frac{\dot{a}}{a}\tilde{v}_b + ik\tilde{\Psi} = \dot{\tau}\frac{4\rho_\gamma}{3\rho_b}\left(3i\tilde{T}_1 + \tilde{v}_b\right)$$

$$3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\Psi - 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\tilde{\Phi}} - (k^2 - 3K)\tilde{\Phi} = -4\pi G\left(\frac{a}{a_0}\right)^2\rho_T\delta_T$$

$$K = 0, \pm 1$$

Se você desprezar a física a recombinação não terá oscilações acústicas
Vai ter mais uma eq para polarização. Pode incluir neutrinos

Espectro de potência

Toda função sobre a esfera pode ser expandida em harmônicos esféricos

$$T(\hat{n}) = \sum_{lm} a_{lm} Y_{lm}(\hat{n})$$

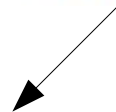


$$a_{lm} = \int d\Omega Y_{lm}^*(\hat{n}) T(\hat{n})$$



Coeficientes multipolares

$$\langle a_{lm} a_{l'm'}^* \rangle = \langle C_l \rangle \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

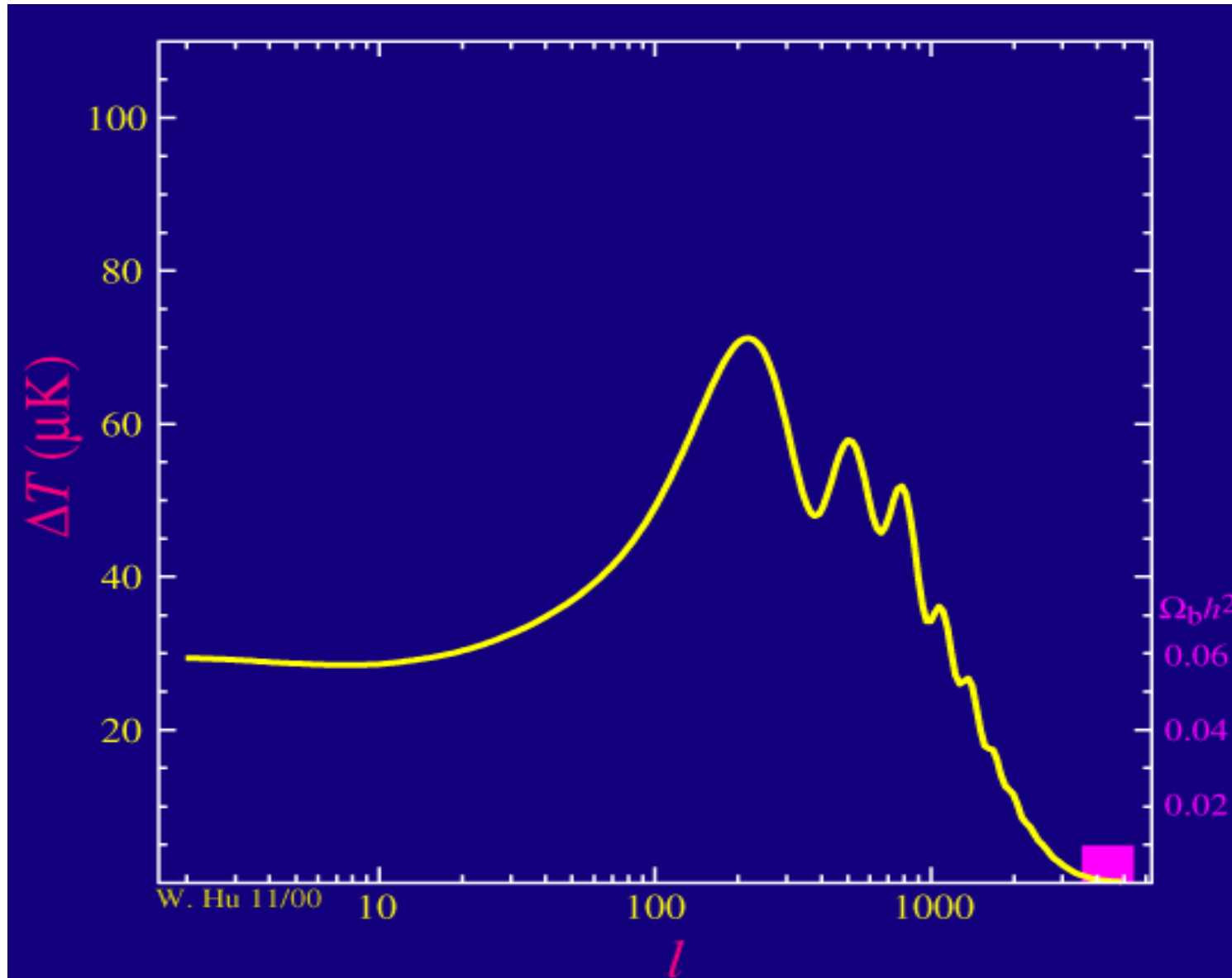


Matriz de correlação

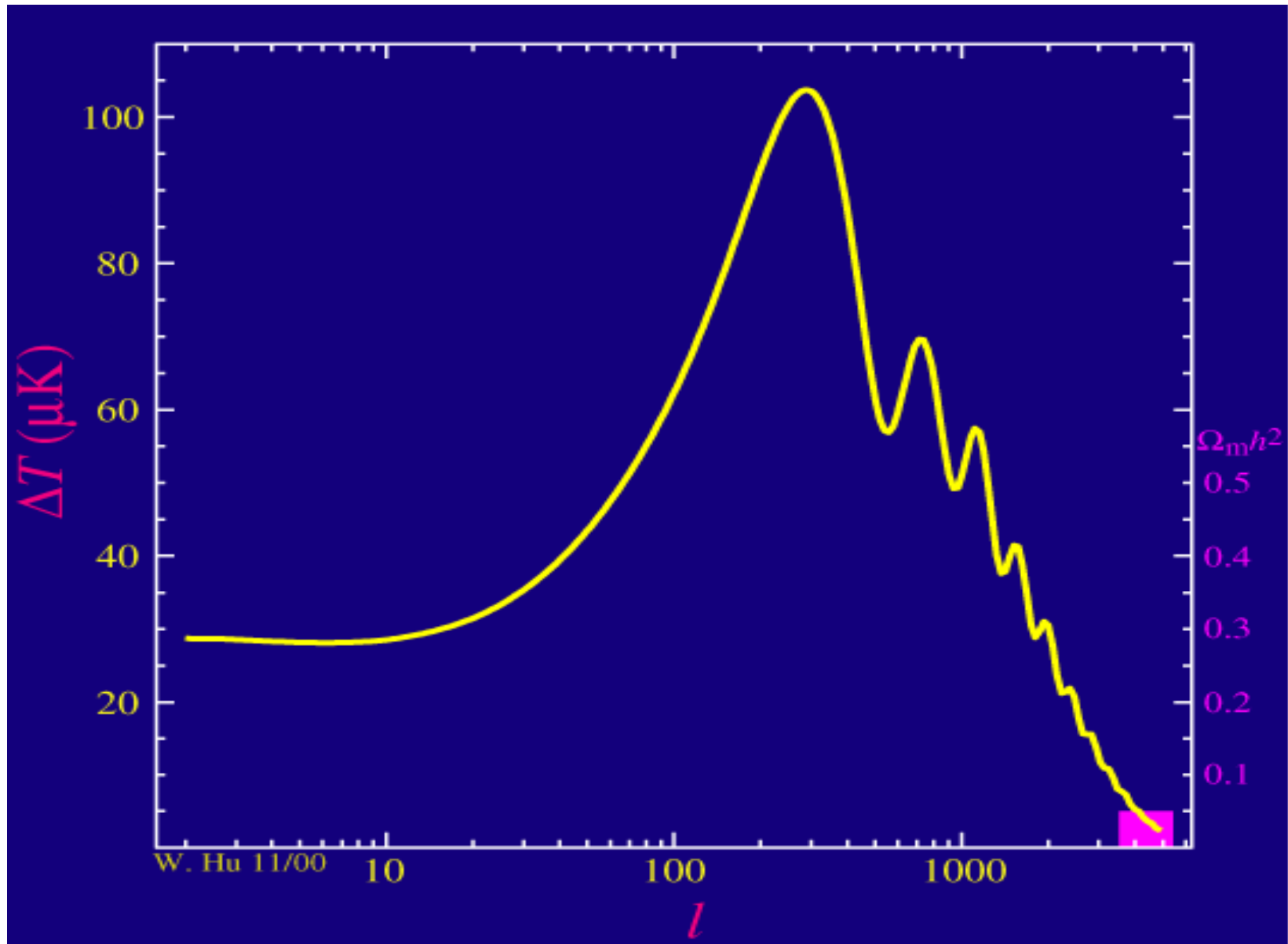


**Espectro de
potência**

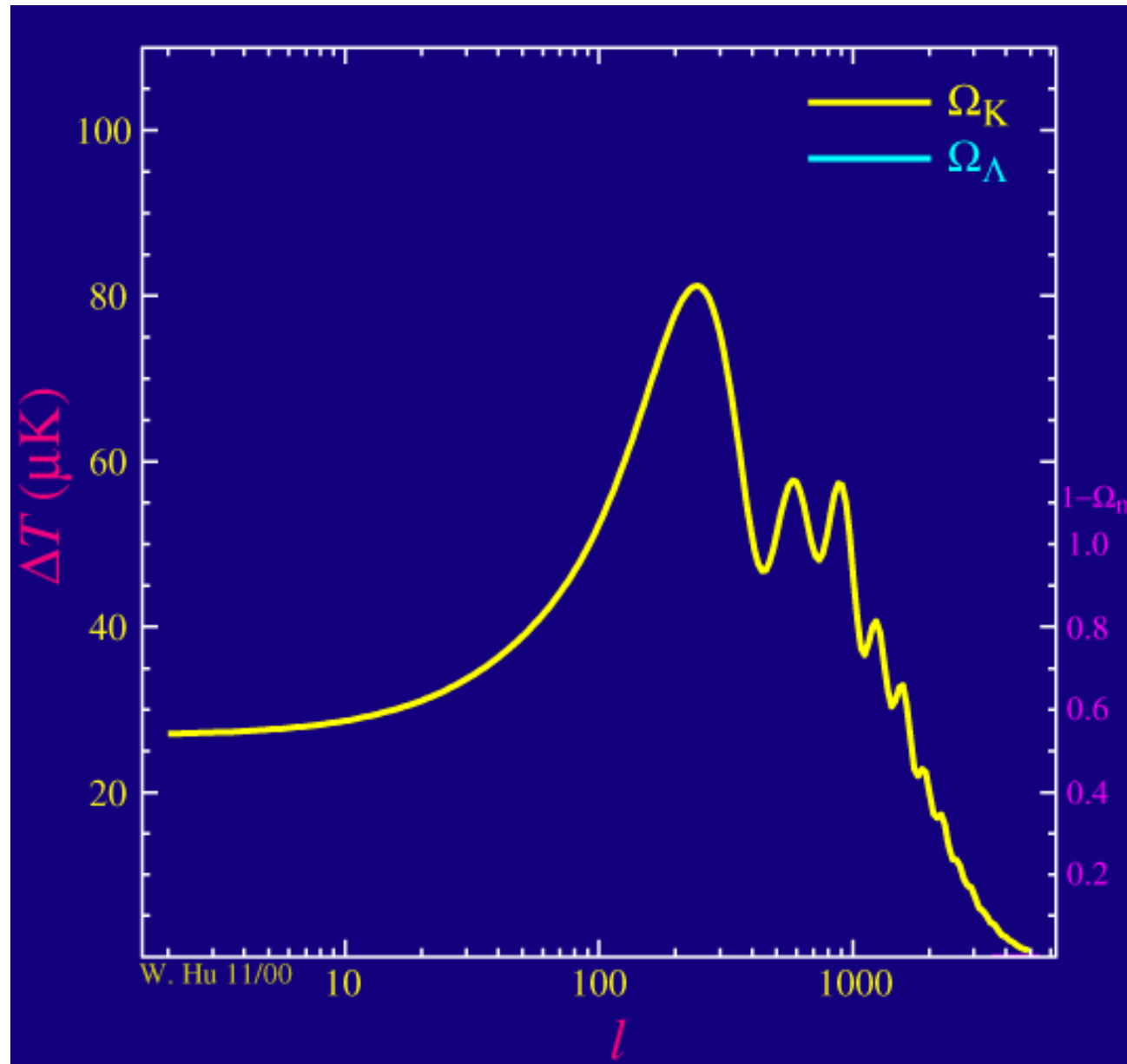
Dependência dos parâmetros cosmológicos



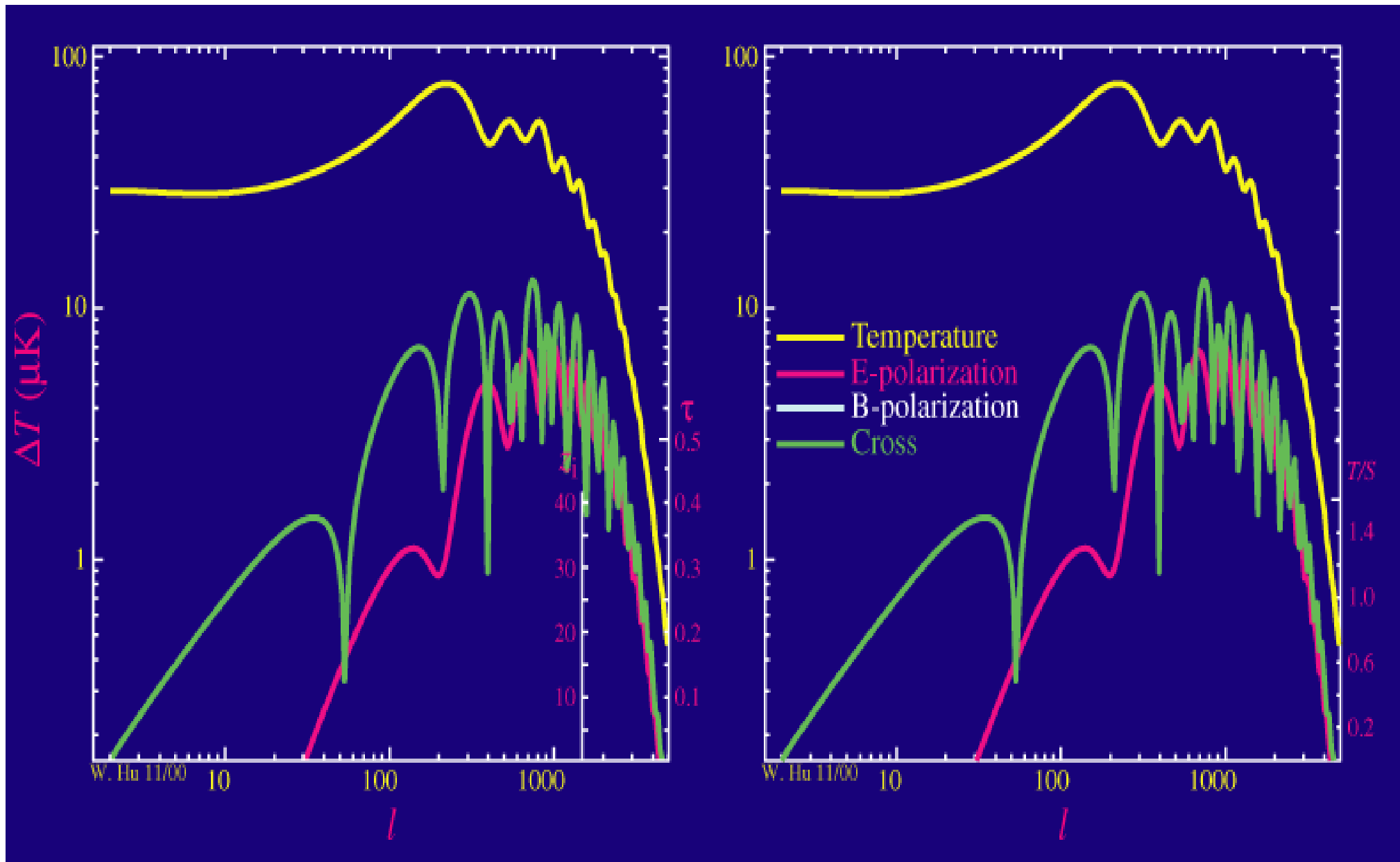
Dependência dos parâmetros cosmológicos



Dependência dos parâmetros cosmológicos



Dependência dos parâmetros cosmológicos



Espectro de Potência da RCF -

