

Condições de Junções em Relatividade Geral: A Circuncisão do Buraco Negro

Martín Richarte
UFES-IA2022

29 de Setembro de 2022

Table of contents

- 1 Distribuições
- 2 Condições de junções (CJ): Caso Eqns. de Maxwell.
- 3 Conceitos geométricos
- 4 CJ em Relatividade Geral
- 5 Aplicações

A distribuição de Dirac-I

O delta de Dirac pode ser construído através de sequências de funções $\phi_n(x)$ ou $\phi_\epsilon(x)$, que convergem para uma relação denotada por $\delta(x)$ (definida sobre $\{x \in \mathfrak{R}\}$) tal que:

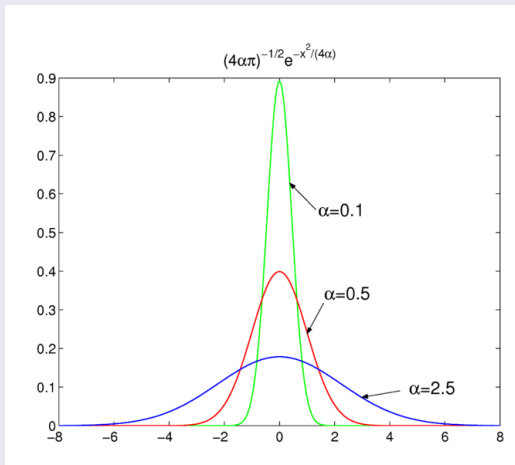
$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } x \neq 0 \\ \infty, & \text{para } x = 0 \end{cases}$$

com a seguinte propriedade:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$$

Essa relação não deve ser entendida como uma função.

A distribuição de Dirac-II



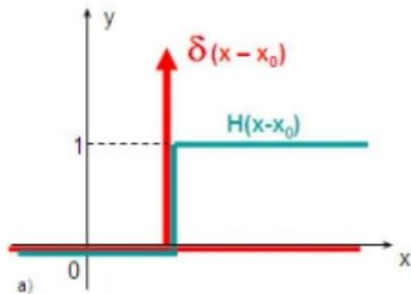
Função degrau-Heaviside-I

- O degrau unitário de Heaviside, ou $\Theta(x - x_0)$, definida como:

$$\Theta(x - x_0) = \begin{cases} 0, & \text{para } x \leq x_0 \\ 1, & \text{para } x > x_0 \end{cases}$$

- O Delta de Dirac surgiu como consequência da derivação do degrau de Heaviside. É razoável dizer que a derivada da função degrau de Heaviside é o delta: $\delta(x - x_0) = \frac{d}{dx}\Theta(x - x_0)$.

Função degrau-Heaviside-II



Eq. de Maxwell para o campo \mathbf{E}

- Sejam duas regiões do espaço M_1 e M_2 separadas por uma borda Σ , logo $\mathbb{R}^3 = M_1 \cup M_2 \cup \Sigma$.
- A superfície Σ pode-se escrever como: $f(\mathbf{x}) = 0$, cuja normal exterior no sentido $1 \rightarrow 2$ é definida como:

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \quad (1)$$

- Os campos podem-se escrever como distribuições:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \Theta(-f) + \mathbf{E}_2 \Theta(f). \quad (2)$$

- As fontes do campo em volume e em superfície são:

$$\rho = \rho_1 \Theta(-f) + \rho_2 \Theta(f) + \sigma \delta(f), \quad (3)$$

Eq. de Maxwell: $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$ e $\nabla \times \mathbf{E} = 0$.

- Calculando o rotacional, o divergente do campo elétrico, e usando as eqn. de Maxwell chega-se:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E}_1 \Theta(-f) + \nabla \cdot \mathbf{E}_2 \Theta(f) + \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \delta(f) = 4\pi\rho$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{E}_1 \Theta(-f) + \nabla \times \mathbf{E}_2 \Theta(f) + \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \delta(f) = 0$$

- Pela unicidade das eqns. de Maxwell, mostramos que as condições de junções são equivalentes as eqns. de Maxwell projetadas sobre Σ :

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 4\pi\sigma,$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0,$$

onde usamos que $\Theta(-f) + \Theta(f) = 1$ e $\partial_f \Theta(f) = \delta(f)$.

Geometrias-I

- Seja um espaço-tempo (\mathcal{M}, x^μ) com o elemento de linha:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu$$

- Defina-se a borda $(\partial\mathcal{M}, y^a)$ da variedade \mathcal{M} como à superfície de $\text{dim}=3$: $\Phi(x) = \text{constante}$.
- Usando que a posição de $\partial\mathcal{M}$ em \mathcal{M} está descrita como $x^\mu = x^\mu(y)$, então o elemento de linha induzido escreve-se

$$ds^2 = h_{ab}(y) dy^a dy^b, \quad (4)$$

onde

$$h_{ab}(y) := g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^a} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^b}. \quad (5)$$

Geometrias-II

- O vetor normal n^μ à borda $\partial\mathcal{M}$ escreve-se:

$$n_\mu := \frac{\varepsilon \nabla_\mu \Phi}{(\varepsilon g^{\rho\sigma} \nabla_\rho \Phi \nabla_\sigma \Phi)^{1/2}}, \quad (6)$$

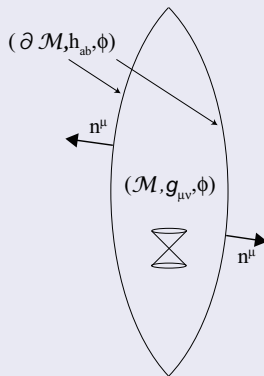
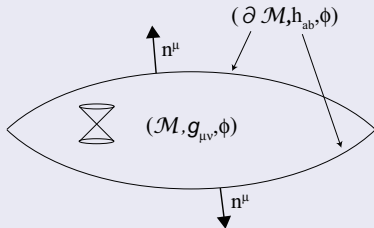
Este satisfaz $n^\mu n_\mu = \varepsilon$, onde $\varepsilon = 1$ (-1) corresponde-se com uma borda tipo-tempo (ou espaço).

- Para todo $U^\mu \in T[\partial\mathcal{M}]$ e $n_\mu \in T^\perp[\partial\mathcal{M}]$ então $U^\nu n_\nu = 0$.
- O projetor é $h_{\mu\nu} := g_{\mu\nu} - \varepsilon n_\mu n_\nu$ e satisfaz $h_{\mu\nu} n^\nu = 0$.
- A curvatura extrínseca $K_{\mu\nu}$ de $\partial\mathcal{M}$ e seu traço estão definidas da seguinte forma:

$$K_{\mu\nu} := h_\mu^\rho h_\nu^\sigma \nabla_\rho n_\sigma, \quad (7)$$

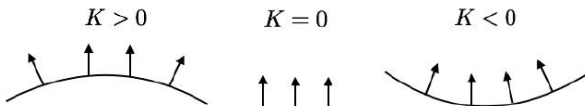
$$K := g^{\mu\nu} K_{\mu\nu} = \nabla_\mu n^\mu. \quad (8)$$

Geometrias-III



Geometrias-IV

- K é uma medida de como se curva a hipersuperfície, Σ .



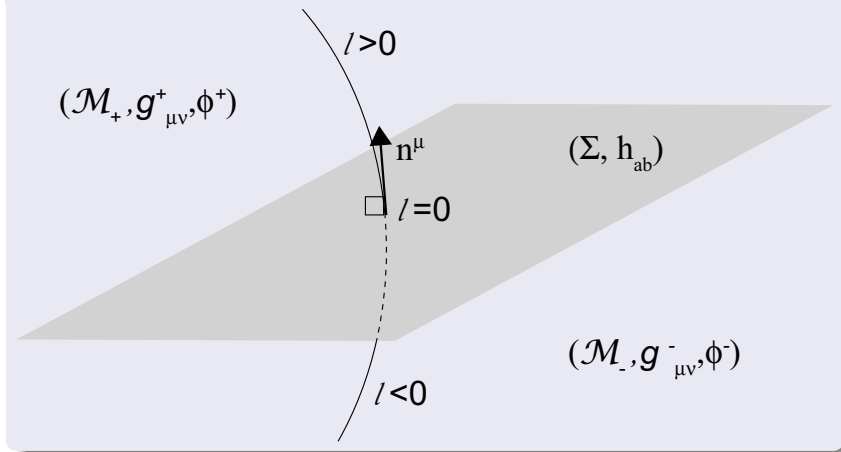
Distribuições em RG-I

- Seja uma hipersuperfície não-nula, Σ , que divide a variedade em duas regiões \mathcal{M}_+ e \mathcal{M}_- .
- Vamos a considerar que Σ está fatiada por uma congruência de curvas geodésicas que intersecam-se ortogonalmente.
- A distância própria ao longo das geodésicas é ℓ de forma tal que a parametrização de Σ : $\ell = 0$.

$$g_{\mu\nu} = \Theta(\ell)g_{\mu\nu}^+ + \Theta(-\ell)g_{\mu\nu}^- \quad (9)$$

- Afastamento com respecto à Σ ao longo das curvas geodésicas satisfaz $dx^\mu = n^\mu d\ell$ com $n_\mu = \varepsilon \partial_\mu \ell$.
- Define-se a diferença $[X] := X^+ - X^- = X(\ell + \epsilon) - X(\ell - \epsilon)$ com $\epsilon \rightarrow 0$.

Identificação



Distribuições em RG-II

- Para mostrar qual é a origem das C.Js. resulta útil calcular a derivada da métrica:

$$\partial_\rho g_{\mu\nu} = \Theta(\ell) \partial_\rho g_{\mu\nu}^+ + \Theta(-\ell) \partial_\rho g_{\mu\nu}^- + \varepsilon \delta(\ell) [g_{\mu\nu}] n_\rho, \quad (10)$$

$$(11)$$

- O produto de distribuições no mesmo ponto não está definido, ou seja, para eliminar os termos da forma $\Theta(\ell)\delta(\ell)$ **devemos** exigir a primeira condição de junção:

$$[g_{\mu\nu}] = 0 \rightarrow [h_{ab}] = 0$$

Distribuições em RG-III

- Outras quantidades podem ser calculadas do mesmo jeito:

$$\Gamma_{\nu\rho}^{\mu} = \Theta(\ell)\Gamma_{\nu\rho}^{+\mu} + \Theta(-\ell)\Gamma_{\nu\rho}^{-\mu}, \quad (12)$$

$$\partial_{\sigma}\Gamma_{\nu\rho}^{\mu} = \Theta(\ell)\partial_{\sigma}\Gamma_{\nu\rho}^{+\mu} + \Theta(-\ell)\partial_{\sigma}\Gamma_{\nu\rho}^{-\mu} + \varepsilon\delta(\ell)[\Gamma_{\nu\rho}^{\mu}]n_{\sigma}, \quad (13)$$

$$[\Gamma_{\sigma\mu}^{\rho}] = \frac{1}{2}(\omega^{\rho}_{\sigma}n_{\mu} + \omega^{\rho}_{\mu}n_{\sigma} - \omega_{\sigma\mu}n^{\rho}), \quad (14)$$

onde $\omega_{\alpha\beta} := \varepsilon n^{\mu}[\partial_{\mu}g_{\alpha\beta}]$. Aqui temos neste termo a conexão com a curvatura extrínseca:

$$\begin{aligned} [K_{\mu\nu}] &= h_{\mu}^{\rho}h_{\nu}^{\sigma}[\nabla_{\rho}n_{\sigma}] \\ &= \frac{1}{2}(\varepsilon\omega_{\mu\nu} - \omega_{\mu\sigma}n^{\sigma}n_{\nu} - \omega_{\nu\rho}n^{\rho}n_{\mu} + \varepsilon\omega_{\rho\sigma}n^{\rho}n^{\sigma}n_{\mu}n_{\nu}), \end{aligned} \quad (15)$$

$$[K] = g^{\mu\nu}[K_{\mu\nu}] = \frac{1}{2}(\varepsilon\omega_{\mu}^{\mu} - \omega_{\mu\nu}n^{\mu}n^{\nu}). \quad (16)$$

Distribuições em RG-IV

- O tensor de Riemann tem três contribuições:

$$R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = \Theta(\ell)R^{+\rho}_{\sigma\mu\nu} + \Theta(-\ell)R^{-\rho}_{\sigma\mu\nu} + \delta(\ell)\tilde{R}^{\rho}_{\sigma\mu\nu}, \quad (17)$$

onde o termo proporcional ao delta δ escreve-se da seguinte forma:

$$\tilde{R}^{\rho}_{\sigma\mu\nu} := \varepsilon([\Gamma^{\rho}_{\sigma\nu}]n_{\mu} - [\Gamma^{\rho}_{\sigma\mu}]n_{\nu}). \quad (18)$$

- Logo, os termos proporcional ao delta no tensor de Ricci e no escalar de Ricci envolvem $[K_{\mu\nu}]$ e seu traço:

$$\tilde{R}_{\sigma\nu} = \tilde{R}^{\mu}_{\sigma\mu\nu} = -\varepsilon[K_{\sigma\nu}] - [K]n_{\sigma}n_{\nu}, \quad (19)$$

$$\tilde{R} = g^{\sigma\nu}\tilde{R}_{\sigma\nu} = -2\varepsilon[K]. \quad (20)$$

Distribuições em RG-V

- A parte singular do tensor de Einstein fica assim:

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = \tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\tilde{R} = -\varepsilon ([K_{\mu\nu}] - h_{\mu\nu}[K]). \quad (21)$$

- Lembrando que o TEM em todo $\mathcal{M}_+ \cup \mathcal{M}_- \cup \Sigma$:

$$T_{\mu\nu} = \Theta(\ell)T_{\mu\nu}^+ + \Theta(-\ell)T_{\mu\nu}^- + \delta(\ell)S_{\mu\nu}. \quad (22)$$

- As eqns. de Einstein projetadas serão:

$$S_{\mu\nu} = -\varepsilon ([K_{\mu\nu}] - h_{\mu\nu}[K]). \quad (23)$$

Distribuições em RG-VI

- As EE de campo em todo o espaçotempo são:

$$\Theta(\ell)G_{\mu\nu}^+ \Theta(-\ell)G_{\mu\nu}^- + \delta(\ell)\tilde{G}_{\mu\nu} =$$

$$\Theta(\ell)T_{\mu\nu}^+ + \Theta(-\ell)T_{\mu\nu}^- + \delta(\ell)S_{\mu\nu}.$$

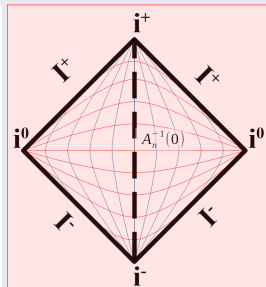
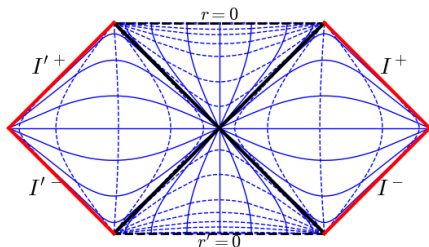
- É possível mostrar a conservação do TEM associado à casca, $D^a S_{ab} = 0$, para campos que só estão localizados em Σ .

Aplicações

- Buraco de Minhoca.
- colapso gravitacional.
- Mundos Brana.
- Quase-Buracos Negros.
- Casca Fina.
- BN Regular.
- Ondas de Choques.
- Dinâmica de Bolhas.
- Estrelas com ambientes.
- Vacúo Falso e bolhas/Instantons.
- etc....

$BN \rightarrow BM$

- Como podemos construir um buraco de minhoca (verme) usando uma solução de buraco negro?



Colagem-I

- Seja o elemento de linha de Schwarzschild em coordenadas $X^\alpha = (t, r, \theta, \varphi)$,

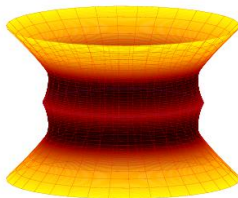
$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_2. \quad (24)$$

- Dita geometria representa um BN cujo horizonte de eventos está localizado em $r_H = 2M$.
- O que vamos a fazer é tirar do ET de Schwarzschild a região problemática $r < 2M$.
- Logo, pegamos duas cópias da subvariedade restante com $r \geq a$:

$$\mathcal{M}^\pm = \{x/r \geq a\}, \quad (25)$$

onde $a > r_H$.

Colagem-II

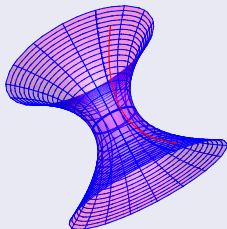


Colagem-III

- Colamos \mathcal{M}^\pm na borda definida como a seguinte hipersuperfície:

$$\Sigma \equiv \Sigma^\pm = \{x/r - a = 0\}, \quad (26)$$

- construindo uma verme de casca fina $\mathcal{M} = \mathcal{M}^+ \cup \mathcal{M}^-$.



Colagem-IV

- Este procedimento dá como resultado uma nova variedade que é geodésicamente completa, \mathcal{M} , com duas regiões assintoticamente planas conectadas por uma garganta.
- Em \mathcal{M} , define-se uma coordenada radial $\ell = \pm \int_a^r g_{rr} dr$, onde \pm representam \mathcal{M}^+ e \mathcal{M}^- .
- $|\ell|$ é uma distância própria radial à garganta $\ell = 0$.
- Um observador no infinito enxergará um B.M. com massa M .

BM-Propiedades-I

- A garganta está localizada em Σ . Esta casca fina é uma hipersuperfície síncrona de tipo tempo.
- Escolhemos coordenadas $y^a = (\tau, \theta, \varphi)$ em Σ , sendo τ o tempo próprio medido na casca fina.
- O tensor métrico induzido é $h_{ab} = \text{diag}(-1, a^2, a^2 \sin^2 \theta)$
- Na análise de estabilidade resulta útil usar que $\Sigma : f(r, \tau) = r - a(\tau) = 0$.

BM-Propiedades-II

- O vector normal ($n^\gamma n_\gamma = 1$) a Σ em \mathcal{M} :

$$n_\gamma^\pm = \pm \left| g^{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial X^\alpha} \frac{\partial f}{\partial X^\beta} \right|^{-1/2} \frac{\partial f}{\partial X^\gamma}. \quad (27)$$

$$n_\gamma^\pm = \pm \left(-\dot{a}, \frac{\sqrt{\dot{a}^2 + f_\pm(a)}}{f_\pm(a)}, 0, 0 \right). \quad (28)$$

- A quadravelocidade de um observador fixo em Σ satisfaz $U^\mu U_\mu = -1$ e $U^\mu n_\mu = 0$,

$$U_\gamma^\pm = \pm \left(\frac{\sqrt{\dot{a}^2 + f_\pm(a)}}{f_\pm(a)}, \dot{a}, 0, 0 \right), \quad (29)$$

onde $f_\pm(a) = 1 - 2M_\pm/a_\pm$.

BM-Propiedades-III

- As componentes da curvatura extrínseca são

$$K_{\theta}^{\theta\pm} = K_{\varphi}^{\varphi\pm} = \pm \frac{A_{\pm}(a)}{a}, \quad (30)$$

$$K_{\tau}^{\tau\pm} = \pm \frac{B_{\pm}(a)}{A_{\pm}(a)}, \quad (31)$$

onde $\dot{} = d/d\tau$, $A_{\pm} = \sqrt{f_{\pm}(a) + \dot{a}^2}$ e $B_{\pm} = \ddot{a} + \frac{f'_{\pm}(a)}{2a}$.

- O salto das componentes fica da seguinte forma:

$$[K_{\theta}^{\theta}] = [K_{\varphi}^{\varphi}] = \frac{A_{+} + A_{-}}{a}, \quad (32)$$

$$[K_{\tau}^{\tau}] = \frac{B_{+}}{A_{+}} + \frac{B_{-}}{A_{-}}. \quad (33)$$

BM-Propiedades-IV

- As Eqns. de Einstein projetadas (Darmois-Lanczos) são:

$$-[K_{ab}] + [K]h_{ab} = 8\pi S_{ab}, \quad (34)$$

- o TEM da casca fina escreve-se

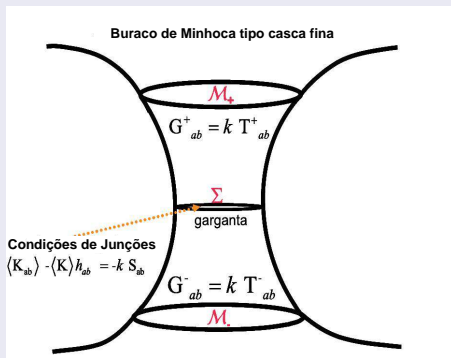
$$S_b^a = \text{diag}(-\sigma, p, p),$$

sendo σ a densidade energia superficial e p a pressão:

$$\sigma = -\frac{A_+ + A_-}{2\pi a}, \quad (35)$$

$$p = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{B_+}{A_+} + \frac{B_-}{A_-} + \frac{A_+ + A_-}{a} \right). \quad (36)$$

Propiedade-V



BM-Propiedades-VI

- A densidade de energia σ é sempre negativa, indicando a existência de um conteúdo material exótico na garganta do B.M.
- Perceba-se que a conservação local do TEM da casca implica [1a. lei da termodinâmica],

$$\frac{d}{d\tau} (\sigma A_t) + p \frac{dA_t}{d\tau} = 0, \quad (37)$$

onde $A_t = 4\pi a^2$ é área da garganta. Outra forma seria:

$$\dot{\sigma} = -2(\sigma + p) \frac{\dot{a}}{a}. \quad (38)$$

BM-Propiedades-VI

- A eqn. mestra para a dinâmica escreve-se:

$$\dot{a}^2 + V(a) = 0. \quad (39)$$

onde o potencial efetivo está dado pela seguinte expressão:

$$V(a) = -(2\pi a\sigma)^2 - \frac{(f_+ - f_-)^2}{(8\pi a\sigma)^2} + \frac{(f_+ + f_-)}{2} \quad (40)$$

- Para estudar a estabilidade da garganta baixo perturbações que respeitam a simetria original do sistema fazemos uma expansão de Taylor do potencial efetivo:

$$V(a) = V(a_0) + V'(a_0)(a - a_0) + \frac{V''(a_0)}{2}(a - a_0)^2 + O(a - a_0)^3, \quad (41)$$

BM-Propiedades-VII

- E mostrando que para $a = a_0$ tem-se, $V(a_0) = V'(a_0) = 0$,

$$V(a) = \frac{1}{2}V''(a_0)(a - a_0)^2 + O[(a - a_0)^3], \quad (42)$$

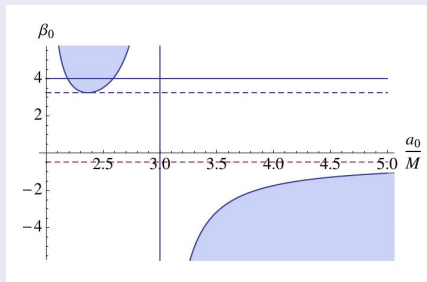
- A estabilidade se traduz em analisar o sinal de $V''(a_0)$.
- Suponha que $p = p(\sigma)$ e $\beta(\sigma) = dp/d\sigma$. A derivada segunda avaliada no solução de equilíbrio dá:

$$V''(a_0) = -\frac{2}{a_0^2} \left[\frac{2M}{a_0} + \frac{M^2}{a_0^2 \left(1 - \frac{2M}{a_0}\right)} + (1 + 2\beta_0) \left(1 - \frac{3M}{a_0}\right) \right]. \quad (43)$$

BM-Propiedades-VIII

- A condição de estabilidade resulta equivalente à seguinte desigualdade:

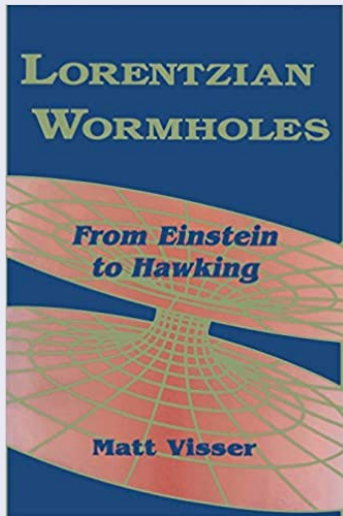
$$2a_0^2\beta_0 < -\frac{[a_0^2 - 3Ma_0 + M^3]}{a_0^2(a_0 - 2M)}$$



BM-Propiedades-IX

- O B.M com raio $a_0 = 3M$ é instável pois $V''(a_0 = 3M) = -2/9M^2 < 0$ para todo valor de β_0 .
- Não tem solução estável para $3 + \sqrt{3} > 2\beta_0 > -1$.
- Existem soluções estáveis para $2\beta_0 \geq 3 + \sqrt{3}$ ou $2\beta_0 > -1$.
- Tem-se que todo B.M. com $\beta_0^2 \in (0, 1]$ é instável.
- **Os B.Ms são estável para configurações com $a_0 > 3M$ e $\beta_0 < 0$.** [Poisson-Visser, PRD'95].
- O TEM do efeito Casimir tem um resultado semelhante, $T^{ij} = \sigma \text{diag}(-1, 1, 1)$.


Referência



Obrigado!!



Extras-I

PHYSICAL REVIEW D **103**, 104050 (2021)**Throat effects on shadows of Kerr-like wormholes**Shinta Kasuya and Masataka Kobayashi *Department of Mathematics and Physics, Kanagawa University, Kanagawa 259-1293, Japan* (Received 28 March 2021; accepted 3 May 2021; published 21 May 2021)

We revisit to investigate shadows cast by Kerr-like wormholes. The boundary of the shadow is determined by unstable circular photon orbits. We find that, in certain parameter regions, the orbit is located at the throat of the Kerr-like wormhole, which was not considered in the literature. In these cases, the existence of the throat alters the shape of the shadow significantly, and makes it possible for us to differentiate it from that of a Kerr black hole.

DOI: [10.1103/PhysRevD.103.104050](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.103.104050)

Extras-II

PRL 116, 171101 (2016)

PHYSICAL REVIEW LETTERS

week ending
29 APRIL 2016

Is the Gravitational-Wave Ringdown a Probe of the Event Horizon?

Vitor Cardoso,^{1,2} Edgardo Franzin,^{3,1} and Paolo Pani^{4,1}¹*CENTRA, Departamento de Física, Instituto Superior Técnico, Universidade de Lisboa,
Avenida Rovisco Pais 1, 1049 Lisboa, Portugal*²*Perimeter Institute for Theoretical Physics, 31 Caroline Street North Waterloo, Ontario N2L 2Y5, Canada*³*Dipartimento di Fisica, Università di Cagliari & Sezione INFN Cagliari, Cittadella Universitaria, 09042 Monserrato, Italy*⁴*Dipartimento di Fisica, "Sapienza" Università di Roma & Sezione INFN Roma1, Piazzale Aldo Moro 5, 00185 Roma, Italy*

(Received 25 February 2016; published 27 April 2016)

It is commonly believed that the ringdown signal from a binary coalescence provides a conclusive proof for the formation of an event horizon after the merger. This expectation is based on the assumption that the ringdown waveform at intermediate times is dominated by the quasinormal modes of the final object. We point out that this assumption should be taken with great care, and that very compact objects with a light ring will display a similar ringdown stage, even when their quasinormal-mode spectrum is completely different from that of a black hole. In other words, universal ringdown waveforms indicate the presence of light rings, rather than of horizons. Only precision observations of the late-time ringdown signal, where the differences in the quasinormal-mode spectrum eventually show up, can be used to rule out exotic alternatives to black holes and to test quantum effects at the horizon scale.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.116.171101

Extras-III

PRL 119, 251102 (2017)

PHYSICAL REVIEW LETTERS

week ending
22 DECEMBER 2017

Light-Ring Stability for Ultracompact Objects

Pedro V.P. Cunha,^{1,2} Emanuele Berti,^{3,2} and Carlos A. R. Herdeiro¹¹*Departamento de Física da Universidade de Aveiro and CIDMA, Campus de Santiago, 3810-183 Aveiro, Portugal*²*CENTRA, Departamento de Física, Instituto Superior Técnico, Universidade de Lisboa, Avenida Rovisco Pais 1, 1049 Lisboa, Portugal*³*Department of Physics and Astronomy, The University of Mississippi, University, Mississippi 38677, USA*

(Received 3 August 2017; revised manuscript received 18 October 2017; published 18 December 2017)

We prove the following theorem: axisymmetric, stationary solutions of the Einstein field equations formed from classical gravitational collapse of matter obeying the null energy condition, that are everywhere smooth and ultracompact (i.e., they have a light ring) must have at least *two* light rings, and one of them is *stable*. It has been argued that stable light rings generally lead to nonlinear spacetime instabilities. Our result implies that smooth, physically and dynamically reasonable ultracompact objects are not viable as observational alternatives to black holes whenever these instabilities occur on astrophysically short time scales. The proof of the theorem has two parts: (i) We show that light rings always come in pairs, one being a saddle point and the other a local extremum of an effective potential. This result follows from a topological argument based on the Brouwer degree of a continuous map, with no assumptions on the spacetime dynamics, and, hence, it is applicable to any metric gravity theory where photons follow null geodesics. (ii) Assuming Einstein's equations, we show that the extremum is a local minimum of the potential (i.e., a stable light ring) if the energy-momentum tensor satisfies the null energy condition.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.119.251102