A teoria geométrica-escalar da gravitação e sua aplicação à cosmologia

Júnior Diniz Toniato

Instituto de Cosmologia, Relatividade e Astrofísica - ICRA

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CBPF
Rio de Janeiro - RJ

UFES - Vitória, 14 de novembro de 2014

Índice

Parte I: Revisão Teórica

- Com o advento da relatividade especial fez-se necessário adaptar a gravitação Newtoniana aos conceitos relativísticos.

- A simples generalização da força Newtoniana ao formalismo quadridimensional apresentou problemas.

$$F_{Newton} \;\rightarrow\; F^{\mu} = \frac{d}{d\tau}\left(m\,\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\right), \qquad F^{\mu}_{g} = mc^{2}\,\partial^{\mu}\varphi\,. \tag{1}$$

$$\nabla^{2}\Phi_{N} \;\rightarrow\; \Box\varphi = \kappa\,\rho. \tag{2}$$

A constância da velocidade da luz implica em sérias restrições à essa generalização da mecânica Newtoniana,

$$\eta_{\mu\nu}F^{\mu}\frac{dx^{\nu}}{d\tau} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d\varphi}{d\tau} = 0\,. \tag{3}$$

Essa inconsistência levou Einstein a abandonar a ideia de formular uma teoria da gravitação que fosse invariante de Lorentz (generalização do princípio de equivalência).

- Com o advento da relatividade especial fez-se necessário adaptar a gravitação Newtoniana aos conceitos relativísticos.
- A simples generalização da força Newtoniana ao formalismo quadridimensional apresentou problemas.
- Nordström trabalhou em cima desta questão e propôs uma formulação que foi bem aceita na comunidade científica.

Equação de campo,

$$\Phi\Box\Phi = -\kappa T \tag{1}$$

A massa depende do campo gravitacional

$$m = m_0\,\Phi\,, \tag{2}$$

A dinâmica de partículas teste são determinadas a partir do conceito de quadri-força.

- Pouco tempo depois a teoria de Nordström foi reescrita por Einstein e Fokker usando o cálculo diferencial.

  Nota-se que a dinâmica de partículas teste são equivalentes à geodésicas em um espaço curvo descrito pela métrica

$$g_{\mu\nu} = \varphi^2 \, \eta_{\mu\nu} \, . \tag{3}$$

- A equação de campo da teoria é reescrita em termos do escalar de curvatura,

$$R = 6\kappa T \, . \tag{4}$$

- Pouco tempo depois a teoria de Nordström foi reescrita por Einstein e Fokker usando o cálculo diferencial.

  Nota-se que a dinâmica de partículas teste são equivalentes à geodésicas em um espaço curvo descrito pela métrica

$$g_{\mu\nu} = \varphi^2 \, \eta_{\mu\nu} \, . \tag{3}$$

- A equação de campo da teoria é reescrita em termos do escalar de curvatura,

$$R = 6\kappa T \, . \tag{4}$$

Mas há problemas graves:

- A fonte do campo gravitacional é o traço do tensor de energia-momento.
- A métrica é conformalmente plana.

Parte II: A teoria geométrica-escalar

- Qualquer teoria escalar não linear (em w), com uma Lagrangeana $L(w,\Phi)$, pode ser reescrita em um espaço-tempo emergente (curvo) gerado pelo próprio campo escalar.

  Equação de campo: $$\frac{1}{\sqrt{-\eta}}\,\partial_\mu\left(\sqrt{-\eta}\,L_w\,\partial_\nu\Phi\,\eta^{\mu\nu}\right)=\frac{1}{2}\,L_\Phi$$

- Qualquer teoria escalar não linear (em w), com uma Lagrangeana $L(w,\Phi)$, pode ser reescrita em um espaço-tempo emergente (curvo) gerado pelo próprio campo escalar.

  Equação de campo: $\frac{1}{\sqrt{-\eta}}\,\partial_\mu\left(\sqrt{-\eta}\;L_w\,\partial_\nu\Phi\,\eta^{\mu\nu}\right)=\frac{1}{2}\,L_\Phi$

- Definindo: $q^{\mu\nu}=\alpha\,\eta^{\mu\nu}+\frac{\beta}{w}\,\partial^\mu\Phi\,\partial^\nu\Phi\,,\quad w=\,\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\,\partial_\nu\Phi\,.$

  A equação de campo é reescrita:

$$\frac{1}{\sqrt{-q}}\,\partial_\mu\left(\sqrt{-q}\,\partial_\nu\Phi\,q^{\mu\nu}\right)\equiv\Box_q\Phi=0\,.$$

  Sob as condições: $\frac{\alpha^{3/2}L_w}{\sqrt{\alpha+\beta}}=F(\Phi)$ e $\frac{F_\Phi}{F}\,w-\frac{L_\Phi}{2L_w}=0\,,$

- Qualquer teoria escalar não linear (em w), com uma Lagrangeana $L(w, \Phi)$, pode ser reescrita em um espaço-tempo emergente (curvo) gerado pelo próprio campo escalar.

  Equação de campo: $\frac{1}{\sqrt{-\eta}}\,\partial_\mu\left(\sqrt{-\eta}\;L_w\,\partial_\nu\Phi\,\eta^{\mu\nu}\right) = \frac{1}{2}\,L_\Phi$

- Definindo: $q^{\mu\nu} = \alpha\,\eta^{\mu\nu} + \frac{\beta}{w}\,\partial^\mu\Phi\,\partial^\nu\Phi\,,\quad w =\, \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\,\partial_\nu\Phi\,.$

  A equação de campo é reescrita:

$$\frac{1}{\sqrt{-q}}\,\partial_\mu\left(\sqrt{-q}\,\partial_\nu\Phi\,q^{\mu\nu}\right) \equiv \Box_{\,q}\Phi = 0\,.$$

  Sob as condições: $\frac{\alpha^{\,3/2}L_w}{\sqrt{\alpha+\beta}} = F(\Phi)$ e $\frac{F_\Phi}{F}\,w - \frac{L_\Phi}{2L_w} = 0\,,$

- A auto-interação do campo Φ passa a ser entendida como uma manifestação da estrutura geométrica do espaço-tempo.

- Estabelecer o papel da métrica $q^{\mu\nu}$ quando o campo Φ interage com outros campos consistirá na base da GSG.

- Estabelecer o papel da métrica $q^{\mu\nu}$ quando o campo Φ interage com outros campos consistirá na base da GSG.

- **Hipótese básica:** Toda forma de matéria e energia interagem com o campo gravitacional Φ somente através da estrutura métrica

$$q^{\mu\nu} = \alpha\, \gamma^{\mu\nu} + \frac{\beta}{w}\, \partial^{\mu}\Phi\, \partial^{\nu}\Phi\,, \tag{5}$$

Essa interação é dada através do acoplamento mínimo.

- Estabelecer o papel da métrica $q^{\mu\nu}$ quando o campo Φ interage com outros campos consistirá na base da GSG.

- **Hipótese básica:** Toda forma de matéria e energia interagem com o campo gravitacional Φ somente através da estrutura métrica

$$q^{\mu\nu} = \alpha\,\gamma^{\mu\nu} + \frac{\beta}{w}\,\partial^\mu\Phi\,\partial^\nu\Phi\,, \tag{5}$$

Essa interação é dada através do acoplamento mínimo.

Exemplo: Campo eletromagnético

As equações de campo do eletromagnetismo, obtidas através do princípio variacional

$$\delta\,\frac{1}{4}\int\sqrt{-q}\,F\,d^4x = 0\,, \quad F = F_{\alpha\mu}F_{\beta\nu}q^{\alpha\beta}q^{\mu\nu} \tag{6}$$

serão dadas por

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0\,, \tag{7}$$

onde o ponto e vírgula representa a derivada covariante em relação à métrica gravitacional

- Partículas testes seguem geodésicas na métrica gravitacional.

- Partículas testes seguem geodésicas na métrica gravitacional.
- Considerando um regime de baixas velocidades, campo fraco e estático, teremos

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\,\Gamma^i_{00} = -\,\partial^i\,\Phi_N\,, \tag{8}$$

A conexão métrica $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ deve ser construída com a métrica gravitacional $q_{\mu\nu}$, assim

$$\Gamma^i_{00} \approx -\,\frac{1}{2}\,\partial^i(\ln\alpha)\,, \tag{9}$$

portanto,

$$\alpha \approx 1 - 2\Phi_N\,. \tag{10}$$

- No entanto, para o desenvolvimento da GSG iremos extrapolar essa relação determinando que

$$\alpha = \,e^{-2\Phi}\,. \tag{11}$$

- Ainda precisamos determinar a equação dinâmica da teoria.

- Ainda precisamos determinar a equação dinâmica da teoria.

- Lagrangeana do campo escalar: $L = V(\Phi)\, w$

- Com isso, as condições $\frac{\alpha^{\,3/2} L_w}{\sqrt{\alpha+\beta}} = F(\Phi)$ e $\frac{F_\Phi}{F}\, w - \frac{L_\Phi}{2L_w} = 0\,,$

  Se tornam $\alpha + \beta = \alpha^3\, V(\Phi)\,.$

- E a equação dinâmica do campo escalar no vazio será $\Box\,\Phi = 0$

- Utilizaremos o princípio variacional para estabelecermos a equação de campo da teoria.

- Utilizaremos o princípio variacional para estabelecermos a equação de campo da teoria.

- A ação do campo escalar é facilmente descrita em termos da métrica gravitacional,

$$S_\Phi = \frac{1}{\kappa c}\int \sqrt{-\eta}\, V w d^4x = \frac{1}{\kappa c}\int \sqrt{-q}\,\Omega\sqrt{V} d^4x\,, \quad \text{com} \quad \Omega \equiv q^{\alpha\beta}\partial_\alpha\Phi\partial_\beta\Phi\,. \tag{12}$$

- Utilizaremos o princípio variacional para estabelecermos a equação de campo da teoria.

- A ação do campo escalar é facilmente descrita em termos da métrica gravitacional,

$$S_\Phi = \frac{1}{\kappa c}\int \sqrt{-\eta}\, V w d^4x = \frac{1}{\kappa c}\int \sqrt{-q}\,\Omega\,\sqrt{V} d^4x\,, \quad \text{com} \quad \Omega \equiv q^{\alpha\beta}\partial_\alpha\Phi\partial_\beta\Phi\,. \tag{12}$$

- Variando em relação a Φ,

$$\delta S_\Phi = -\frac{2}{\kappa c}\int \sqrt{V}\,\Box\,\Phi\,\delta\Phi\,\sqrt{-q}\,d^4x\,. \tag{13}$$

- Utilizaremos o princípio variacional para estabelecermos a equação de campo da teoria.

- Variação da ação do campo gravitacional: $\Longrightarrow \delta S_{\Phi} = -\frac{2}{\kappa c}\int \sqrt{-q}\,\sqrt{V}\,\square\Phi\,\delta\Phi\,d^4x\,.$

- Utilizaremos o princípio variacional para estabelecermos a equação de campo da teoria.

- Variação da ação do campo gravitacional: $\Longrightarrow \delta S_\Phi = -\frac{2}{\kappa c}\int \sqrt{-q}\,\sqrt{V}\,\Box\Phi\,\delta\Phi\,d^4x\,.$

- Ação correspondente à matéria,

$$S_m = \frac{1}{c}\int \sqrt{-q}\,L_m d^4x\,, \tag{12}$$

o que resulta em,

$$\delta S_m = -\frac{1}{2c}\int \sqrt{-q}\,T^{\mu\nu}\delta q_{\mu\nu}\,d^4x\,, \quad \text{onde} \quad T_{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-q}}\frac{\delta(\sqrt{-q}\,L_m)}{\delta q^{\mu\nu}}\,. \tag{13}$$

- Utilizaremos o princípio variacional para estabelecermos a equação de campo da teoria.

- Variação da ação do campo gravitacional: $\Longrightarrow \delta S_{\Phi} = -\frac{2}{\kappa c}\int \sqrt{-q}\,\sqrt{V}\,\Box\Phi\,\delta\Phi\,d^4x\,.$

- Ação correspondente à matéria,

$$S_m = \frac{1}{c}\int \sqrt{-q}\,L_m d^4x\,, \tag{12}$$

o que resulta em,

$$\delta S_m = -\frac{1}{2c}\int \sqrt{-q}\,T^{\mu\nu}\delta q_{\mu\nu}\,d^4x\,, \quad \text{onde} \quad T_{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-q}}\frac{\delta(\sqrt{-q}\,L_m)}{\delta q^{\mu\nu}}\,. \tag{13}$$

- Mas a métrica $q_{\mu\nu}$ não é a quantidade fundamental.

- Utilizaremos o princípio variacional para estabelecermos a equação de campo da teoria.

- Variação da ação do campo gravitacional: $\Longrightarrow \delta S_\Phi = -\frac{2}{\kappa c}\int \sqrt{-q}\,\sqrt{V}\,\Box\Phi\,\delta\Phi\,d^4x\,.$

- Variação da ação da matéria:

$$\delta S_m = \frac{1}{c}\int\sqrt{-q}\left[\frac{\alpha'}{\alpha}\,T + \left(\frac{V'}{V} + 2\,\frac{\alpha'}{\alpha}\right)E - 2\,C^{\lambda}{}_{;\lambda}\right]\delta\Phi\,d^4x\,, \qquad (12)$$

onde temos definido as quantidades

$$T \equiv T^{\mu\nu}\,q_{\mu\nu}, \quad E \equiv \frac{T^{\mu\nu}\,\partial_\mu\Phi\,\partial_\nu\Phi}{\Omega}, \qquad (13)$$

$$C^\lambda \equiv \frac{\beta}{\alpha\,\Omega}\left(T^{\lambda\mu} - E\,q^{\lambda\mu}\right)\partial_\mu\Phi \qquad (14)$$

- Utilizaremos o princípio variacional para estabelecermos a equação de campo da teoria.

- Variação da ação do campo gravitacional: $\Longrightarrow \; \delta S_\Phi = -\frac{2}{\kappa c} \int \sqrt{-q}\,\sqrt{V}\,\Box\Phi\,\delta\Phi\,d^4x\,.$

- Variação da ação da matéria:

$$\delta S_m = \frac{1}{c}\int \sqrt{-q}\,\underbrace{\left[\frac{\alpha'}{\alpha}\,T + \left(\frac{V'}{V} + 2\,\frac{\alpha'}{\alpha}\right) E - 2\,C^{\lambda}{}_{;\lambda}\right]}_{2\,\chi}\delta\Phi\,d^4x\,, \tag{12}$$

$$T \equiv T^{\mu\nu}\,q_{\mu\nu}\,, \qquad E \equiv \frac{T^{\mu\nu}\,\partial_\mu\Phi\,\partial_\nu\Phi}{\Omega}\,, \tag{13}$$

$$C^{\lambda} \equiv \frac{\beta}{\alpha\,\Omega}\left(T^{\lambda\mu} - E\,q^{\lambda\mu}\right)\partial_\mu\Phi \tag{14}$$

- Utilizaremos o princípio variacional para estabelecermos a equação de campo da teoria.

- Variação da ação do campo gravitacional: $\Longrightarrow \delta S_{\Phi} = -\frac{2}{\kappa c} \int \sqrt{-q}\,\sqrt{V}\,\Box\Phi\,\delta\Phi\,d^4x\,.$

- Variação da ação da matéria: $\Longrightarrow \delta S_m = \frac{2}{c} \int \sqrt{-q}\,\chi\,\delta\Phi\,d^4x,$

- Utilizaremos o princípio variacional para estabelecermos a equação de campo da teoria.

- Variação da ação do campo gravitacional: $\Longrightarrow \delta S_\Phi = -\frac{2}{\kappa c}\int \sqrt{-q}\,\sqrt{V}\,\Box\Phi\,\delta\Phi\,d^4x\,.$

- Variação da ação da matéria: $\Longrightarrow \delta S_m = \frac{2}{c}\int \sqrt{-q}\,\chi\,\delta\Phi\,d^4x,$

- Portanto, a equação de movimento assume a forma

$$\sqrt{V}\,\Box\Phi = \kappa\,\chi\,. \tag{12}$$

- Utilizaremos o princípio variacional para estabelecermos a equação de campo da teoria.

- Variação da ação do campo gravitacional: $\Longrightarrow \delta S_{\Phi} = -\frac{2}{\kappa c}\int \sqrt{-q}\,\sqrt{V}\,\Box\Phi\,\delta\Phi\,d^4x\,.$

- Variação da ação da matéria: $\Longrightarrow \delta S_m = \frac{2}{c}\int \sqrt{-q}\,\chi\,\delta\Phi\,d^4x,$

- Portanto, a equação de movimento assume a forma

$$\sqrt{V}\,\Box\Phi = \kappa\,\chi\,. \qquad (12)$$

- A quantidade χ envolve acoplamentos não triviais entre o gradiente do campo escalar e o tensor de energia momento da matéria que permite o campo eletromagnético interagir com o campo gravitacional.

- Utilizaremos o princípio variacional para estabelecermos a equação de campo da teoria.

- Variação da ação do campo gravitacional: $\Longrightarrow \delta S_{\Phi} = -\frac{2}{\kappa c} \int \sqrt{-q}\, \sqrt{V}\, \Box\Phi\, \delta\Phi\, d^4x\,.$

- Variação da ação da matéria: $\Longrightarrow \delta S_m = \frac{2}{c} \int \sqrt{-q}\, \chi\, \delta\Phi\, d^4x,$

- Portanto, a equação de movimento assume a forma

$$\sqrt{V}\, \Box\Phi = \kappa\, \chi\,. \tag{12}$$

- A quantidade χ envolve acoplamentos não triviais entre o gradiente do campo escalar e o tensor de energia momento da matéria que permite o campo eletromagnético interagir com o campo gravitacional.

- Através do limite Newtoniano identificamos

$$\kappa \equiv \frac{8\pi G}{c^4}\,. \tag{13}$$

- Para fixarmos a forma da função $V(\Phi)$ iremos olhar para a solução estática e esfericamente simétrica da teoria.

- Para fixarmos a forma da função $V(\Phi)$ iremos olhar para a solução estática e esfericamente simétrica da teoria.

- Consideramos um sistema de coordenadas com simetria esférica e assumimos

$$\Phi = \Phi(r)$$

Verifica-se que a métrica gravitacional pode ser escrita como,

$$ds^2 = \frac{1}{\alpha} dt^2 - \frac{1}{\alpha^2 V} \left(1 - r \frac{d\Phi}{dr} \right)^2 dr^2 - r^2 \, d\Omega^2 \, . \tag{14}$$

- Note que a componente q_{00} , na aproximação de campo fraco, escreve-se como,

$$q_{00} = \frac{1}{\alpha} \approx 1 - 2\Phi_N = 1 - 2 \, \frac{\Phi_0}{r} \, , \tag{15}$$

- Para estarmos de acordo com as observações do sistema solar teremos de ter

$$q_{11} \approx \frac{1}{q_{00}} = -\alpha \, . \tag{16}$$

- Mas iremos extrapolar essa condição impondo

$$q_{11} = -\alpha \,. \tag{17}$$

- Mas iremos extrapolar essa condição impondo

$$q_{11} = -\alpha\,. \tag{17}$$

- Substituindo na equação dinâmica encontramos

$$V = \frac{(3-\alpha)^2}{4\alpha^3}\,, \qquad \Phi = \frac{1}{2}\ln\left(2\,C - 2\frac{\Phi_0}{r}\right)\,, \tag{18}$$

onde C e Φ_0 são constantes de integração.

- A análise do comportamento assimptótico implica que $C = 1/2$ e $\Phi_0 = MG/c^2 \equiv m$.

  Dessa forma, o elemento de linha será

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}dr^2 - r^2 d\Omega^2\,. \tag{19}$$

- A teoria geométrica-escalar descreve as interações gravitacionais a partir de um campo escalar Φ . Todos os campos da natureza interagem com o campo gravitacional somente através da métrica

$$q^{\mu\nu} = \alpha\eta^{\mu\nu} + \frac{\beta}{w}\,\partial^{\mu}\Phi\partial^{\nu}\Phi\,, \tag{20}$$

onde

$$\alpha = e^{-2\Phi} \qquad \text{e} \qquad \beta = \frac{(\alpha-1)(\alpha-9)}{4}\,. \tag{21}$$

- A equação de campo da teoria é dado por

$$\sqrt{V}\Box\Phi = \kappa\chi\,, \tag{22}$$

com

$$V = \frac{(\alpha-3)^2}{4\alpha^3} \qquad \text{e} \qquad \chi = -\frac{1}{2}\left[T + \left(2 - \frac{V'}{2V}\right)E + C^{\lambda}{}_{;\lambda}\right]. \tag{23}$$

Parte III: Cosmologia

- Consideramos um sistema de coordenadas esférico e assumimos,

$$\Phi = \Phi(T)$$

Verifica-se que a métrica gravitacional assume a forma

$$ds^2 = dt^2 - \frac{1}{\alpha}\left(dr^2 + d\sigma^2\right) \,, \tag{24}$$

e podemos escrever,

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left(dr^2 + d\sigma^2\right) \,, \quad \text{onde definimos} \quad a(t)^2 \equiv \frac{1}{\alpha} \,. \tag{25}$$

- Consideramos um sistema de coordenadas esférico e assumimos,

$$\Phi = \Phi(T)$$

Verifica-se que a métrica gravitacional assume a forma

$$ds^2 = dt^2 - \frac{1}{\alpha}\left(dr^2 + d\sigma^2\right) , \tag{24}$$

e podemos escrever,

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left(dr^2 + d\sigma^2\right) , \quad \text{onde definimos} \quad a(t)^2 \equiv \frac{1}{\alpha} . \tag{25}$$

- Impondo a homogeneidade implica em isotropia. Note que o problema da planeza nem sequer existe aqui.

- Para resolver a equação dinâmica impomos que $\sqrt{V} > 0$ para asegurar a positividade do determinante da métrica

$$\sqrt{-q} = \frac{\sqrt{-\gamma}}{\alpha^3 \sqrt{V}} \,, \tag{26}$$

- Portanto

$$\sqrt{V} = \begin{cases} -\dfrac{a}{4}\left(3a^2 - 1\right), & \text{se } \; 0 < a < \dfrac{1}{\sqrt{3}} \,, \quad \text{Small Universe (SU)} \\ \\ +\dfrac{a}{4}\left(3a^2 - 1\right), & \text{se } \; a > \dfrac{1}{\sqrt{3}} \,, \quad \text{Big Universe (BU)} \end{cases} \tag{27}$$

- Para resolver a equação dinâmica impomos que $\sqrt{V} > 0$ para asegurar a positividade do determinante da métrica

$$\sqrt{-q} = \frac{\sqrt{-\gamma}}{\alpha^3 \sqrt{V}} \,, \tag{26}$$

- Portanto

$$\sqrt{V} = \begin{cases} -\dfrac{a}{4}\,(3a^2 - 1)\,, & \text{se } 0 < a < \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,, \quad \text{Small Universe (SU)} \\ \\ +\dfrac{a}{4}\,(3a^2 - 1)\,, & \text{se } a > \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,, \quad \text{Big Universe (BU)} \end{cases} \tag{27}$$

- O conteúdo material será interpretado por um fluido perfeito barotrópico,

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)\; v^\mu v^\nu - p\, q^{\mu\nu}\,, \quad p = \lambda\,\rho\,. \tag{28}$$

$$\rho = \frac{\rho_0}{a^{3(1+\lambda)}}\,. \tag{29}$$

- Desenvolvendo a a equação dinâmica,

$$a\left(\frac{\ddot{a}}{a}+2\,\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) = -\,\kappa\,\rho_0\,\frac{(2-3\lambda+9\lambda\,a^2)}{a^{3(1+\lambda)}(3a^2-1)^{\,2}}\,,\ \text{para}\ \ 0<a<\frac{1}{\sqrt{3}}\,, \tag{30a}$$

$$a\left(\frac{\ddot{a}}{a}+2\,\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) = +\,\kappa\,\rho_0\,\frac{(2-3\lambda+9\lambda\,a^2)}{a^{3(1+\lambda)}(3a^2-1)^{\,2}}\,,\ \text{para}\ \ a>\frac{1}{\sqrt{3}}\,. \tag{30b}$$

- Desenvolvendo a a equação dinâmica,

$$a\left(\frac{\ddot{a}}{a}+2\,\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) = -\,\kappa\,\rho_0\,\frac{(2-3\lambda+9\lambda\,a^2)}{a^{3(1+\lambda)}(3a^2-1)^{\,2}}\,,\ \text{ para }\ 0<a<\frac{1}{\sqrt{3}}\,, \tag{30a}$$

$$a\left(\frac{\ddot{a}}{a}+2\,\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) = +\,\kappa\,\rho_0\,\frac{(2-3\lambda+9\lambda\,a^2)}{a^{3(1+\lambda)}(3a^2-1)^{\,2}}\,,\ \text{ para }\ a>\frac{1}{\sqrt{3}}\,. \tag{30b}$$

- Primeira integral é facilmente obtida e pode ser representada como

$$\dot{a}^2=\frac{M}{a^4}-2\kappa\rho_0\,\frac{a^{-2-3\lambda}}{|3\,a^2-1|}\,, \tag{31}$$

onde M é uma constante de integração.

Universo vazio

- Considerando $\rho_0 = 0$,

$$\dot{a}^2 = \frac{M}{a^4} \,. \tag{32}$$

- $M = 0 \quad \Rightarrow \quad$ Universo estático

- $M \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a(t) = \pm\, a_0\, t^{1/3}$

  Diferente da RG, pode-se ter um universo vazio e dinâmico com seção espacial nula.

Matéria não relativística

- Considerando

$$\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{a}^2 = \frac{M}{a^4} - 2\kappa\rho_0 \, \frac{a^{-2}}{|3\,a^2 - 1|} \, .$$

- O fator de escala possui extremos em cada uma das regiões, SU e BU,

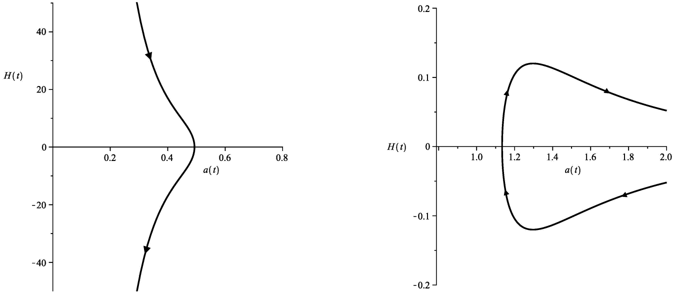
$$a_{SU} \leq \sqrt{\frac{1}{3}\left(1 + \frac{2\kappa\rho_0}{3M}\right)^{-1}} \, , \tag{33}$$

$$a_{BU} \geq \sqrt{\frac{1}{3}\left(1 - \frac{2\kappa\rho_0}{3M}\right)^{-1}} \, . \tag{34}$$

- O BU contém um *bounce* (ricochete) e, consequentemente, um regime de expansão acelerada para o universo.

Matéria não relativística

- Diagrama de fases relacionando o parâmetro de Hubble $\dot{a}/a$ e o fator de escala.



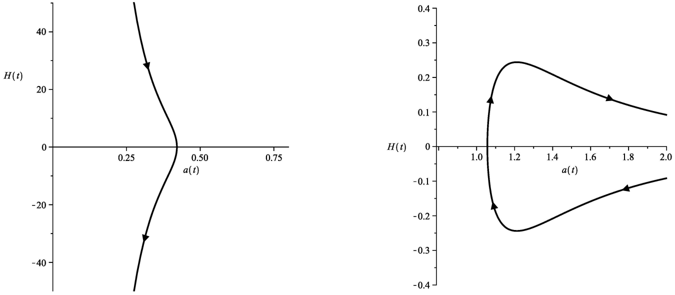
(a) Small Universe

(b) Big Universe

Figura: Diagramas de fase para um universo preenchido com matéria sem pressão. Utilizamos $M = 0.9\,\kappa\rho_0$ para podemos definir numericamente os valores extremos do fator de escala.

Radiação

- O caso da radiação, onde $\lambda = 1/3$, é muito similar ao caso de poeira.

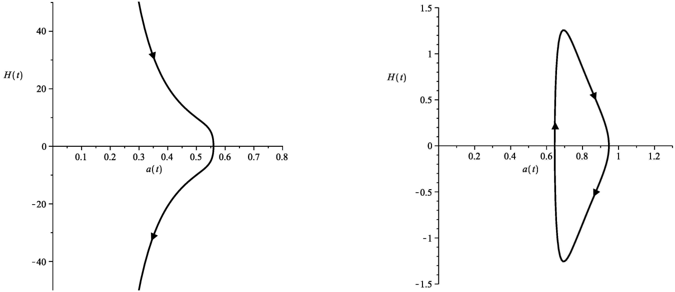


(a) Small Universe **(b)** Big Universe

Figura: Diagramas de fase para um universo preenchido com radiação. Utilizamos $M = 0.9\,\kappa\rho_0$ para podemos definir numericamente os valores extremos do fator de escala.

Energia Escura

- Consideremos o caso de energia escura onde $\lambda = -1$ e plotamos o diagrama de fase correspondente.



(a) Small Universe **(b)** Big Universe

Figura: Diagramas de fase para um universo preenchido com energia escura. Utilizamos $M = 0.9\,\kappa\rho_0$ para podemos definir numericamente os valores extremos do fator de escala.

- As perturbações gravitacionais na GSG correspondem a perturbações do campo escalar

$$\Phi = \Phi_0 + \delta\Phi \,. \tag{33}$$

- A quantidade $\delta\Phi$ é por definição uma perturbação real.

- No caso da cosmologia, as componentes da métrica perturbada serão,

$$\delta q_{00} = -\frac{4}{(3a^2-1)}\,\delta\Phi\,, \tag{34a}$$

$$\delta q_{0i} = -\frac{(a^2-1)(9a^2-1)}{2\,H}\,\delta\Phi_{,i} \tag{34b}$$

$$\delta q_{ij} = -2a^2\,\delta\Phi\,\delta_{ij}\,. \tag{34c}$$

- Equação dinâmica perturbada

$$\delta\ddot{\Phi} + 2H\,\frac{(9a^2-2)}{(3a^2-1)}\,\delta\dot{\Phi} + \left[3\kappa\frac{\chi_0}{a}\,\frac{(3a^2+1)}{(3a^2-1)^2} - \frac{12a^2H}{(3a^2-1)^2} + \frac{(3a^2-1)^2k^2}{4a^4}\right]\delta\Phi =$$
$$= \frac{\rho}{a(3a^2-1)}\left[\frac{2\,\delta}{3a^2-1} + 3\lambda\,\delta - \frac{12a^2\delta\Phi}{(3a^2-1)^2} - \frac{(a^2-1)(9a^2-1)}{4a^4H^2}(HV-\delta\Phi)k^2\right],$$

- Equação de Euller perturbada

$$\dot{V} + \frac{2\delta\Phi}{3a^2-1} - \frac{\lambda\delta}{1+\lambda} - 3\lambda H\,V = 0 \tag{35}$$

- Equação da continuidade perturbada

$$\dot{\delta} + (1+\lambda)\left\{3\,\delta\dot{\Phi} + \left[\frac{(a^2-1)(9a^2-1)}{4a^4H}\,\delta\Phi + \frac{V}{a^2}\right]k^2\right\} = 0 \tag{36}$$

- Onde usamos que

$$\delta\Phi \to \delta\Phi_k(t)Q_k(\vec{x})\,, \quad \delta \to \delta_k(t)Q_k(\vec{x})\,, \quad \delta v_i \to \delta v_k(t)Q_{k\,,i}(x) \quad \delta^{ij}\,Q_{\,,ij} = k^2\,Q_k\,,$$

- Podemos resolver este sistema de equações considerando um t grande

$$a \gg 1 \quad \Rightarrow \quad a(t) \propto t^{1/3}\,. \tag{37}$$

- Analisando o caso de poeira ($\lambda = 0$) pode-se constatar que o contraste de densidade possui modos de crescimentos que são diretamente proporcionais ao fator de escala do universo,

$$\delta \propto \; a(t) \tag{38}$$

Conclusões

- A GSG estabelece uma nova teoria escalar da gravitação que não apresenta os problemas das propostas antigas.
- Na verdade, a GSG é um método pelo qual pode-se construir uma série de teorias para descrever os processos gravitacionais.
- Desenvolvemos um caso específico onde a solução esfericamente simétrica acaba sendo exatamente o espaço-tempo de Schwarzschild.
- No modelo cosmológico com $\Phi = \Phi(t)$, pudemos observar que;
  - Duas soluções desconexas existem: SU e BU (mais realista).
  - Poeira e radiação naturalmente produzem um bounce (universo não singular e com expansão acelerada).
  - Energia escura representa um universo cíclico não singular.
  - Um robusta análise das perturbações cosmológicas indica que as instabilidades gravitacionais são possíveis na GSG.

Perspectivas Futuras

FIM!