Deformação das Equações de Friedmann pelo uso das Derivadas Fracionárias: Caso de um Universo em Expansão Preenchido pela Matéria

HOUNDJO M. J. Stéphane

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE NATITINGOU

(Université d'Abomey)

LABORATOIRE DE COSMOLOGIE ET GRAVITATION - IMSP

sthoundjo@yahoo.fr

Seminários do PPGCosmo/Núcleo Cosmo - UFES

25/06/2021

Algumas Motivações

- Na área da viscoelasticidade, a relação que dá conta da dissipação é dada por $\sigma = \frac{dx}{dt}$. Os estudos monstram que nos materiais viscoelásticos a dissipação da dinâmica caótica se explica melhor quando $\sigma = \frac{d^{\alpha}x}{dt^{\alpha}}$, com $\alpha \in]0; 1[$.

- Mainoudi Francesco (2010), ***Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity***, Imperial College Press. Doi: 10.1142/p614.

- P. R. Nwagoum Twa et al, ***Chaotic Vibrations of nonlinear viscoelastic plate with fractional derivative model***, Mech. Research Commun. **97**, 8 (2019).

Algumas Motivações

- Num circuito RLC o modelo que se encaixa bem com a dinâmica dum capacitor não linear é o modelo que contém a derivação de ordem fracionária na expressão da intensidade i da corrente em termo da carga q,

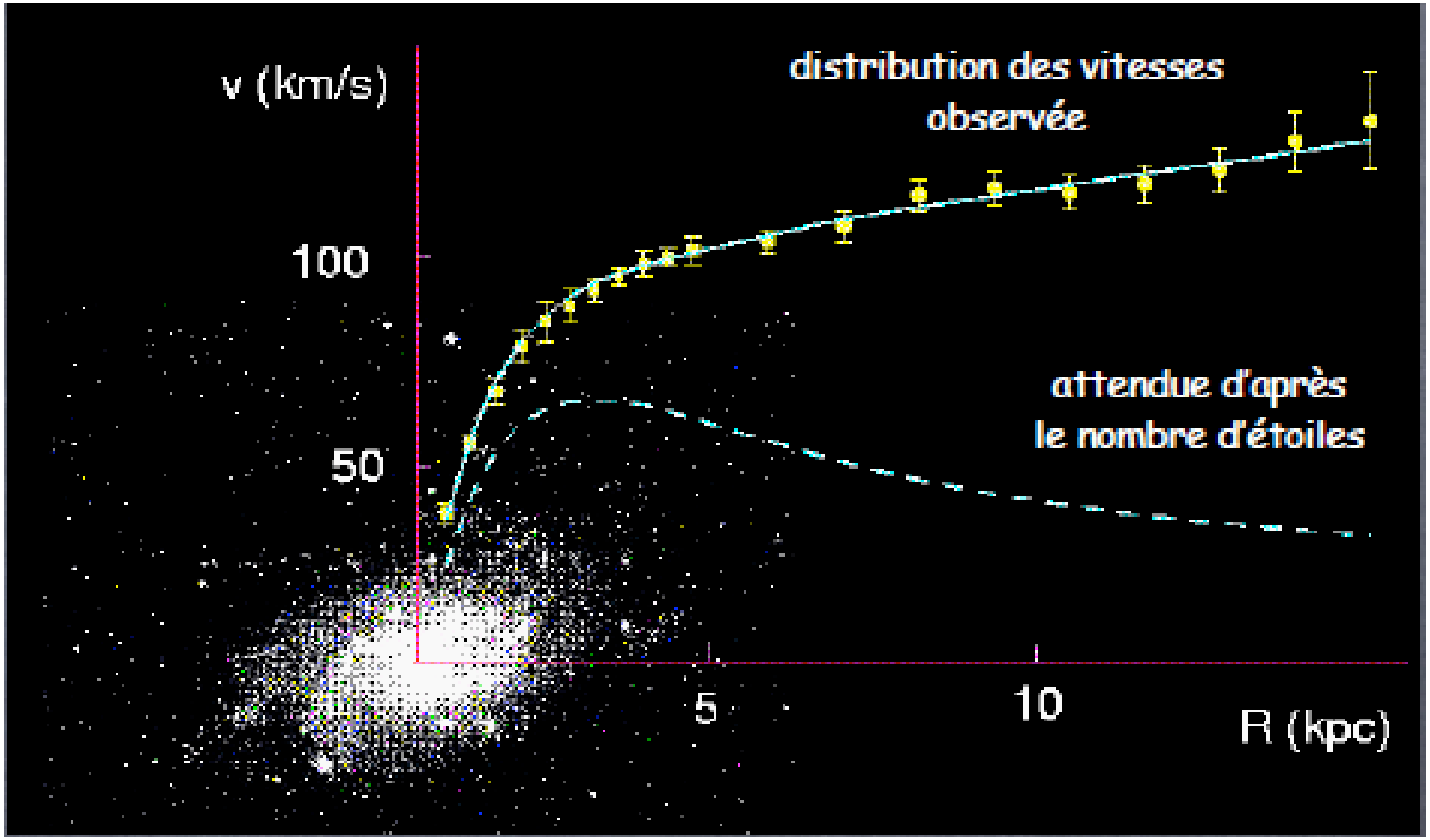
$$i = \pm \frac{d^{\alpha} q}{dt^{\alpha}}$$

M. E. Fouda, A. S. Elwakil, A. G. Radwan, A. Allagui (2006), ***Power and Energy Analysis of fractional-order electrical energy storage devices***. Energy **111** (2006) 785-792.

Grandes questões da Astrofísica e da Cosmologia contemporânea

Premeira Questão

Curvas de rotação das galáxias.



Tentativas de explicação

- Matéria Escura

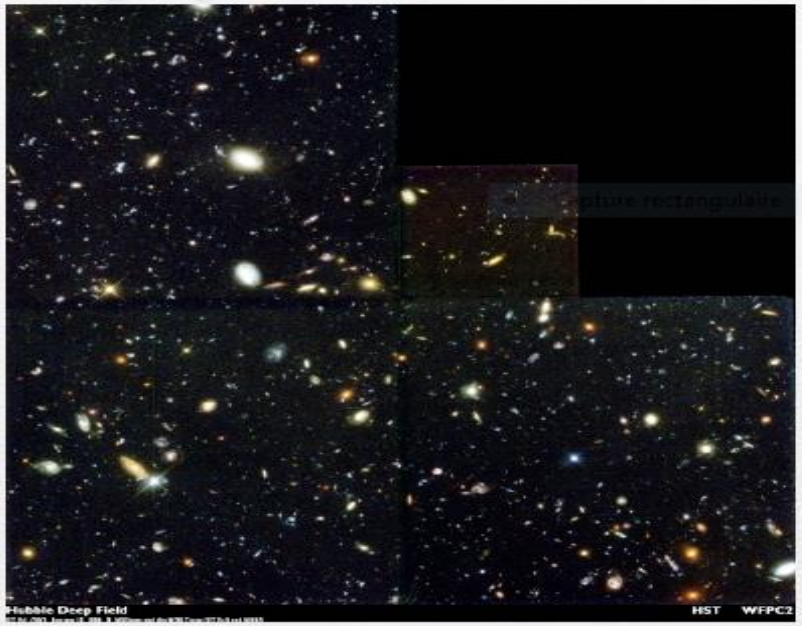
Tentativas de explicação

- Matéria Escura

- Teoria MOND (MOdified Newtonian Dynamics): Dinâmica Newtoniana Modificada

Segunda Questão

Notre univers: quelques centaines de milliards de galaxies



une répartition qui reflète l'influence de la gravité

étoiles ⊂ galaxies ⊂ groupes de galaxies ⊂ amas de galaxies ⊂ superamas

les plus grosses structures connues

Tentativas de explicação

- Energia Escura

Tentativas de explicação

- Energia Escura
- Teorias Modificadas da Gravidade (f(R), f(G), f(T), etc…)

Tentativas de explicação

- Energia Escura
- Teorias Modificadas da Gravidade (f(R), f(G), f(T), etc…)
- Deformação das equações de FRW pelo uso das Derivadas Fracionárias (Objeto dessa presentção).

O Artigo Usado Para Esta Presentação

E. Barrientos, S. Mendoza and P. Padilla, *Extending Friedmann equations using fractional derivatives using a Last Step Modification Technique: the case of a matter dominated accelerated expanding universe*. Symmetry **13**, 17 (2021); https://doi.org/10.3390/sym13020174

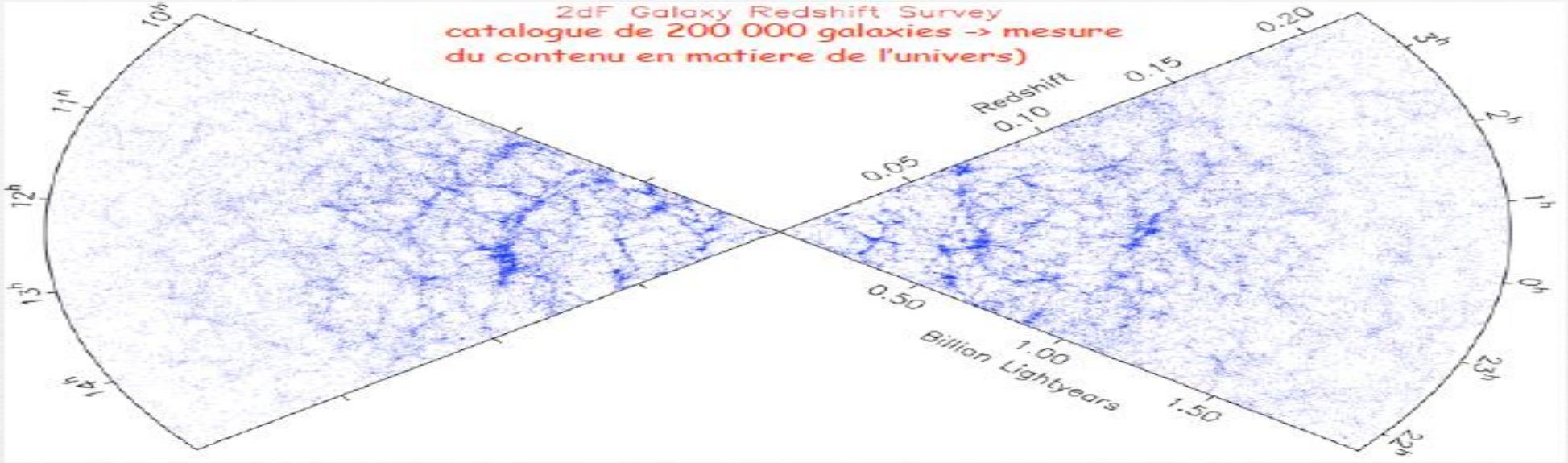
A Cosmologia padrão

- **A ação de Einstein-Hilbert**

$$\boldsymbol{S = \frac{1}{16\pi G}\int \sqrt{-g}(R - 2\Lambda)d^4x + S_m} \qquad \textbf{(1)}$$

Homogeneidade et Isotropia

portion observable de l'univers: ~ 3000 Mpc
(1 Mpc ≃ 3.26×10^{6} années lumière ≃ 3×10^{24}cm)



la caractéristique principale de notre univers:
homogène et isotrope à grande échelle (>100 Mpc)

aux échelles < 100 Mpc: structure très
inhomogène (galaxies, amas, super-amas)

A Cosmologia padrão

- **Ação de Einstein-Hilbert**

$$S = \frac{1}{16\pi G}\int \sqrt{-g}(R - 2\Lambda)d^4x + S_m \qquad (1)$$

- **Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker**

$$ds^2 = c^2dt^2 - a^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2d\theta^2 + r^2sin^2\theta d\varphi^2\right) \qquad (2)$$

A Cosmologia padrão

- **Equação de Einstein com CC**

$$\boldsymbol{R}_{\mu\nu} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{g}_{\mu\nu} - \Lambda\boldsymbol{g}_{\mu\nu} = \mathbf{8}\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{G}\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\mu}\nu} \qquad \textbf{(3)}$$

A Cosmologia padrão

- **Equação de Einstein com CC**

$$\boldsymbol{R}_{\mu\nu} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{g}_{\mu\nu} - \Lambda\boldsymbol{g}_{\mu\nu} = \mathbf{8}\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{G}\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\mu}\nu} \qquad \textbf{(3)}$$

- **Equações de Friedmann**

$$\frac{\dot{\boldsymbol{a}}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{k}\boldsymbol{c}^{\mathbf{2}}}{\boldsymbol{a}^{\mathbf{2}}} = \frac{\mathbf{8}\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{G}\boldsymbol{\rho}+\Lambda\boldsymbol{c}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{3}} \qquad \textbf{(4)}$$

$$\frac{\ddot{\boldsymbol{a}}}{\boldsymbol{a}} = -\frac{\mathbf{4}\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{G}\boldsymbol{\rho}-\Lambda\boldsymbol{c}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{3}} \qquad \textbf{(5)}$$

A Cosmologia padrão

. Parâmetro de Hubble

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} \qquad (6)$$

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho + \Lambda c^2}{3} - \frac{kc^2}{a^2} \qquad (7)$$

A Cosmologia padrão

. Parâmetro de Hubble

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} \qquad (6)$$

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho + \Lambda c^2}{3} - \frac{kc^2}{a^2} \qquad (7)$$

. Parâmetros de densidade

$$1 = \Omega_m + \Omega_\Lambda + \Omega_k \qquad (8)$$

com

$$\Omega_m = \frac{8\pi G\rho}{3H^2}, \quad \Omega_\Lambda = \frac{c^2\Lambda}{3H^2}, \quad \Omega_k = -\frac{kc^2}{H^2a^2} \qquad (9)$$

A Cosmologia padrão

. Parâmetros Cosmográficos

A Cosmologia padrão

- Parâmetros Cosmográficos

  - Parâmetro de deceleração

$$q = -\frac{1}{H^2}\frac{\ddot{a}}{a} \qquad (10)$$

A Cosmologia padrão

- Parâmetros Cosmográficos

- - Parâmetro de deceleração

$$q = -\frac{1}{H^2}\frac{\ddot{a}}{a} \qquad (10)$$

ou da equação (5): $\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G\rho - \Lambda c^2}{3}$, obtemos:

$$q = \frac{\Omega_m}{2} - \Omega_\Lambda \qquad (11)$$

A Cosmologia padrão

- Parâmetros Cosmográficos

- Parâmetro de deceleração

$$q = -\frac{1}{H^2}\frac{\ddot{a}}{a} \qquad (10)$$

ou da equação (5): $\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G\rho - \Lambda c^2}{3}$, obtemos :

$$q = \frac{\Omega_m}{2} - \Omega_\Lambda \qquad (11)$$

Também, derivando a equação (5) com respeito ao tempo, temos

$$\frac{\dddot{a}}{a} - \frac{\ddot{a}\dot{a}}{a^2} = -\frac{4\pi G\dot{\rho}}{3} \qquad (12)$$

1. A Cosmologia padrão

- Jerk (j)

$$j = \frac{1}{H^3}\frac{\ddot{a}}{a} \qquad (13)$$

A Cosmologia padrão

- Jerk (j)

$$j = \frac{1}{H^3}\frac{\ddot{a}}{a} \qquad (13)$$

Lei de conservação do conteúdo total:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \qquad (14)$$

A Cosmologia padrão

- Jerk (j)

$$j = \frac{1}{H^3}\frac{\ddot{a}}{a} \qquad (13)$$

Lei de conservação do conteúdo total :

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \qquad (14)$$

Universo dominado pela matéria ordinária:

$$\dot{\rho} = -3H\rho \Rightarrow \rho \propto a^{-3} \qquad (15)$$

A Cosmologia padrão

Introduzindo **(15):** $\dot{\rho} = -3H\rho$ em **(12):** $\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\ddot{a}\dot{a}}{a^2} = -\frac{4\pi G\dot{\rho}}{3}$, obtemos

$$j = \frac{3}{2}\Omega_m - q \qquad \textbf{(16)}$$

A Cosmologia padrão

Introduzindo **(15):** $\dot{\rho} = -3H\rho$ em **(12):** $\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\ddot{a}\dot{a}}{a^2} = -\frac{4\pi G\dot{\rho}}{3}$, obtemos

$$j = \frac{3}{2}\Omega_m - q \qquad \textbf{(16)}$$

Que, usando **(11):** $q = \frac{\Omega_m}{2} - \Omega_\Lambda$, pode ser escrito sob a forma

$$j = \Omega_m + \Omega_\Lambda \qquad \textbf{(17)}$$

A Cosmologia padrão

Introduzindo **(15):** $\dot{\rho} = -3H\rho$ em **(12):** $\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\ddot{a}\dot{a}}{a^2} = -\frac{4\pi G\dot{\rho}}{3}$, obtemos

$$j = \frac{3}{2}\Omega_m - q \qquad \textbf{(16)}$$

Que, usando **(11):** $q = \frac{\Omega_m}{2} - \Omega_\Lambda$, pode ser escrito sob a forma

$$j = \Omega_m + \Omega_\Lambda \qquad \textbf{(17)}$$

Derivando mais uma vez **(12)** com respeito ao tempo, obtemos

$$\frac{a^{(4)}}{a} - 2\frac{\ddot{a}\dot{a}}{a^2} + 2\frac{\ddot{a}\dot{a}^2}{a^3} - \left(\frac{\ddot{a}}{a}\right)^2 = -\frac{4\pi G\ddot{\rho}}{3} \qquad \textbf{(18)}$$

A Cosmologia padrão

- Snap (s)

$$s = \frac{1}{H^4}\frac{a^{(4)}}{a} \qquad (19)$$

A Cosmologia padrão

- Snap (s)

$$s = \frac{1}{H^4}\frac{a^{(4)}}{a} \qquad (19)$$

Derivando (15): $\dot{\rho} = -3H\rho$ com respeito ao tempo, obtemos

$$\ddot{\rho} = -3\left(\dot{\rho}H + \rho\dot{H}\right) = -3\left(-3\rho H^2 + \rho\dot{H}\right) \qquad (20)$$

A Cosmologia padrão

- Snap (s)

Usando (18): $\frac{a^{(4)}}{a} - 2\frac{\dddot{a}\dot{a}}{a^2} + 2\frac{\ddot{a}\dot{a}^2}{a^3} - \left(\frac{\ddot{a}}{a}\right)^2 = -\frac{4\pi G\ddot{\rho}}{3}$, (6): $H(t) = \frac{\dot{a}}{a}$, (10): $q = -\frac{1}{H^2}\frac{\ddot{a}}{a}$, (13): $j = \frac{1}{H^3}\frac{\dddot{a}}{a}$
e $\dot{H} = -H^2(1+q)$, obtemos

$$s = -\frac{3}{2}\Omega_m(4+q) + 2j + 2q + q^2 \qquad (21)$$

1. A Cosmologia padrão

- Snap (s)

Usando (18): $\frac{a^{(4)}}{a} - 2\frac{\ddot{a}\dot{a}}{a^2} + 2\frac{\ddot{a}\dot{a}^2}{a^3} - \left(\frac{\ddot{a}}{a}\right)^2 = -\frac{4\pi G\ddot{\rho}}{3}$, (6): $H(t) = \frac{\dot{a}}{a}$, (10): $q = -\frac{1}{H^2}\frac{\ddot{a}}{a}$, (13): $j = \frac{1}{H^3}\frac{\dddot{a}}{a}$
e $\dot{H} = -H^2(1+q)$, obtemos

$$s = -\frac{3}{2}\Omega_m(4+q) + 2j + 2q + q^2 \qquad (21)$$

ou em termos dos parâmetros de densidade, temos

$$s = -3\Omega_m - \frac{1}{2}\Omega_m^2 + \frac{1}{2}\Omega_m\Omega_\Lambda + \Omega_\Lambda^2 \qquad (22)$$

SN Ia:

Magnitude aparente:

$$\mu(z) = 5\log\left[\frac{H_0 d_L(z)}{c}\right] - 5\log h(z) + 45.3856$$

$$d_L(z) = \frac{c}{H_0}\left[\begin{array}{c} z + \frac{1}{2}(1-q_0)z^2 - \frac{1}{6}\left(1 - q_0 - 3q_0^2 + j_0\right)z^3 + \\ + \frac{1}{24}\left(2 - 2q_0 - 15q_0^2 - 15q_0^3 + 5j_0 + 10q_0 j_0 + s_0\right)z^4 + \cdots \end{array}\right]$$

$$h = H_0.(100km)^{-1}s^{-1}Mpc^{-1}$$

$$q = \frac{\Omega_m}{2} - \Omega_\Lambda, \quad j = \Omega_m + \Omega_\Lambda, \quad s = -3\Omega_m - \frac{1}{2}\Omega_m^2 + \frac{1}{2}\Omega_m\Omega_\Lambda + \Omega_\Lambda^2$$

Deformação das Equações de Friedmann pelo uso das Derivadas Fracionárias: Caso de um Universo em Expansão Preenchido pela Matéria

Equações Fracionárias de Friedmann

$$\frac{\dot{a}^2+kc^2}{a^2}=\frac{8\pi G\rho+\Lambda c^2}{3} \overset{k=0}{\Longrightarrow} \left(\frac{D^{\gamma}a}{Dt^{\gamma}}\right)^2=\kappa a^2\left(\frac{8\pi G\rho+\Lambda c^2}{3}\right) \qquad (23)$$

Deformação das Equações de Friedmann pelo uso das Derivadas Fracionárias: Caso de um Universo em Expansão Preenchido pela Matéria

Equações Fracionárias de Friedmann

$$\frac{\dot{a}^2+kc^2}{a^2}=\frac{8\pi G\rho+\Lambda c^2}{3} \quad \overset{k=0}{\Longrightarrow} \quad \left(\frac{D^\gamma a}{Dt^\gamma}\right)^2=\kappa a^2\left(\frac{8\pi G\rho+\Lambda c^2}{3}\right) \qquad (23)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a}=-\frac{4\pi G\rho-\Lambda c^2}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{D^\gamma}{Dt^\gamma}\left(\frac{D^\gamma a}{Dt^\gamma}\right)=\kappa a\left(-\frac{4\pi G\rho-\Lambda c^2}{3}\right) \qquad (24)$$

Deformação das Equações de Friedmann pelo uso das Derivadas Fracionárias: Caso de um Universo em Expansão Preenchido pela Matéria

Equações Fracionárias de Friedmann

$$\frac{\dot{a}^2+kc^2}{a^2}=\frac{8\pi G\rho+\Lambda c^2}{3} \overset{k=0}{\Longrightarrow} \left(\frac{D^\gamma a}{Dt^\gamma}\right)^2=\kappa a^2\left(\frac{8\pi G\rho+\Lambda c^2}{3}\right) \qquad (23)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a}=-\frac{4\pi G\rho-\Lambda c^2}{3} \Rightarrow \frac{D^\gamma}{Dt^\gamma}\left(\frac{D^\gamma a}{Dt^\gamma}\right)=\kappa a\left(-\frac{4\pi G\rho-\Lambda c^2}{3}\right) \qquad (24)$$

Aqui, em geral $D^\gamma D^\gamma \neq D^{2\gamma}$.

Deformação das Equações de Friedmann pelo uso das Derivadas Fracionárias: Caso de um Universo em Expansão Preenchido pela Matéria

Equações Fracionárias de Friedmann

$$\frac{\dot{a}^2+kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G\rho+\Lambda c^2}{3} \quad \overset{k=0}{\Longrightarrow} \quad \left(\frac{D^\gamma a}{Dt^\gamma}\right)^2 = \kappa a^2 \left(\frac{8\pi G\rho+\Lambda c^2}{3}\right) \qquad \textbf{(23)}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G\rho-\Lambda c^2}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{D^\gamma}{Dt^\gamma}\left(\frac{D^\gamma a}{Dt^\gamma}\right) = \kappa a \left(-\frac{4\pi G\rho-\Lambda c^2}{3}\right) \qquad \textbf{(24)}$$

Aqui, em geral $D^\gamma D^\gamma \neq D^{2\gamma}$**;** também $\kappa = A\left(\frac{a_0}{c}\right)^{2(\gamma-1)}$

Deformação das Equações de Friedmann pelo uso das Derivadas Fracionárias: Caso de um Universo em Expansão Preenchido pela Matéria

- **Parâmetro fracionário de Hubble**

$$H^* = \frac{1}{a}\frac{D^\gamma a}{Dt^\gamma} \qquad (25)$$

Deformação das Equações de Friedmann pelo uso das Derivadas Fracionárias: Caso de um Universo em Expansão Preenchido pela Matéria

- **Parâmetro fracionário de Hubble**

$$\boldsymbol{H^* = \frac{1}{a}\frac{D^\gamma a}{Dt^\gamma}} \qquad \textbf{(25)}$$

Dividindo (23): $\left(\frac{D^\gamma a}{Dt^\gamma}\right)^2 = \kappa a^2 \left(\frac{8\pi G\rho + \Lambda c^2}{3}\right)$ por H^2, obtemos:

$$\left(\frac{H^*}{H}\right)^2 = A\left(\frac{a_0}{c}\right)^{2(\gamma-1)}(\Omega_m + \Omega_\Lambda) \qquad \textbf{(26)}$$

Deformação das Equações de Friedmann pelo uso das Derivadas Fracionárias: Caso de um Universo em Expansão Preenchido pela Matéria

- **Parâmetro fracionário de Hubble**

$$\Omega_m^* = A\left(\frac{a_0}{c}\right)^{2(\gamma-1)}\Omega_m\left(\frac{H}{H^*}\right)^2 \qquad (27)$$

$$\Omega_\Lambda^* = A\left(\frac{a_0}{c}\right)^{2(\gamma-1)}\Omega_\Lambda\left(\frac{H}{H^*}\right)^2 \qquad (28)$$

Deformação das Equações de Friedmann pelo uso das Derivadas Fracionárias: Caso de um Universo em Expansão Preenchido pela Matéria

- **Parâmetro fracionário de Hubble**

$$\Omega_m^* = A\left(\frac{a_0}{c}\right)^{2(\gamma-1)}\Omega_m\left(\frac{H}{H^*}\right)^2 \qquad (27)$$

$$\Omega_\Lambda^* = A\left(\frac{a_0}{c}\right)^{2(\gamma-1)}\Omega_\Lambda\left(\frac{H}{H^*}\right)^2 \qquad (28)$$

$$\Omega_m^* + \Omega_\Lambda^* = 1 \qquad (29)$$

Deformação das Equações de Friedmann pelo uso das Derivadas Fracionárias: Caso de um Universo em Expansão Preenchido pela Matéria

Universo essencialmente preenchido pela matéria

$$\boldsymbol{a(t) = a_1 t^n} \qquad \textbf{(30)}$$

Fórmula de derivação de Ordem Não Inteira

$$\boldsymbol{f(t) = t^n}$$

Fórmula de derivação de Ordem Não Inteira

$$\boldsymbol{f(t) = t^n}$$

A derivada de ordem $\boldsymbol{k}$ da função $\boldsymbol{f(t)}$ com respeito a $\boldsymbol{t}$ dá

Fórmula de derivação de Ordem Não Inteira

$$\boldsymbol{f(t) = t^n}$$

A derivada de ordem k da função $f(t)$ com respeito a t dá

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = n(n-1)t^{n-2}\,, \quad \frac{d^3 f}{dt^3} = n(n-1)(n-2)t^{n-3}, \qquad \frac{d^4 f}{dt^4} = n(n-1)(n-2)(n-3)t^{n-4}$$

Fórmula de derivação de Ordem Não Inteira

$$f(t) = t^n$$

A derivada de ordem k da função $f(t)$ com respeito a t dá

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = n(n-1)t^{n-2}\,, \quad \frac{d^3 f}{dt^3} = n(n-1)(n-2)t^{n-3}, \quad \frac{d^4 f}{dt^4} = n(n-1)(n-2)(n-3)t^{n-4}$$

$$\frac{d^k f}{dt^k} = n(n-1)(n-2)\ldots\big(n-(k-1)\big)t^{n-k}$$

Fórmula de derivação de Ordem Não Inteira

$$f(t) = t^n$$

A derivada de ordem k da função $f(t)$ com respeito a t dá

$$\frac{d^2f}{dt^2} = n(n-1)t^{n-2}\,, \quad \frac{d^3f}{dt^3} = n(n-1)(n-2)t^{n-3}, \quad \frac{d^4f}{dt^4} = n(n-1)(n-2)(n-3)t^{n-4}$$

$$\frac{d^kf}{dt^k} = n(n-1)(n-2)\ldots\big(n-(k-1)\big)t^{n-k}$$

$$\frac{d^kf}{dt^k} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)\,t^{n-k}$$

Fórmula de derivação de Ordem Não Inteira

$$f(t) = t^n$$

A derivada de ordem k da função $f(t)$ com respeito a t dá

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = n(n-1)t^{n-2}\,, \quad \frac{d^3 f}{dt^3} = n(n-1)(n-2)t^{n-3}, \quad \frac{d^4 f}{dt^4} = n(n-1)(n-2)(n-3)t^{n-4}$$

$$\frac{d^k f}{dt^k} = n(n-1)(n-2)\ldots\big(n-(k-1)\big)t^{n-k}$$

$$\frac{d^k f}{dt^k} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)\,t^{n-k}$$

$$\frac{d^k f}{dt^k} = \frac{n!}{(n-k)!}\,t^{n-k}$$

Fórmula de derivação de Ordem Não Inteira

$$\Gamma(\boldsymbol{n}+\mathbf{1}) = \boldsymbol{n}\Gamma(\boldsymbol{n})$$

Fórmula de derivação de Ordem Não Inteira

$$\Gamma(\boldsymbol{n}+\mathbf{1}) = \boldsymbol{n}\Gamma(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})(\boldsymbol{n}-\mathbf{2})\ldots(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k}+\mathbf{1})\Gamma(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k}+\mathbf{1})$$

Fórmula de derivação de Ordem Não Inteira

$$\Gamma(\boldsymbol{n}+\mathbf{1}) = \boldsymbol{n}\Gamma(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})(\boldsymbol{n}-\mathbf{2})\ldots(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k}+\mathbf{1})\Gamma(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k}+\mathbf{1})$$

$$= \frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})!}\Gamma(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k}+\mathbf{1})$$

Fórmula de derivação de Ordem Não Inteira

$$\Gamma(\boldsymbol{n}+\mathbf{1}) = \boldsymbol{n}\Gamma(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})(\boldsymbol{n}-\mathbf{2})\ldots(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k}+\mathbf{1})\Gamma(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k}+\mathbf{1})$$

$$= \frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})!}\Gamma(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k}+\mathbf{1})$$

Ou

$$\frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})!} = \frac{\Gamma(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})}{\Gamma(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k}+\mathbf{1})}$$

Fórmula de derivação de Ordem Não Inteira

$$\Gamma(\boldsymbol{n}+\mathbf{1}) = \boldsymbol{n}\Gamma(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})(\boldsymbol{n}-\mathbf{2})\ldots(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k}+\mathbf{1})\Gamma(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k}+\mathbf{1})$$

$$= \frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})!}\Gamma(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k}+\mathbf{1})$$

Ou

$$\frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})!} = \frac{\Gamma(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})}{\Gamma(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k}+\mathbf{1})}$$

Assim, temos

$$\frac{\boldsymbol{D}^{\gamma}\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{D}\boldsymbol{t}^{\gamma}} = \frac{\Gamma(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})}{\Gamma(\boldsymbol{n}-\gamma+\mathbf{1})}\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{n}-\gamma}$$

Deformação das Equações de Friedmann pelo uso das Derivadas Fracionárias: Caso de um Universo em Expansão Preenchido pela Matéria

Universo essencialmente preenchido pela matéria

$$\boldsymbol{a(t) = a_1 t^n} \qquad \textbf{(30)}$$

$$\boldsymbol{H^* = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\gamma+1)} t^{-\gamma}} \qquad \textbf{(31)}$$

Deformação das Equações de Friedmann pelo uso das Derivadas Fracionárias: Caso de um Universo em Expansão Preenchido pela Matéria

Universo essencialmente preenchido pela matéria

$$\boldsymbol{a(t) = a_1 t^n} \qquad \textbf{(30)}$$

$$\boldsymbol{H^* = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\gamma+1)} t^{-\gamma}} \qquad \textbf{(31)}$$

$$\boldsymbol{\frac{H^*}{H} = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-\gamma+1)} t^{1-\gamma} = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-\gamma+1)} \left(\frac{H}{n}\right)^{\gamma-1}} \qquad \textbf{(32)}$$

Deformação das Equações de Friedmann pelo uso das Derivadas Fracionárias: Caso de um Universo em Expansão Preenchido pela Matéria

Universo essencialmente preenchido pela matéria

$\frac{H^*}{H} = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-\gamma+1)}\left(\frac{H}{n}\right)^{\gamma-1}$ em $\left(\frac{H^*}{H}\right)^2 = A\left(\frac{a_0}{c}\right)^{2(\gamma-1)}(\Omega_m + \Omega_\Lambda)$

Deformação das Equações de Friedmann pelo uso das Derivadas Fracionárias: Caso de um Universo em Expansão Preenchido pela Matéria

Universo essencialmente preenchido pela matéria

$\frac{H^*}{H} = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-\gamma+1)}\left(\frac{H}{n}\right)^{\gamma-1}$ em $\left(\frac{H^*}{H}\right)^2 = A\left(\frac{a_0}{c}\right)^{2(\gamma-1)}(\Omega_m + \Omega_\Lambda)$

$$H = B\frac{a_0}{c}(\Omega_m)^{\frac{1}{2(\gamma-1)}} \qquad (33)$$

Deformação das Equações de Friedmann pelo uso das Derivadas Fracionárias: Caso de um Universo em Expansão Preenchido pela Matéria

Universo essencialmente preenchido pela matéria

$\frac{H^*}{H} = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-\gamma+1)}\left(\frac{H}{n}\right)^{\gamma-1}$ em $\left(\frac{H^*}{H}\right)^2 = A\left(\frac{a_0}{c}\right)^{2(\gamma-1)}(\Omega_m + \Omega_\Lambda)$

$$H = B\frac{a_0}{c}(\Omega_m)^{\frac{1}{2(\gamma-1)}} \qquad (33)$$

$$B = \left[\frac{\Gamma(n+1-\gamma)}{\Gamma(n)}\right]^{\frac{1}{\gamma-1}} nA^{\frac{1}{2(\gamma-1)}} \qquad (34)$$

Deformação das Equações de Friedmann pelo uso das Derivadas Fracionárias: Caso de um Universo em Expansão Preenchido pela Matéria

Universo essencialmente preenchido pela matéria

$\frac{H^*}{H} = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-\gamma+1)}\left(\frac{H}{n}\right)^{\gamma-1}$ em $\left(\frac{H^*}{H}\right)^2 = A\left(\frac{a_0}{c}\right)^{2(\gamma-1)}(\Omega_m + \Omega_\Lambda)$

$$H = B\frac{a_0}{c}(\Omega_m)^{\frac{1}{2(\gamma-1)}} \qquad (33)$$

$$B = \left[\frac{\Gamma(n+1-\gamma)}{\Gamma(n)}\right]^{\frac{1}{\gamma-1}} nA^{\frac{1}{2(\gamma-1)}} \qquad (34)$$

$$A = \left[\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+1-\gamma)}\right]^2 n^{2(1-\gamma)} \qquad (35)$$

Deformação das Equações de Friedmann pelo uso das Derivadas Fracionárias: Caso de um Universo em Expansão Preenchido pela Matéria

Universo essencialmente preenchido pela matéria

$$\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{a_0}}{\boldsymbol{c}} (\Omega_{\boldsymbol{m}})^{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}(\gamma-\mathbf{1})}} \qquad \textbf{(36)}$$

Deformação das Equações de Friedmann pelo uso das Derivadas Fracionárias: Caso de um Universo em Expansão Preenchido pela Matéria

Universo essencialmente preenchido pela matéria

$$\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{a_0}}{\boldsymbol{c}} (\Omega_{\boldsymbol{m}})^{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}(\gamma-\mathbf{1})}} \qquad \textbf{(36)}$$

Determinação de q^*

Deformação das Equações de Friedmann pelo uso das Derivadas Fracionárias: Caso de um Universo em Expansão Preenchido pela Matéria

Universo essencialmente preenchido pela matéria

$$\boldsymbol{H = \frac{a_0}{c}\left(\Omega_m\right)^{\frac{1}{2(\gamma-1)}}} \qquad \textbf{(36)}$$

Determinação de q^*

$$\boldsymbol{q^* = -\frac{1}{aH^{2\gamma}}\frac{D^\gamma}{Dt^\gamma}\left(\frac{D^\gamma a}{Dt^\gamma}\right)} \qquad \textbf{(37)}$$

Deformação das Equações de Friedmann pelo uso das Derivadas Fracionárias: Caso de um Universo em Expansão Preenchido pela Matéria

Universo essencialmente preenchido pela matéria

$$H = \frac{a_0}{c}(\Omega_m)^{\frac{1}{2(\gamma-1)}} \qquad (36)$$

Determinação de q^*

$$q^* = -\frac{1}{aH^{2\gamma}}\frac{D^\gamma}{Dt^\gamma}\left(\frac{D^\gamma a}{Dt^\gamma}\right) \qquad (37)$$

$$\frac{D^\gamma}{Dt^\gamma}\left(\frac{D^\gamma a}{Dt^\gamma}\right) = \kappa a\left(-\frac{4\pi G\rho - \Lambda c^2}{3}\right)$$

Deformação das Equações de Friedmann pelo uso das Derivadas Fracionárias: Caso de um Universo em Expansão Preenchido pela Matéria

Universo essencialmente preenchido pela matéria

$$H = \frac{a_0}{c}(\Omega_m)^{\frac{1}{2(\gamma-1)}} \qquad (36)$$

Determinação de q^*

$$q^* = -\frac{1}{aH^{2\gamma}}\frac{D^\gamma}{Dt^\gamma}\left(\frac{D^\gamma a}{Dt^\gamma}\right) \qquad (37)$$

$$\frac{D^\gamma}{Dt^\gamma}\left(\frac{D^\gamma a}{Dt^\gamma}\right) = \kappa a\left(-\frac{4\pi G\rho - \Lambda c^2}{3}\right)$$

$$q^* H^{2\gamma} = \kappa\frac{4\pi G\rho}{3} \qquad (38)$$

Deformação das Equações de Friedmann pelo uso das Derivadas Fracionárias: Caso de um Universo em Expansão Preenchido pela Matéria

Universo essencialmente preenchido pela matéria

$$\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{a_0}}{\boldsymbol{c}} (\Omega_{\boldsymbol{m}})^{\frac{1}{2(\gamma-1)}} \qquad \textbf{(36)}$$

Determinação de q^*

$$\boldsymbol{q}^* = -\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{aH^{2\gamma}}} \frac{\boldsymbol{D^\gamma}}{\boldsymbol{Dt^\gamma}} \left(\frac{\boldsymbol{D^\gamma a}}{\boldsymbol{Dt^\gamma}}\right) \qquad \textbf{(37)}$$

$$\frac{\boldsymbol{D^\gamma}}{\boldsymbol{Dt^\gamma}} \left(\frac{\boldsymbol{D^\gamma a}}{\boldsymbol{Dt^\gamma}}\right) = \kappa \boldsymbol{a} \left(-\frac{\boldsymbol{4\pi G\rho} - \Lambda \boldsymbol{c^2}}{\boldsymbol{3}}\right)$$

$$\boldsymbol{q}^* \boldsymbol{H^{2\gamma}} = \kappa \frac{\boldsymbol{4\pi G\rho}}{\boldsymbol{3}} \overset{/\boldsymbol{H^2}}{\Longrightarrow} \boldsymbol{q}^* \boldsymbol{H^{2(\gamma-1)}} = \kappa\, \Omega_{\boldsymbol{m}} \qquad \textbf{(38)}$$

Deformação das Equações de Friedmann pelo uso das Derivadas Fracionárias: Caso de um Universo em Expansão Preenchido pela Matéria

Universo essencialmente preenchido pela matéria

$$H = \frac{a_0}{c}(\Omega_m)^{\frac{1}{2(\gamma-1)}} \qquad (36)$$

Determinação de q^*

$$q^* = -\frac{1}{aH^{2\gamma}}\frac{D^\gamma}{Dt^\gamma}\left(\frac{D^\gamma a}{Dt^\gamma}\right) \qquad (37)$$

$$\frac{D^\gamma}{Dt^\gamma}\left(\frac{D^\gamma a}{Dt^\gamma}\right) = \kappa a\left(-\frac{4\pi G\rho - \Lambda c^2}{3}\right)$$

$$q^* H^{2\gamma} = \kappa\frac{4\pi G\rho}{3} \overset{/H^2}{\Longrightarrow} q^* H^{2(\gamma-1)} = \kappa\,\Omega_m \qquad (38)$$

Usando (36) e $\kappa = A\left(\frac{a_0}{c}\right)^{2(\gamma-1)}$**, temos:**

$$q^* = \frac{A}{2} \qquad (39)$$

Deformação das Equações de Friedmann pelo uso das Derivadas Fracionárias: Caso de um Universo em Expansão Preenchido pela Matéria

Universo essencialmente preenchido pela matéria

De $\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\ddot{a}\dot{a}}{a^2} = -\frac{4\pi G\dot{\rho}}{3}$**, escrevemos :**

$$\frac{1}{a}\frac{D^{\gamma}}{Dt^{\gamma}}\left(\frac{D^{\gamma}}{Dt^{\gamma}}\left(\frac{D^{\gamma}a}{Dt^{\gamma}}\right)\right) - \frac{1}{a^2}\frac{D^{\gamma}}{Dt^{\gamma}}\left(\frac{D^{\gamma}a}{Dt^{\gamma}}\right)\frac{D^{\gamma}a}{Dt^{\gamma}} = -\kappa\frac{4\pi G}{3}\frac{D^{\gamma}\rho}{Dt^{\gamma}} \qquad (40)$$

Deformação das Equações de Friedmann pelo uso das Derivadas Fracionárias: Caso de um Universo em Expansão Preenchido pela Matéria

Universo essencialmente preenchido pela matéria

De $\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\ddot{a}\dot{a}}{a^2} = -\frac{4\pi G\dot{\rho}}{3}$**, escrevemos :**

$$\frac{1}{a}\frac{D^{\gamma}}{Dt^{\gamma}}\left(\frac{D^{\gamma}}{Dt^{\gamma}}\left(\frac{D^{\gamma}a}{Dt^{\gamma}}\right)\right) - \frac{1}{a^2}\frac{D^{\gamma}}{Dt^{\gamma}}\left(\frac{D^{\gamma}a}{Dt^{\gamma}}\right)\frac{D^{\gamma}a}{Dt^{\gamma}} = -\kappa\frac{4\pi G}{3}\frac{D^{\gamma}\rho}{Dt^{\gamma}} \qquad (40)$$

Determinação de j^*

Deformação das Equações de Friedmann pelo uso das Derivadas Fracionárias: Caso de um Universo em Expansão Preenchido pela Matéria

Universo essencialmente preenchido pela matéria

De $\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\ddot{a}\dot{a}}{a^2} = -\frac{4\pi G\dot{\rho}}{3}$**, escrevemos :**

$$\frac{1}{a}\frac{D^{\gamma}}{Dt^{\gamma}}\left(\frac{D^{\gamma}}{Dt^{\gamma}}\left(\frac{D^{\gamma}a}{Dt^{\gamma}}\right)\right) - \frac{1}{a^2}\frac{D^{\gamma}}{Dt^{\gamma}}\left(\frac{D^{\gamma}a}{Dt^{\gamma}}\right)\frac{D^{\gamma}a}{Dt^{\gamma}} = -\kappa\frac{4\pi G}{3}\frac{D^{\gamma}\rho}{Dt^{\gamma}} \qquad (40)$$

Determinação de j^*

$$j^* = \frac{1}{aH^{3\gamma}}\frac{D^{\gamma}}{Dt^{\gamma}}\left(\frac{D^{\gamma}}{Dt^{\gamma}}\left(\frac{D^{\gamma}a}{Dt^{\gamma}}\right)\right) \qquad (41)$$

Deformação das Equações de Friedmann pelo uso das Derivadas Fracionárias: Caso de um Universo em Expansão Preenchido pela Matéria

Universo essencialmente preenchido pela matéria

De $\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\ddot{a}\dot{a}}{a^2} = -\frac{4\pi G\dot{\rho}}{3}$**, escrevemos :**

$$\frac{1}{a}\frac{D^\gamma}{Dt^\gamma}\left(\frac{D^\gamma}{Dt^\gamma}\left(\frac{D^\gamma a}{Dt^\gamma}\right)\right) - \frac{1}{a^2}\frac{D^\gamma}{Dt^\gamma}\left(\frac{D^\gamma a}{Dt^\gamma}\right)\frac{D^\gamma a}{Dt^\gamma} = -\kappa\frac{4\pi G}{3}\frac{D^\gamma \rho}{Dt^\gamma} \qquad (40)$$

Determinação de j^*

$$j^* = \frac{1}{aH^{3\gamma}}\frac{D^\gamma}{Dt^\gamma}\left(\frac{D^\gamma}{Dt^\gamma}\left(\frac{D^\gamma a}{Dt^\gamma}\right)\right) \qquad (41)$$

$$H^{3\gamma}j^* + q^*H^*H^{2\gamma} = -\kappa\frac{4\pi G\rho}{3}\frac{D^\gamma \rho}{Dt^\gamma} \qquad (42)$$

Deformação das Equações de Friedmann pelo uso das Derivadas Fracionárias: Caso de um Universo em Expansão Preenchido pela Matéria

Universo essencialmente preenchido pela matéria

De $\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\ddot{a}\dot{a}}{a^2} = -\frac{4\pi G\dot{\rho}}{3}$, escrevemos :

$$\frac{1}{a}\frac{D^\gamma}{Dt^\gamma}\left(\frac{D^\gamma}{Dt^\gamma}\left(\frac{D^\gamma a}{Dt^\gamma}\right)\right) - \frac{1}{a^2}\frac{D^\gamma}{Dt^\gamma}\left(\frac{D^\gamma a}{Dt^\gamma}\right)\frac{D^\gamma a}{Dt^\gamma} = -\kappa\frac{4\pi G}{3}\frac{D^\gamma \rho}{Dt^\gamma} \qquad (40)$$

Determinação de j^*

$$j^* = \frac{1}{aH^{3\gamma}}\frac{D^\gamma}{Dt^\gamma}\left(\frac{D^\gamma}{Dt^\gamma}\left(\frac{D^\gamma a}{Dt^\gamma}\right)\right) \qquad (41)$$

$$H^{3\gamma}j^* + q^*H^*H^{2\gamma} = -\kappa\frac{4\pi G\rho}{3}\frac{D^\gamma \rho}{Dt^\gamma} \qquad (42)$$

De $H = \frac{a_0}{c}(\Omega_m)^{\frac{1}{2(\gamma-1)}}$, $\Omega_m = \frac{8\pi G\rho}{3H^2}$, on a:

Deformação das Equações de Friedmann pelo uso das Derivadas Fracionárias: Caso de um Universo em Expansão Preenchido pela Matéria

Universo essencialmente preenchido pela matéria

De $\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\ddot{a}\dot{a}}{a^2} = -\frac{4\pi G\dot{\rho}}{3}$, escrevemos:

$$\frac{1}{a}\frac{D^\gamma}{Dt^\gamma}\left(\frac{D^\gamma}{Dt^\gamma}\left(\frac{D^\gamma a}{Dt^\gamma}\right)\right) - \frac{1}{a^2}\frac{D^\gamma}{Dt^\gamma}\left(\frac{D^\gamma a}{Dt^\gamma}\right)\frac{D^\gamma a}{Dt^\gamma} = -\kappa\frac{4\pi G}{3}\frac{D^\gamma \rho}{Dt^\gamma} \qquad (40)$$

Determinação de j^*

$$j^* = \frac{1}{aH^{3\gamma}}\frac{D^\gamma}{Dt^\gamma}\left(\frac{D^\gamma}{Dt^\gamma}\left(\frac{D^\gamma a}{Dt^\gamma}\right)\right) \qquad (41)$$

$$H^{3\gamma}j^* + q^*H^*H^{2\gamma} = -\kappa\frac{4\pi G\rho}{3}\frac{D^\gamma \rho}{Dt^\gamma} \qquad (42)$$

De $H = \frac{a_0}{c}(\Omega_m)^{\frac{1}{2(\gamma-1)}}$, $\Omega_m = \frac{8\pi G\rho}{3H^2}$, temos:

$$\rho = \frac{3}{4\pi G}H^{2\gamma}\left(\frac{c}{a_0}\right)^{2(\gamma-1)} \qquad (43)$$

Deformação das Equações de Friedmann pelo uso das Derivadas Fracionárias: Caso de um Universo em Expansão Preenchido pela Matéria

Universo essencialmente preenchido pela matéria

Derivando $\rho = \frac{3}{4\pi G} H^{2\gamma} \left(\frac{c}{a_0}\right)^{2(\gamma-1)}$ **com respeito ao tempo, temos :**

$$\frac{D^{\gamma}\rho}{Dt^{\gamma}} = \frac{3}{8\pi G}\left(\frac{c}{a_0}\right)^{2(\gamma-1)} n^{2\gamma} \frac{\Gamma(1-2\gamma)}{\Gamma(1-3\gamma)} t^{-3\gamma} \qquad (44)$$

Deformação das Equações de Friedmann pelo uso das Derivadas: Caso de um Universo em Expansão Preenchido pela Matéria

Universo essencialmente preenchido pela matéria

Derivando $\rho = \frac{3}{4\pi G} H^{2\gamma} \left(\frac{c}{a_0}\right)^{2(\gamma-1)}$ **com respeito ao tempo, temos :**

$$\frac{D^\gamma \rho}{Dt^\gamma} = \frac{3}{8\pi G}\left(\frac{c}{a_0}\right)^{2(\gamma-1)} n^{2\gamma} \frac{\Gamma(1-2\gamma)}{\Gamma(1-3\gamma)} t^{-3\gamma} \qquad (44)$$

ou

$$\frac{D^\gamma \rho}{Dt^\gamma} = \frac{\Gamma(1-2\gamma)}{n^\gamma \Gamma(1-2\gamma)} H^\gamma \rho \qquad (45)$$

Deformação das Equações de Friedmann pelo uso das Derivadas: Caso de um Universo em Expansão Preenchido pela Matéria

Universo essencialmente preenchido pela matéria

Derivando $\rho = \frac{3}{4\pi G} H^{2\gamma} \left(\frac{c}{a_0}\right)^{2(\gamma-1)}$ **com respeito ao tempo, temos:**

$$\frac{D^\gamma \rho}{Dt^\gamma} = \frac{3}{8\pi G}\left(\frac{c}{a_0}\right)^{2(\gamma-1)} n^{2\gamma} \frac{\Gamma(1-2\gamma)}{\Gamma(1-3\gamma)} t^{-3\gamma} \qquad (44)$$

ou

$$\frac{D^\gamma \rho}{Dt^\gamma} = \frac{\Gamma(1-2\gamma)}{n^\gamma \Gamma(1-2\gamma)} H^\gamma \rho \qquad (45)$$

Assim $H^{3\gamma} j^* + q^* H^* H^{2\gamma} = -\kappa \frac{4\pi G \rho}{3} \frac{D^\gamma \rho}{Dt^\gamma}$ **se torna**

$$H^{2\gamma} j^* + q^* H^* H^\gamma = -A \left(\frac{a_0}{c}\right)^{2(\gamma-1)} \frac{\Gamma(1-2\gamma)}{n^\gamma \Gamma(1-3\gamma)} \frac{4\pi G}{3} \rho \qquad (46)$$

Deformação das Equações de Friedmann pelo uso das Derivadas Fracionárias: Caso de um Universo em Expansão Preenchido pela Matéria

Universo essencialmente preenchido pela matéria

Dividindo $H^{2\gamma} j^* + q^* H^* H^\gamma = -A\left(\frac{a_0}{c}\right)^{2(\gamma-1)} \frac{\Gamma(1-2\gamma)}{n^\gamma \Gamma(1-3\gamma)} \frac{4\pi G}{3}\rho$ **por** $H^{2\gamma}$**, e usando** $\frac{H^*}{H} = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-\gamma+1)}\left(\frac{H}{n}\right)^{\gamma-1}$ **e** $\Omega_m = \frac{8\pi G\rho}{3H^2}$ **, obtemos:**

$$H^{2(\gamma-1)}\left[j^* + q^* \frac{\Gamma(n)}{n^{\gamma-1}\Gamma(n+1-\gamma)}\right] = -A\left(\frac{a_0}{c}\right)^{2(\gamma-1)} \frac{\Gamma(1-2\gamma)}{n^\gamma \Gamma(1-3\gamma)} \frac{\Omega_m}{2} \qquad (47)$$

Deformação das Equações de Friedmann pelo uso das Derivadas Fracionárias: Caso de Universo em Expansão Preenchido pela Matéria

Universo essencialmente preenchido pela matéria

Dividindo $H^{2\gamma}j^* + q^*H^*H^\gamma = -A\left(\frac{a_0}{c}\right)^{2(\gamma-1)}\frac{\Gamma(1-2\gamma)}{n^\gamma\Gamma(1-3\gamma)}\frac{4\pi G}{3}\rho$ **por** $H^{2\gamma}$**, e usando** $\frac{H^*}{H} = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-\gamma+1)}\left(\frac{H}{n}\right)^{\gamma-1}$ **e** $\Omega_m = \frac{8\pi G\rho}{3H^2}$**, obtemos:**

$$H^{2(\gamma-1)}\left[j^* + q^*\frac{\Gamma(n)}{n^{\gamma-1}\Gamma(n+1-\gamma)}\right] = -A\left(\frac{a_0}{c}\right)^{2(\gamma-1)}\frac{\Gamma(1-2\gamma)}{n^\gamma\Gamma(1-3\gamma)}\frac{\Omega_m}{2} \qquad (47)$$

Também usando $H = \frac{a_0}{c}(\Omega_m)^{\frac{1}{2(\gamma-1)}}$**, obtemos:**

$$j^* = -\frac{A}{2n^\gamma}\left[\frac{\Gamma(1-2\gamma)}{\Gamma(1-3\gamma)} + \frac{n\Gamma(n)}{\Gamma(n+1-\gamma)}\right] \qquad (48)$$

Deformação das Equações de Friedmann pelo uso das Derivadas Fracionárias: Caso de um Universo em Expansão Preenchido pela Matéria

Universo essencialmente preenchido pela matéria

Determinação de s^*

$$s^* = \frac{1}{aH^{4\gamma}} \frac{D^\gamma}{Dt^\gamma} \left(\frac{D^\gamma}{Dt^\gamma} \left(\frac{D^\gamma}{Dt^\gamma} \left(\frac{D^\gamma a}{Dt^\gamma} \right) \right) \right) \qquad (49)$$

Deformação das Equações de Friedmann pelo uso das Derivadas Fracionárias: Caso de um Universo em Expansão Preenchido pela Matéria

Universo essencialmente preenchido pela matéria

Determinação de s^*

$$s^* = \frac{1}{aH^{4\gamma}} \frac{D^\gamma}{Dt^\gamma} \left(\frac{D^\gamma}{Dt^\gamma} \left(\frac{D^\gamma}{Dt^\gamma} \left(\frac{D^\gamma a}{Dt^\gamma} \right) \right) \right) \qquad (49)$$

Usando a mesmas técnicas, obtemos:

$$s^* = -A \left[\frac{\Gamma(1-2\gamma)}{2\Gamma(1-4\gamma)n^{2\gamma}} + \frac{\Gamma(n)\Gamma(1-2\gamma)}{\Gamma(1-3\gamma)\Gamma(n+1-\gamma)n^{2\gamma-1}} - \frac{A}{2} \right] \qquad (50)$$

Deformação das Equações de Friedmann pelo uso das Derivadas Fracionárias: Caso de um Universo em Expansão Preenchido pela Matéria

SN Ia:

Magnitude aparente:

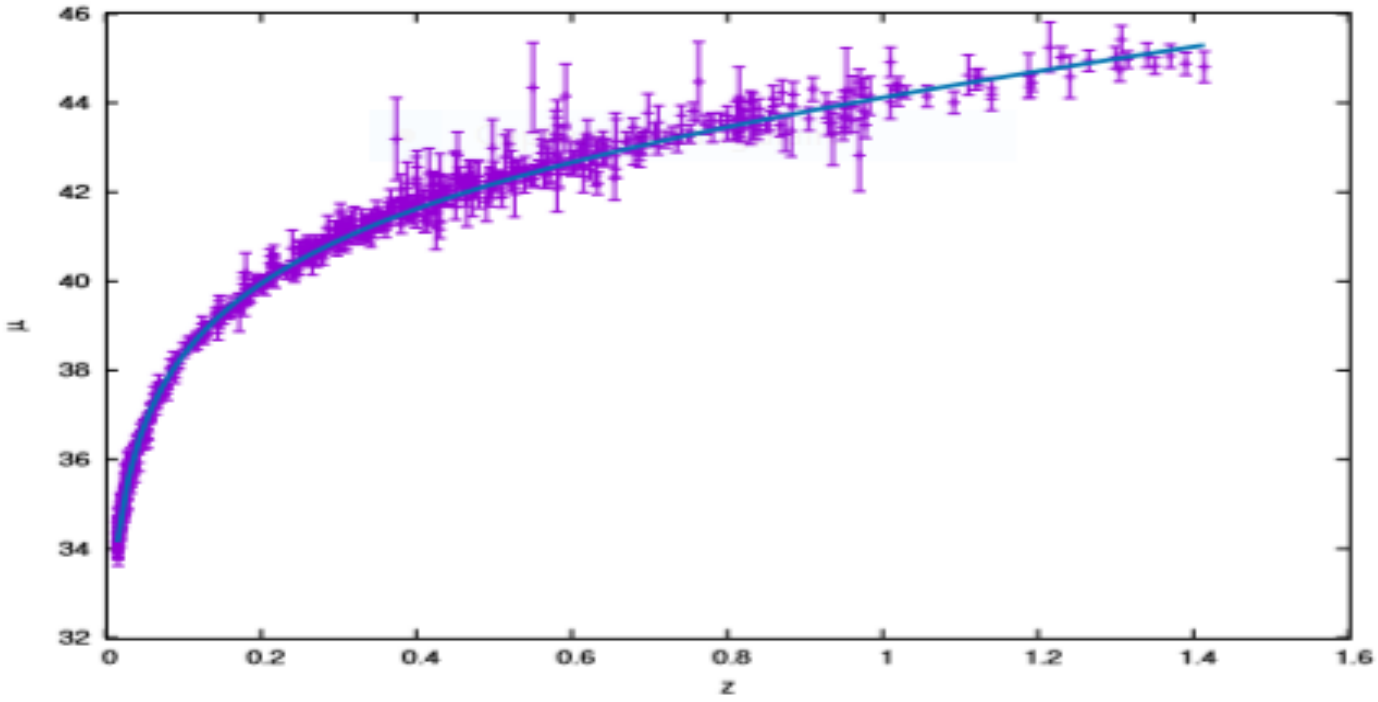
$$\mu(z) = 5\log\left[\frac{H_0 d_L(z)}{c}\right] - 5\log h(z) + 45.3856 \qquad (51)$$

$$d_L(z) = \frac{c}{H_0}\left[\begin{array}{c} z + \frac{1}{2}(1-q_0)z^2 - \frac{1}{6}\left(1 - q_0 - 3q_0^2 + j_0\right)z^3 + \\ + \frac{1}{24}\left(2 - 2q_0 - 15q_0^2 - 15q_0^3 + 5j_0 + 10q_0 j_0 + s_0\right)z^4 + \cdots \end{array}\right] \qquad (52)$$

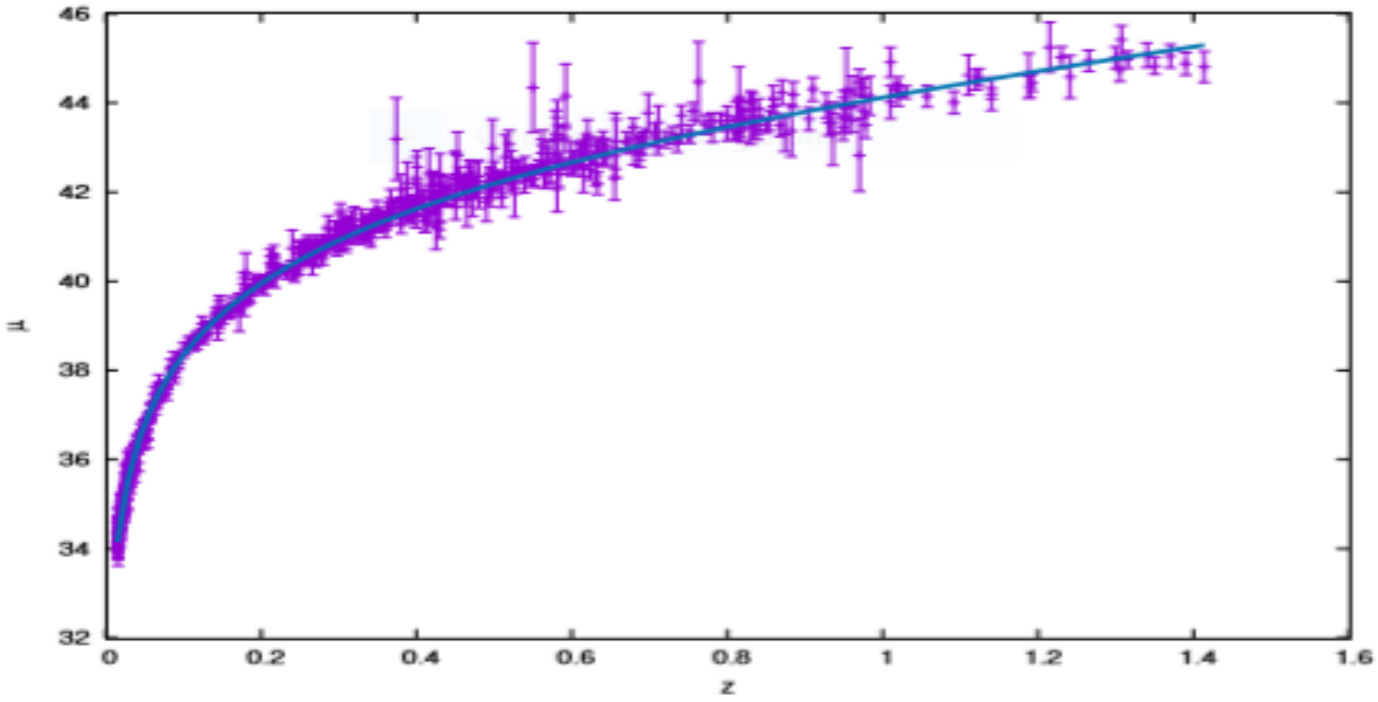
$$h = H_0.(100km)^{-1}s^{-1}Mpc^{-1} \quad ; H_0 = 68.37km/s/Mpc \qquad (53)$$

$$q = \frac{\Omega_m}{2} - \Omega_\Lambda, \quad j = \Omega_m + \Omega_\Lambda, \quad s = -3\Omega_m - \frac{1}{2}\Omega_m^2 + \frac{1}{2}\Omega_m\Omega_\Lambda + \Omega_\Lambda^2$$

Deformação das Equações de Friedmann pelo uso das Derivadas Fracionárias: Caso de um Universo em Expansão Preenchido pela Matéria



Deformação das Equações de Friedmann pelo uso das Derivadas Fracionárias: Caso de um Universo em Expansão Preenchido pela Matéria



$$\Omega_m \approx 0.3$$
$$\Omega_\Lambda \approx 0.7$$

Deformação das Equações de Friedmann pelo uso das Derivadas Fracionárias: Caso de um Universo em Expansão Preenchido pela Matéria

SN Ia:

Magnitude aparente:

$$\mu(z) = 5\log\left[\frac{H_0 d_L(z)}{c}\right] - 5\log h(z) + 45.3856$$

$$d_L(z) = \frac{c}{H_0}\left[\begin{array}{c} z + \frac{1}{2}(1-q_0)z^2 - \frac{1}{6}\left(1 - q_0 - 3q_0^2 + j_0\right)z^3 + \\ + \frac{1}{24}\left(2 - 2q_0 - 15q_0^2 - 15q_0^3 + 5j_0 + 10q_0 j_0 + s_0\right)z^4 + \cdots \end{array}\right]$$

$$h = H_0/100km/s/Mpc; \quad H_0 = ?$$

$$q^* = \frac{A}{2}, \quad j^* = -\frac{A}{2n^\gamma}\left[\frac{\Gamma(1-2\gamma)}{\Gamma(1-3\gamma)} + \frac{n\Gamma(n)}{\Gamma(n+1-\gamma)}\right], \quad s^* = -A\left[\frac{\Gamma(1-2\gamma)}{2\Gamma(1-4\gamma)n^{2\gamma}} + \frac{\Gamma(n)\Gamma(1-2\gamma)}{\Gamma(1-3\gamma)\Gamma(n+1-\gamma)n^{2\gamma-1}} - \frac{A}{2}\right]$$

Deformação das Equações de Friedmann pelo uso das Derivadas Fracionárias: Caso de um Universo em Expansão Preenchido pela Matéria

SN Ia:

Magnitude aparente:

$$\mu(z) = 5\log\left[\frac{H_0 d_L(z)}{c}\right] - 5\log h(z) + 45.3856$$

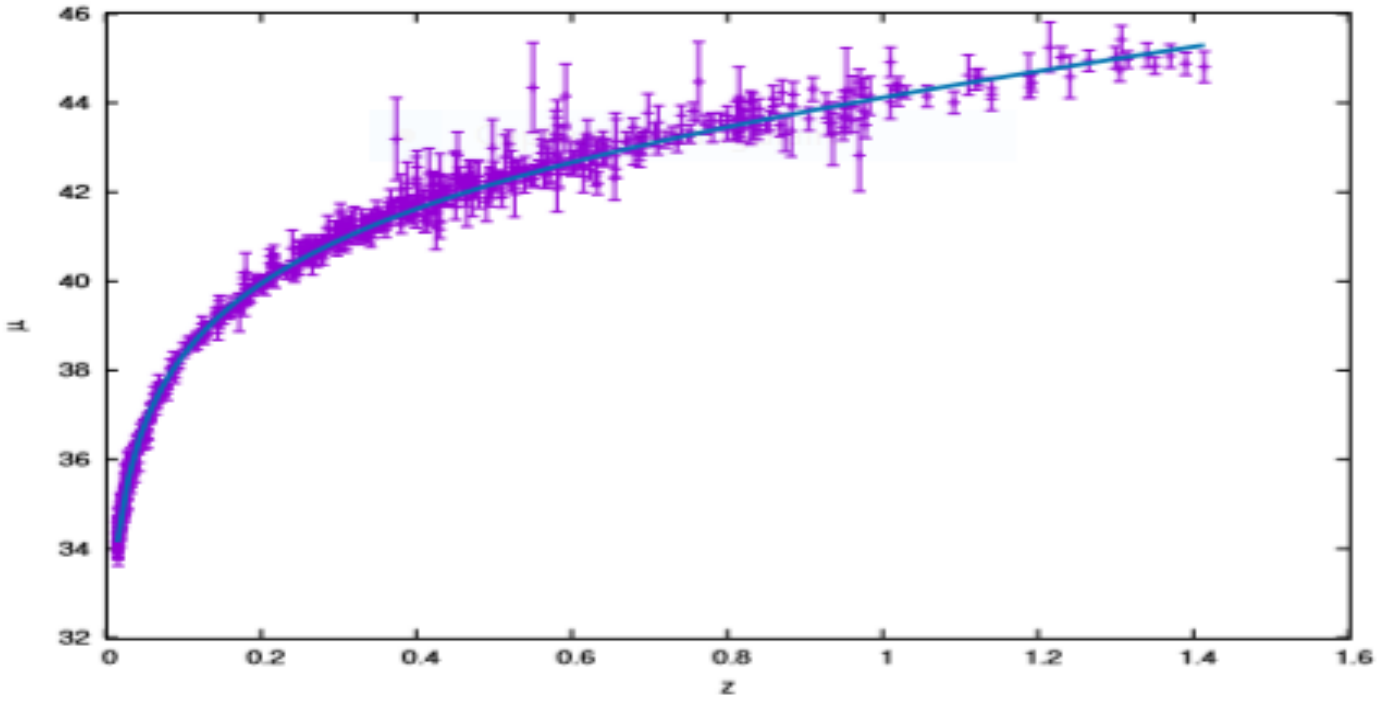
$$d_L(z) = \frac{c}{H_0}\left[\begin{array}{c} z + \frac{1}{2}(1-q_0)z^2 - \frac{1}{6}\left(1 - q_0 - 3q_0^2 + j_0\right)z^3 + \\ + \frac{1}{24}\left(2 - 2q_0 - 15q_0^2 - 15q_0^3 + 5j_0 + 10q_0 j_0 + s_0\right)z^4 + \cdots \end{array}\right]$$

$$h = H_0/100km/s/Mpc;$$

(36): $H = \frac{a_0}{c}(\Omega_m)^{\frac{1}{2(\gamma-1)}}$

$$q^* = \frac{A}{2},\ \ j^* = -\frac{A}{2n^\gamma}\left[\frac{\Gamma(1-2\gamma)}{\Gamma(1-3\gamma)} + \frac{n\Gamma(n)}{\Gamma(n+1-\gamma)}\right],\ \ s^* = -A\left[\frac{\Gamma(1-2\gamma)}{2\Gamma(1-4\gamma)n^{2\gamma}} + \frac{\Gamma(n)\Gamma(1-2\gamma)}{\Gamma(1-3\gamma)\Gamma(n+1-\gamma)n^{2\gamma-1}} - \frac{A}{2}\right]$$

Deformação das Equações de Friedmann pelo uso das Derivadas Fracionárias: Caso de um Universo em Expansão Preenchido pela Matéria



gnuplot

$n = 2.6$

$\Omega_m = 4.5$

$\gamma = 2.1$

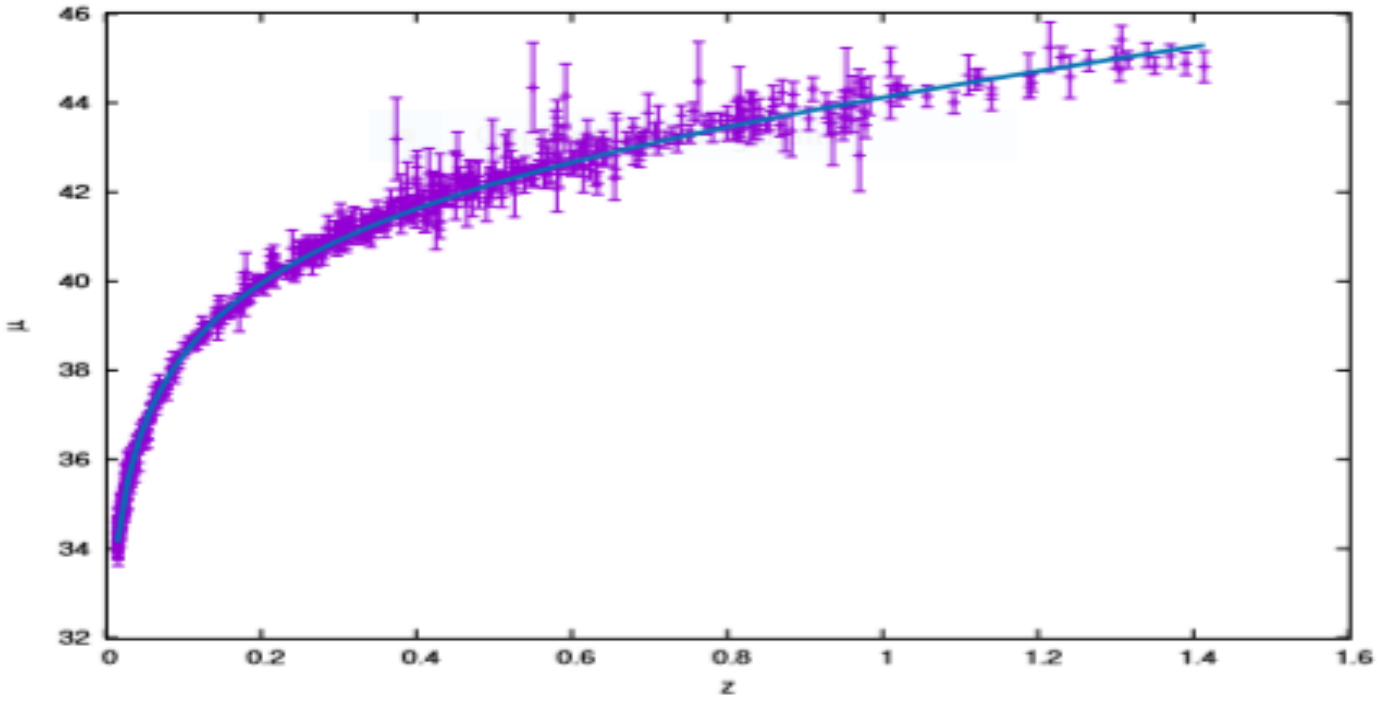
.....

$\Omega_m = 11.6273 \pm 1.583$

$\gamma = 1.7254 \pm 0.043$

$n = 0.9306 \pm 0.846$

Deformação das Equações de Friedmann pelo uso das Derivadas: Caso de um Universo em Expansão Preenchido pela Matéria



gnuplot

$n = 1.3$

$\Omega_m = 2.1$

$\gamma = 2.6$

.....

$\Omega_m = 5.4220 \pm 0.0243$

$\gamma = 1.4937 \pm 0.0003$

$n = 0.5539 \pm 0.0046$