
INVERNO ASTROFÍSICO 2019

2ª LISTA DE RELATIVIDADE GERAL - Thiago R. P. Caramês

1 - Considere que temos uma métrica diagonal $g_{\mu\nu}$. Mostre que os símbolos de Christoffel são dados por:

- (a) $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0$
- (b) $\Gamma_{\mu\mu}^\lambda = -\frac{1}{2}(g_{\lambda\lambda})^{-1}\partial_\lambda g_{\mu\mu}$
- (b) $\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda = \partial_\mu(\ln \sqrt{-g})$
- (b) $\Gamma_{\lambda\lambda}^\lambda = \partial_\lambda(\ln \sqrt{-g})$

Sendo g o determinante do tensor métrico. Nessas expressões $\mu \neq \nu \neq \lambda$ e os índices repetidos **NÃO** estão somados. Use, se necessário, a propriedade $\partial_\gamma g = g g^{\alpha\beta} \partial_\gamma g_{\alpha\beta}$ e o fato de que $g_{\mu\alpha} g^{\nu\alpha} = \delta_\mu^\nu$.

2 - Seja $A_{\mu\nu}$ um tensor do tipo $(0, 2)$ e B^μ um tensor do tipo $(1, 0)$ (um vetor). Mostre que $A_{\mu\nu} B^\nu$ é um vetor contravariante e que $A_{\mu\nu} B^\nu B^\mu$ é um escalar.

3 - Seja a derivada covariante de um vetor A^μ dada $\nabla_\nu A^\mu = \partial_\nu A^\mu + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu A^\lambda$, e a derivada covariante de um covetor A_μ dada $\nabla_\nu A_\mu = \partial_\nu A_\mu - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda A_\lambda$, usando a regra do produto mostre que:

- (a) $\nabla_\nu(A_\mu A^\mu) = \partial_\nu(A_\mu A^\mu)$
- (b) $\nabla_\gamma M_{\alpha\beta} = \partial_\gamma M_{\alpha\beta} - \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta M_{\delta\beta} - \Gamma_{\beta\gamma}^\delta M_{\alpha\delta}$, sendo $M_{\mu\nu}$ um tensor de rank 2 obtido a partir do produto de dois covetores A_μ e B_ν , isto é $M_{\mu\nu} \equiv A_\mu B_\nu$.
- (c) $\nabla_\gamma M^{\alpha\beta} = \partial_\gamma M^{\alpha\beta} + \Gamma_{\gamma\delta}^\alpha M^{\delta\beta} + \Gamma_{\gamma\delta}^\beta M^{\alpha\delta}$, sendo $M_{\mu\nu}$ um tensor de rank 2 obtido a partir do produto $M^{\mu\nu} \equiv A^\mu B^\nu$.
- (d) $\nabla_\gamma M^\alpha_\beta = \partial_\gamma M^\alpha_\beta + \Gamma_{\gamma\delta}^\alpha M^\delta_\beta - \Gamma_{\gamma\beta}^\delta M^\alpha_\delta$, sendo M^ν_μ um tensor de rank 2 obtido a partir do produto $M^\nu_\mu \equiv A_\mu B^\nu$.

Obs: Note que tal procedimento pode ser estendido, permitindo-nos encontrar a expressão para a derivada covariante de qualquer tensor (de ordem arbitrária).

4 - Mostre que se a derivada covariante de um vetor se transforma como um tensor, mediante uma mudança de coordenadas $x^\mu \rightarrow x'^\mu$, isto é, que:

$$\nabla'_\gamma V'^\alpha = \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\gamma} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} \nabla_\delta V^\beta, \quad (1)$$

então decorrerá que a conexão não se transformará como um tensor. Verifique que tal transformação será:

$$\Gamma'^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\delta} \frac{\partial x^\epsilon}{\partial x'^\beta} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\gamma} \Gamma^\delta_{\epsilon\sigma} - \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\beta} \frac{\partial x^\epsilon}{\partial x'^\gamma} \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\delta \partial x^\epsilon}. \quad (2)$$

5 - Mostre que a condição de compatibilidade métrica, $\nabla_\gamma g_{\alpha\beta} = 0$, implicará necessariamente em $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} (\partial_\beta g_{\delta\gamma} + \partial_\gamma g_{\delta\beta} - \partial_\delta g_{\beta\gamma})$.