A Teoria da Relatividade Restrita

Júlio C. Fabris

DFIS/PPGCosmo - Universidade Federal do Espírito Santo

Escola Maura Abaurre, 04 de Abril de 2019

A Mecânica Newtonina

As leis

- A Mecânica newtoniana está baseada em três leis.

Mecânica Newtoniana

Primeira lei

- A primeira lei é conhecida como **lei da inércia** e diz que

$$\vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = 0, \tag{1}$$

$$\vec{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \text{constante}. \tag{2}$$

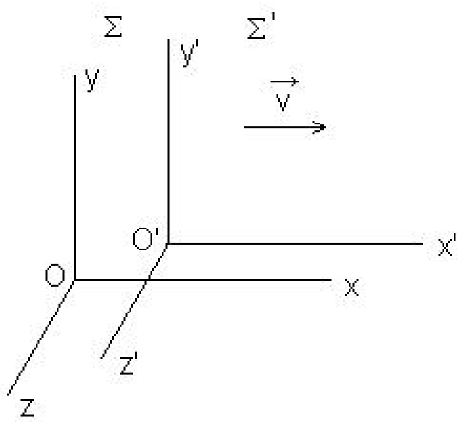
Mecânica Newtoniana

Primeira lei

- A primeira lei estabelece uma classe de referenciais privilegiados: **os referenciais inerciais**.
- Nestes referenciais, a ausência de força resultante sobre um corpo implica que este corpo se deslocará com velocidade constante.
- Dado um referencial inercial, todo outro referencial se deslocando com velocidade constante em relação a ele também será um referencial inercial.

Mecânica Newtoniana

Referencial inercial



- As transformações entre as coordenadas de espaço e tempo de um objeto medidas em um referencial inercial e outro referencial inercial, que se desloca em relação ao primeiro com velocidade constante V são:

$$x' = x - Vt, \tag{3}$$

$$t' = t. \tag{4}$$

- Estas são as **transformações de Galileu**.

- As velocidades observadas em um referencial inercial, digamos $\vec{v}$, e em outro referencial inercial, digamos $\vec{v}'$, se relacionam como,

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}, \tag{5}$$

onde $\vec{V}$ é a velocidade relativa entre os dois referenciais.

- As transformações de Galileu implicam também que as acelerações medidas em dois referenciais inerciais são as mesma:

$$a' = a. \tag{6}$$

Mecânica Newtoniana

Segunda lei

- A segunda lei de Newton estabelece agora qual é o efeito de uma força resultante não nula sobre um objeto, conforme medida em um referencial inercial:

$$\vec{F} = m\vec{a}, \tag{7}$$

onde m é a massa do corpo.

Mecânica Newtoniana

Terceira lei

- A terceira lei é a lei da ação e reação:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \tag{8}$$

- A terceira lei está relacionada à conservação do momento linear.

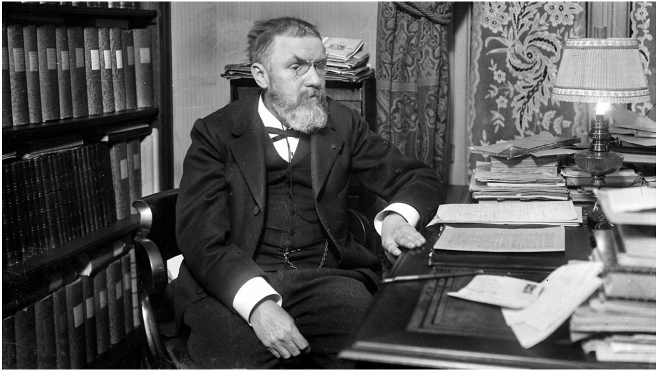
Teoria da Relatividade Restrita

Os postulados

- A Relatividade Restrita foi uma construção teórica da qual participaram muitos físicos notáveis: o francês Poincaré, o holandês Lorentz, o alemão Einstein, entre vários outros.

A Teoria da Relatividade Restrita

Poincaré



A Teoria da Relatividade Restrita

Os postulados

- A teoria da Relatividade Restrita é baseada em dois postulados:
  1. As leis da Física são as mesmas em todos os referenciais inerciais.
  2. A velocidade da luz é igual a c ($c = 300.000 km/s$) em todos os referenciais inerciais.

A Teoria da Relatividade Restrita

O primeiro postulado

- O primeiro postulado já era válido na teoria newtoniana: as leis de Newton são as mesmas em todos os referenciais inerciais.
- Até aí nenhuma novidade.

A Teoria da Relatividade Restrita

O segundo postulado

- No entanto, o segundo postulado introduz algo surpreendente: em todos os referenciais inerciais, mesmo aqueles que se movem um em relação aos outros, a luz se desloca com a mesma velocidade, igual a c.
- Existem uma velocidade *invariante* na natureza.
- Ou, se quiser, existe uma velocidade limite na natureza, a velocidade da luz.

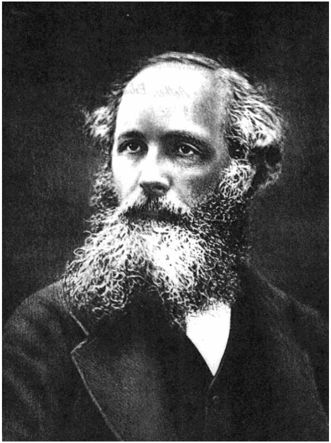
O Eletromagnetismo

A luz e o eletromagnetismo

- A natureza da luz foi explicada pela Teoria Eletromagnética de Maxwell em meados do século XIX.
- Luz é uma onda constituída de campos elétrico e magnético oscilantes.

O Eletromagnetismo

As equações de Maxwell



O Eletromagnetismo

As equações de Maxwell

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (9)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (10)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (11)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (12)$$

O Eletromagnetismo

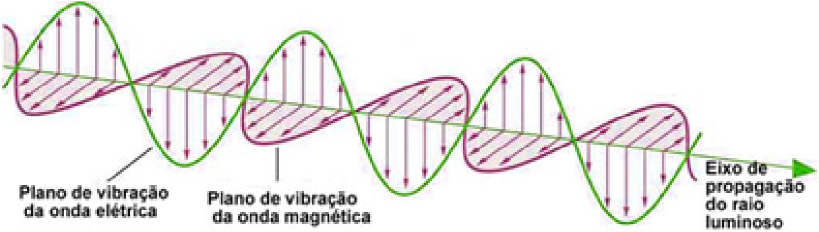
A onda eletromagnética - a luz

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{E} = 0, \tag{13}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 300.000 km/s. \tag{14}$$

O Eletromagnetismo

A luz



- Poderia um observador que se desloca a uma velocidade de 300.000 km/s ver a luz parada?

Eletromagnetismo

Ondas

- Em geral, ondas requerem um meio para se propagar:
  1. ondas no mar,
  2. ondas ao longo de uma corda,
  3. ondas sonoras.

- A luz parece não requerer um meio para se propagar.
- Uma prova disso é que vemos as estrelas, e o espaço entre as estrelas e nós é praticamente vazio.

- O fato que a velocidade da luz é a mesma em todos os referenciais inerciais está em contradição com a lei newtoniana das transformações de velocidade,

$$v' = v - V. \tag{15}$$

- Isto implica que, para que a velocidade da luz seja a mesma em todos os referenciais, as transformações de Galileu não podem ser verdadeiras.

Relatividade Restrita

Ocaso das transformações de Galileu

- Para que exista uma velocidade que seja a mesma em todos os referenciais inerciais será preciso mudar as transformações de Galileu.
- Mesmo porque as equações do Eletromagnetismo não são invariantes pelas transformações de Galileu, ao contrário do que acontece com a Mecânica newtoniana.

A Experiência de Michelson-Morley

Testando o Éter

- A Teoria Eletromagnética não é invariante pelas transformações de Galileu.
- Para resolver isto, supôs-se que a luz tinha velocidade c apenas em um referencial especial, que é o referencial do Éter.
- O Éter seria o meio no qual se propagava a luz (como toda onda mecânica).

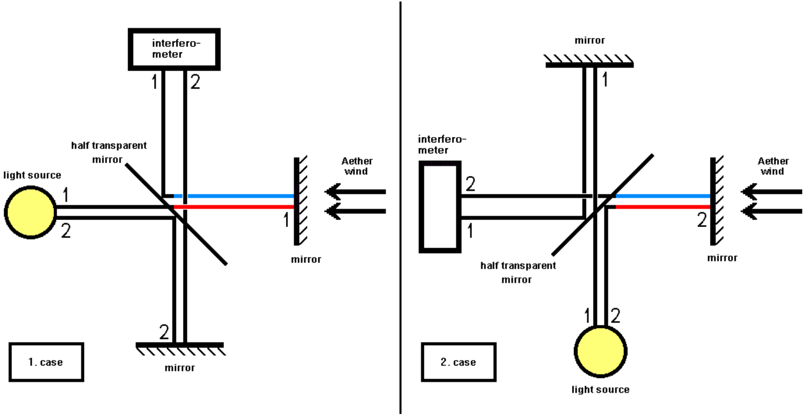
A Experiência de Michelson-Morley

Verificando a existência do Éter

- A existência do Éter foi testada na experiência de Michelson-Morley no final do século XIX/início do século XX.

A Experiência de Michelson-Morley

O dispositivo



A Experiência de Michelson-Morley

As distâncias

- Considerando que a Terra se desloca no éter com velocidade V e que a luz se desloca no éter com velocidade c, o tempo de ida e volta na direção do movimento é:

$$T_{\parallel} = \frac{L}{c+V} + \frac{L}{c-V} \tag{16}$$

$$= \frac{2\frac{L}{c}}{1-\frac{V^2}{c^2}}. \tag{17}$$

- Na direção perpendicular ao movimento, por outro lado, o tempo de ida e volta é,

$$c^2 T^2 = L^2 + V^2 T^2 \quad (18)$$

$$T_\perp = \frac{2\frac{L}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (19)$$

A Experiência de Michelson-Morley

Resultados

- Há uma diferença de tempo em uma direção e em outra.
- Logo, o feixe de luz que, ao se separar, estava em fase, ao se recombinar, estará fora de fase.
- No entanto, nada foi observado.

As transformações de Lorentz

Resultados

- Os resultados negativos da experiência de Michelson-Morley indicam que a velocidade da luz independe do referencial.
- No entanto, isto é incompatível com as transformações de Galileu, que indicam que as velocidades medidas em referenciais inerciais que se movem uns em relação aos outros, devem obedecer a relação,

$$v' = v - V . \tag{20}$$

As Transformações de Lorentz

Expressão geral

- Vamos generalizar as transformações de Galileu, tentando incorporar o segundo postulado.
- Vamos supor uma relação geral do tipo,

$$x' = Ax - BVt, \tag{21}$$

$$ct' = \bar{A}ct - \bar{B}\frac{V}{c}x. \tag{22}$$

- Nestas expressões, $A, B, \bar{A}, \bar{B}$ são constantes sem dimensão.

As Transformações de Lorentz

Expressão geral

- A origem de S', $x' = 0$ implica $x = Vt$.
- Logo, $A = B$.
- Assim, as transformações de Lorentz assumem a forma,

$$x' = A(x - Vt), \tag{23}$$

$$ct' = \bar{A}ct - \bar{B}\frac{V}{c}x. \tag{24}$$

- Nestas expressões, $A, B, \bar{A}, \bar{B}$ são constantes sem dimensão.

As Transformações de Lorentz

Expressão geral

- Suponhamos agora dois referenciais inerciais, S e S', sendo que S' se desloca com velocidade constante V em relação a S.
- No instante $t = t' = 0$ a origem dos dois referenciais coincidem, e neste momento um feixe de laser é acionado, na origem, emitindo a um raio que se propaga com velocidade c nos dois referenciais, conforme o segundo postulado.
- Temos então que a frente de onda do feixe de luz segue as equações em S e S', respectivamente, tal que

$$x = ct, \tag{25}$$

$$x' = ct'. \tag{26}$$

As Transformações de Lorentz

Expressão geral

- Logo,

$$
\begin{aligned}
ct' &= A(ct - Vt), & (27)\\
ct' &= \bar{A}ct - \bar{B}\frac{V}{c}ct. & (28)
\end{aligned}
$$

- Isto implica que, $A = \bar{A} = \bar{B}$.

As Transformações de Lorentz

Expressão geral

- As transformações são então,

$$x' = A(ct - Vt), \quad (29)$$

$$ct' = A(ct - \frac{V}{c}ct). \quad (30)$$

As Transformações de Lorentz

Expressão geral

- A transformação inversa implica:

$$x = A(x' + Vt'), \tag{31}$$

$$ct = A(ct' + \frac{V}{c})x'. \tag{32}$$

- A aplicação da transformação nos dois sentidos leva a,

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{33}$$

As Transformações de Lorentz

Expressão geral

- Temos assim as transformações de Lorentz:

$$x' = \Gamma(x - Vt), \tag{34}$$

$$ct' = \Gamma\left(ct - \frac{V}{c}x\right). \tag{35}$$

- Nestas expressões temos o fator de Lorentz:

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{36}$$

As Transformações de Lorentz

Expressão geral

- Quando $V << c$, voltamos às transformações de Galileu:

$$x' \approx x - Vt, \quad (37)$$

$$t' \approx t. \quad (38)$$

Invariância do elemento de distância

O caso euclideano

- Na geometria de Euclides, a aplicação do teorema de pitágoras leva, no caso bidimensional, à relação,

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2. \tag{39}$$

Invariância do elemento de distância

O caso euclideano

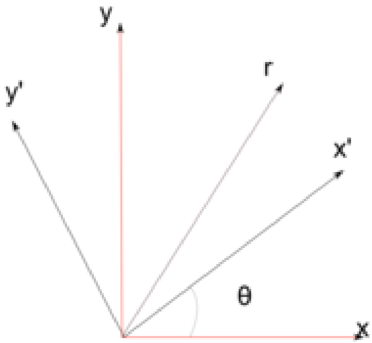
- Esta relação de distância no caso euclideano é invariante pelas transformações,

$$\Delta x = \Delta x' \cos\theta + \Delta y' \mathrm{sen}\theta, \tag{40}$$
$$\Delta y = -\Delta x' \mathrm{sen}\theta + \Delta y' \cos\theta. \tag{41}$$

- Isto corresponde a uma rotação nos eixos coordenados.

Invariância do elemento de distância

O caso euclideano



Invariância do elemento de distância

O caso lorentziano

- Mas, no caso relativista temos que a velocidade da luz é uma constante.
- Quano a luz se propaga temos

$$\Delta x^2 = c^2 \Delta t^2. \tag{42}$$

- Isto implica,

$$c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 = 0. \tag{43}$$

- Essa quantidade deve permanecer *invariante* tem todos os referenciais inerciais.

Invariância do elemento de distância

O caso lorentziano

- Baseado nisto, o elemento de distância invariante em Relatividade Restrita é,

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2. \tag{44}$$

Invariância do elemento de distância

O caso lorentziano

- De fato, este elemento de distância *espaço-temporal* é invariante pelas transformações de Lorentz

$$\Delta x = \Gamma(\Delta x' - V\Delta t'), \tag{45}$$

$$\Delta t = \Gamma\left(\Delta t' - \frac{V}{c^2}\Delta t'\right) \tag{46}$$

Invariância do elemento de distância

O caso lorentziano

- Estas transformações podem ser re-escritas em termos de uma rotação hiperbólica:

$$\Delta x = \cosh\theta \Delta x' - \mathrm{senh}\theta\beta\Delta ct', \quad (47)$$

$$\Delta x = \cosh\theta \Delta ct' - \mathrm{senh}\theta\beta\Delta x', \quad (48)$$

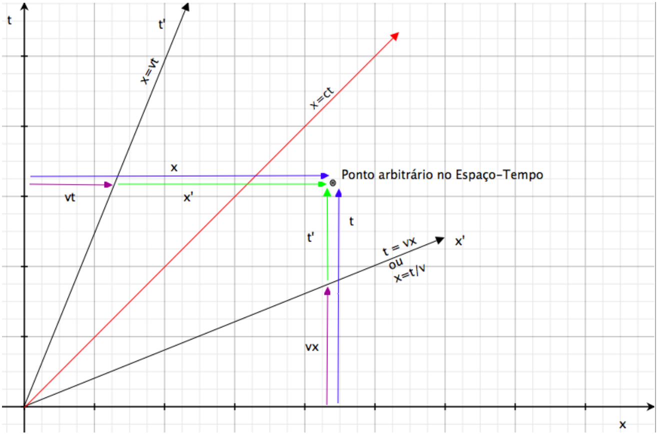
onde,

$$\beta = \frac{V}{c}, \quad (49)$$

$$\cosh^2\theta - \mathrm{senh}^2\theta = 1. \quad (50)$$

Invariância do elemento de distância

O caso lorentziano



Consequências das Transformações de Lorentz

Conceito de simultaneidade

- Na Física Newtoniana dois eventos que ocorrem ao mesmo tempo em um dado referencial, ocorrerão também ao mesmo tempo em todos os demais referenciais.
- Tal fato é consequência do fato que, na Física Newtoniana, o tempo é um parâmetro universal.

Consequências das Transformações de Lorentz

Conceito de simultaneidade

- Na Relatividade Restrita a situação é completamente diferente: eventos que são simultâneos em um referencial não o serão em outro referencial que se mova em relação ao primeiro.

Consequências das Transformações de Lorentz

Conceito de simultaneidade

- De fato, consideremos dois eventos que ocorram ao mesmo tempo no referencial S: $t_1 = t_2$.
- Usando as transformações de Lorentz, temos:

$$t'_1 = \Gamma\left(t_1 - \frac{V}{c^2}x_1\right), \tag{51}$$

$$t'_2 = \Gamma\left(t_2 - \frac{V}{c^2}x_2\right). \tag{52}$$

- Subtraindo,

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = -\Gamma\frac{V}{c^2}\Delta x. \tag{53}$$

- Logo $t_2 \neq t_1$ e os eventos não serão simultâneos no referencial S'.

Consequências das Transformações de Lorentz

Tempo próprio e comprimento próprio

- O relógio em repouso em um dado referencial S mede o *tempo próprio*.
- Uma régua em repouso em um dado referencial S indica um *comprimento próprio*.

Consequências das Transformações de Lorentz

Tempo próprio e comprimento próprio

- Consideremos um relógio em repouso no referencial S.
- Sua posição entre dois instantes de tempo diferentes, t_1 e t_2, não muda $x_1 = x_2$.

Consequências das Transformações de Lorentz

Dilatação do tempo

- Usando as transformações de Lorentz, temos:

$$t_1' = \Gamma\left(t_1 - \frac{V}{c^2}x_1\right), \quad (54)$$

$$t_2' = \Gamma\left(t_2 - \frac{V}{c^2}x_2\right). \quad (55)$$

- Subtraindo,

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \Gamma \Delta t. \quad (56)$$

- Como $\Gamma \geq 1$, então,

$$\Delta t' \geq \Delta t. \quad (57)$$

- Esta é a dilatação temporal.

Consequências das Transformações de Lorentz

Dilatação do tempo

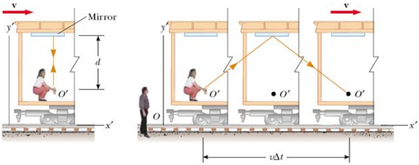
- Visto do referencial S' o relógio em repouso em S parece andar mais devagar.
- Da mesma forma, um referencial em repouso em S' parece, do ponto de vista do referencial S, parece estar se atrasando.

Invariância do elemento de distância

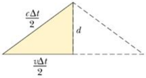
Dilatação do tempo

A relatividade do tempo

- **O intervalo de tempo entre dois eventos depende da distância (espaço-temporal) entre os eventos.**



***Intervalo de tempo próprio**: dois eventos acontecem no mesmo local



$$L^2 = \left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2 = \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2 + d^2$$

- Observador O': $\Delta t_0 = \frac{2d}{c}$ (tempo próprio*)
- Observador O: $\Delta t = \frac{2L}{c}$

$$\boxed{\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v^2}{c^2}\right)}}}$$

dilatação do tempo

Consequências das Transformações de Lorentz

Contração das distâncias

- Consideremos agora uma régua em repouso no referencial S'.
- O observador no referencial S, ao medir o comprimento da régua, deverá marcar a posição das duas extremidades ao mesmo tempo no relógio do seu referencial.

Consequências das Transformações de Lorentz

Dilatação do tempo

- Usando as transformações de Lorentz, temos:

$$x_1' = \Gamma\left(x_1 - Vt_1\right), \tag{58}$$

$$x_2' = \Gamma\left(x_2 - Vt_2\right). \tag{59}$$

- Subtraindo,

$$\Delta x' = x_2' - x_1' = \Gamma \Delta x. \tag{60}$$

- Logo,

$$L_0 = \Gamma L. \tag{61}$$

- Logo,

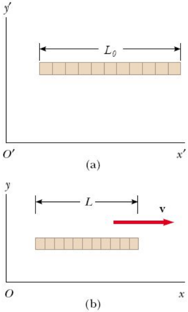
$$L \leq L_0. \tag{62}$$

Consequências das Transformações de Lorentz

Contração das distâncias

A relatividade das distâncias

- Como medir o comprimento de um corpo que não está em repouso no seu referencial?



$$\boxed{L = L_0\sqrt{1-\beta^2} = \frac{L_0}{\gamma}}$$

contração das distâncias

***comprimento próprio**: Comprimento de um corpo no referencial em que o corpo se encontra estacionário

- Efeito sentido apenas na direção de movimento!!

Consequências das Transformações de Lorentz

Efeitos reais?

- Observem no entanto que os efeitos de contração das distância e dilatação do tempo são puramente cinemáticos.
- Quer dizer, emergem como uma *perspectiva dos referenciais*.

Estrutura causal da Relatividade Restrita

Os intervalos

- Um *evento* é algo que ocorre em um dado momento em um dado lugar.
- A distância espaço-temporal entre dois eventos, caracterizados por

$$E_1 = (ct_1, x_1, y_1, z_1) \quad (63)$$

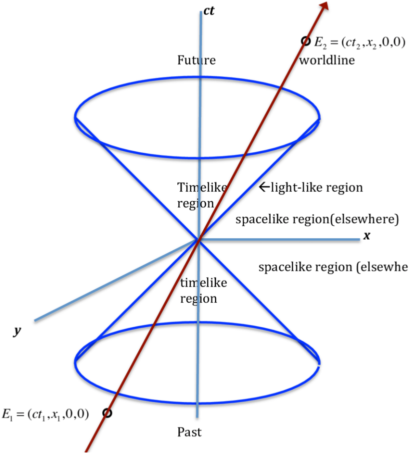
$$E_2 = (ct_2, x_2, y_2, z_2) \quad (64)$$

é

$$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2. \quad (65)$$

Estrutura causal da Relatividade Restrita

O cone de luz



Estrutura causal da Relatividade Restrita

Os intervalos

- Temos a seguinte classificação.
  - Intervalo tipo tempo:

$$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 > 0. \tag{66}$$

  - Intervalo tipo luz:

$$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = 0. \tag{67}$$

  - Intervalo tipo espaço:

$$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 < 0. \tag{68}$$

Adição das velocidades

Transformações de Lorentz

- Usando as transformações de Lorentz temos:

$$\Delta x' = \Gamma\left(\Delta x - V\Delta t\right), \tag{69}$$

$$\Delta t' = \Gamma\left(\Delta t - \frac{V}{c^2}\Delta t\right). \tag{70}$$

Adição das velocidades

- Definindo,

$$
\begin{aligned}
v' &= \frac{\Delta x'}{\Delta t'}, & (71)\\
v &= \frac{\Delta x}{\Delta t}, & (72)\\
& & (73)
\end{aligned}
$$

obtemos a lei de transformação das velocidades:

$$v' = \frac{v - V}{1 - \frac{Vv}{c^2}}. \quad (74)$$

Adição das velocidades

Primeira propriedade

- Se $v = c$,

$$v' = \frac{v - V}{1 - \frac{Vv}{c^2}} \quad (75)$$
$$= \frac{c - V}{1 - \frac{V}{c}} \quad (76)$$
$$= c. \quad (77)$$

- É o que tínhamos que esperar, de acordo com o segundo postulado da Relatividade Restrita.

Adição das velocidades

Segunda propriedade

- Se $v << c$,

$$v' \approx v - V \tag{78}$$

e a adição newtoniana das velocidades é recuperada.

Momento e energia

Um tempo invariante

- Nós já vimos que o intervalo espaço-temporal

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2, \tag{79}$$

é invariante pelas transformações de Lorentz.

Momento e energia

Um tempo invariante

- Escrevamos em duas dimensões (uma espacial e outra temporal) por simplicidade:

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2., \tag{80}$$

Momento e energia

Um tempo invariante

- Escrevamos em duas dimensões (uma espacial e outra temporal) por simplicidade:

$$\begin{aligned} \Delta s^2 &= c^2 \Delta t^2 \left(1 - \frac{1}{c^2} \frac{\Delta x^2}{\Delta t^2}\right), \\ &= c^2 \Delta t^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right). \end{aligned} \tag{81}$$

- Ou ainda,

$$\Delta s = c\gamma(v)\Delta t, \tag{82}$$

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{83}$$

Momento e energia

Um tempo invariante

- Tais relações sugerem escrever um *tempo invariante* τ tal que

$$\Delta\tau = \frac{\Delta s}{c} = \gamma(v)\Delta t. \tag{84}$$

- Este tempo invariante é chamado de *tempo próprio*.

Momento e energia

Um tempo invariante

- Com ele podemos definir uma velocidade relativista tal que

$$\mathrm{v} = \frac{\Delta x}{\Delta \tau}. \tag{85}$$

- Esta velocidade relativista se relaciona com a velocidade medida no laboratório v da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathrm{v} &= \frac{\Delta x}{\Delta \tau} \\ &= \frac{\Delta x}{\Delta t}\frac{\Delta t}{\Delta \tau} \\ &= \gamma(v)v \\ &= \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned} \tag{86}$$

Momento e energia

Momento relativista

- Podemos definir também um momento relativista tal que

$$\mathrm{p} = m\frac{\Delta x}{\Delta \tau}. \tag{87}$$

- Este momento relativista se relaciona com o momento medid0 no laboratório v da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathrm{p} &= m\frac{\Delta x}{\Delta \tau} \\ &= m\frac{\Delta x}{\Delta t}\frac{\Delta t}{\Delta \tau} \\ &= \gamma(v)v \\ &= m\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned} \tag{88}$$

Momento e energia

Energia relativista

- Podemos definir também uma energia relativista tal que

$$\mathtt{E} = m\frac{\Delta t}{\Delta \tau}c^2. \tag{89}$$

- Esta energia relativista assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathtt{E} &= mc^2\frac{\Delta t}{\Delta \tau} \\ &= \gamma(v)mc^2. \end{aligned} \tag{90}$$

Momento e energia

Energia relativista

- Quando a velocidade da partícula é nula, surge um novo conceito, o de energia de repouso associada unicamente à massa da partícula:

$$\mathtt{E} = mc^2. \tag{91}$$

Kitty, §22/12/2005 †28/11/2018