Aplicações da aproximação quase-newtoniana da Relatividade Geral a problemas em astrofísica.

Paola Terezinha Zanolla Seidel

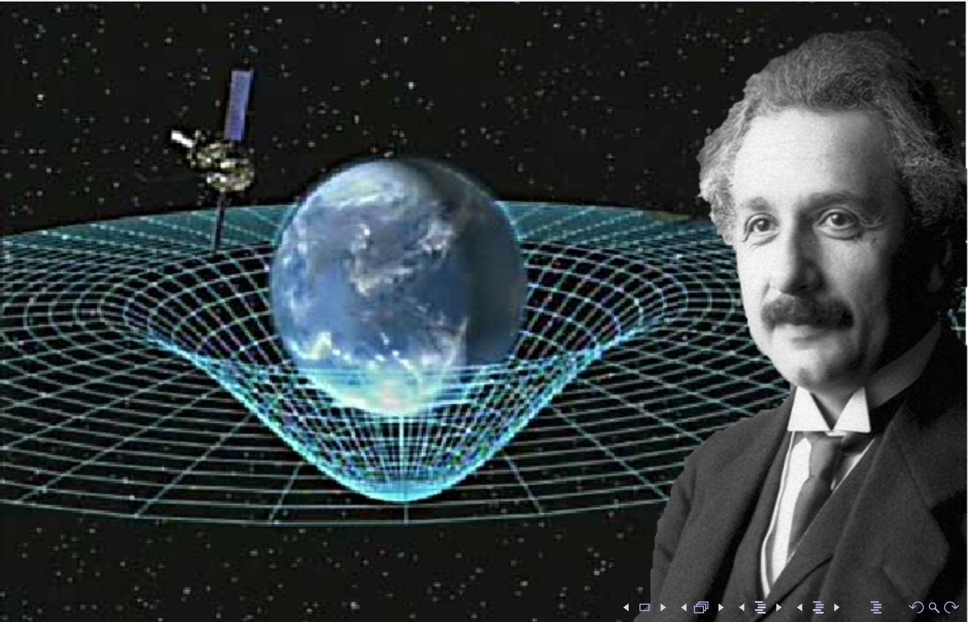
Abraão Jessé Capistrano de Souza [1]
Luís Antonio Cabral [2]

[1]Orientador [2]Co-orientador

2 de Julho de 2021

Roteiro

Objetivos

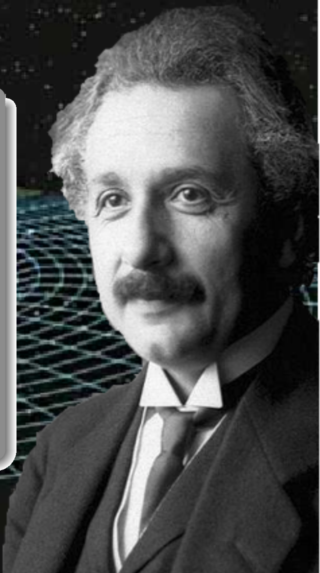


Objetivos

(i) Explorar aplicações da Física à astrofísica;

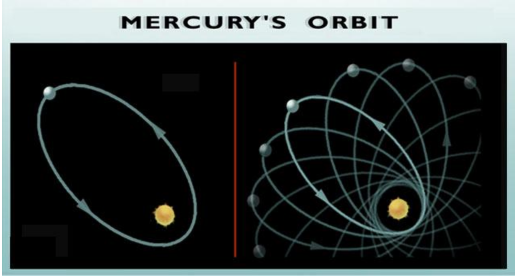
(ii) Contribuir para o refinamento dos resultados da RG para desvio do periélio;

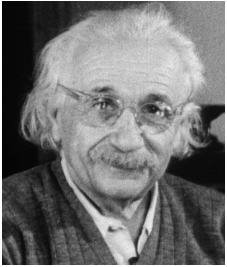
(iii) Fazer uso da aproximação NNA para o estudo do movimento lento na RG.



Roteiro

Precessão do Periélio de Mercúrio

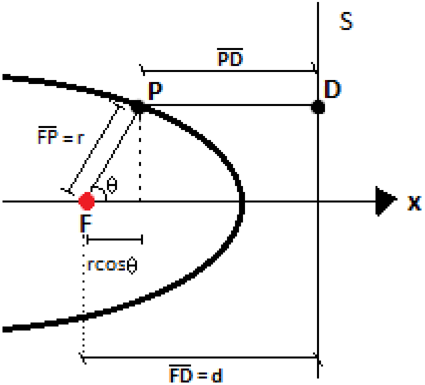




O mistério com mais de 60 anos teve fim com a publicação da teoria da gravitação de Einstein, as órbitas dos planetas e exoplanetas podem ser ligeiramente abertas.

Ref.[PAIS, A. 2005]

Equação da elipse em coordenadas polares



$$\underbrace{r = \frac{a(1-\epsilon^2)}{1+\epsilon cos\phi}}_{\text{Órbita fechada!}}$$

Ref.[LO, K; YOUNG, K; LEE, B. 2013]

Problema de Kepler

- É uma aplicação da formulação Lagrangiana, $L = T - U$.

$$\frac{\partial L}{\partial x^{\mu}} - \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\mu}}\right) = 0.$$

- Temos a conservação da energia e do momento angular;
- Simetrias, $\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\mu}}\right) = 0$;
- Tensor de Killing, $\nabla_{(\mu}\xi_{\nu)} = \nabla_{\mu}\xi_{\nu} + \nabla_{\nu}\xi_{\mu} = 0$.

Ref.[FROLOV, V. 2008]

Problema de Kepler

$$L = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + \dot{r}^2\dot{\theta}^2 + r^2 sen^2\theta\dot{\phi}^2) - \mu\Phi(r),$$

- Para $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\phi = \frac{-GM}{r}$ podemos encontrar:

$$u = \sigma^{-1}(1 + \epsilon cos\phi).$$

- Sendo $\sigma = a(1-\epsilon^2)$ e $u = r^{-1}$:

$$r = \frac{a(1-\epsilon^2)}{1+\epsilon cos\phi}, \qquad \text{(Sem precessão).}$$

Ref.[VALADA, R. 2013.]

Órbita das partículas - Formalismo Relativístico

- Pelo formalismo tensorial, $L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu}$, temos:

$$\ddot{x}^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\sigma} \dot{x}^{\lambda} \dot{x}^{\sigma} = 0 = \frac{\partial L}{\partial x^{\mu}} - \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\mu}} \right).$$

- Métrica de Schwarzschild:

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \\ ds^2 &= \left(\frac{1}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} \right) dr^2 + r^2 d^2\theta + r^2 sen^2\theta d^2\phi - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) c^2 dt^2. \end{aligned}$$

- Pela geodésica tipo tempo $\vec{v} \cdot \vec{v} = g_{\alpha\beta} v^{\alpha} v^{\beta} = -1$

Refs.[D'INVERNO, R. 1999 e HARTLE, J. 2003]

Órbita das partículas - Formalismo Relativístico

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} - 1 + u = 3u^2\left(\frac{m^{*2}}{l^2}\right) \tag{1}$$

$$u = 1 + \epsilon cos[(1-\bar{\alpha})\phi] \tag{2}$$

$$cos[(1-\bar{\alpha})\phi] = cos(2\pi) \tag{3}$$

$$\phi = \frac{2\pi}{1-\bar{\alpha}} \approx 2\pi(1 + \underbrace{\bar{\alpha}}_{Precessão}) \tag{4}$$

- Sendo $\bar{\alpha} = 3\frac{m^{*2}}{l^2}$, $l^2 = um^*r = (1+\epsilon cos\phi)m^*r$, $m^* = \frac{GM}{c^2}$ e r da equação da elipse, temos:

$$\delta\phi_{Merc} = 2\pi\bar{\alpha} = \frac{6\pi m^{*2}}{(1+\epsilon cos\phi)m^*r} = \frac{6\pi GM}{c^2a(1-\epsilon^2)} = 43''/sec \tag{5}$$

Refs.[HARTLE, J. 2003 e CARROLL, S. 2004]

Roteiro

Aproximação PPN e NNA

PPN

- A versão do PPN (formalismo pós-newtoniano parametrizado) concebida por Clinfford e Kenneth contém dez parâmetros;
- A expansão PPN não é uniformente válida para grandes distâncias.

NNA

- A aproximação quase newtoniana simplifica a análise da RG no regime de movimento lento;
- Trata-se de uma aproximação já esclarecida por Thorne, Misner e Wheeler (1973, pp. 412-416), que permite encontrar situações de **campo quase Newtoniano**;

Refs.[MISNER, C; THORNE, K; WHEELER, J. 1973]

NNA - aproximação quase newtoniana

- Infeld e Plebanski mostraram as eq. de campo de Einstein levam às eq. de movimento [MISNER, C et al. 1973].

Geodésica $\rightarrow$ Equações do Movimento (Força)

$$\frac{d^2x^\beta}{ds^2} + \Gamma^\beta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 0 \tag{6}$$

$v << c$ e $\frac{\Phi_N}{c^2} << 1 \rightarrow \Phi_{qN} = -\frac{c^2}{2}(1 + g_{44})$.

Desvio Geodésico $\rightarrow$ Equação de Campo (Equação de Poisson)

$$\frac{D^2\delta x^\mu}{dS^2} = R^\mu_{\alpha\beta\nu}\delta x^\alpha \frac{dx^\beta}{dS}\frac{dx^\nu}{dS}. \tag{7}$$

Refs.[CAPISTRANO, A. 2018; MISNER et al. 1973; MAIA, M et al. 2009]

Roteiro

Aplicações

- A determinação do periélio com inclusão de efeitos relatívisticos podem ser úteis para a produção de modelos confiáveis;
- A expansiva descoberta de exoplanetas nos possibilita um novo laboratório para testar efeitos relativísticos;
- A compreensão dos sistemas estrela-planeta e suas dinâmicas permitem entender a gravidade em uma escala do sistema Solar e por corolário, a formação de sistemas planetários, por exemplo;
- Modelo gravitacional do espaço-tempo como uma ferramenta de apoio para estudos astrofísicos.

Precessão do periastro de exoplanetas - Métrica de Weyl

- Aplicação da NNA da RG para obtenção do avanço do periastro de 34 exoplanetas com diferentes ϵ.

$$ds^2 = e^{2(\lambda-\sigma)}dr^2 + r^2 e^{-2\sigma} d\theta^2 + e^{2(\lambda-\sigma)}dz^2 - e^{2\sigma}dt^2 \tag{8}$$

- Condição de lina fina, $h_0 \ll R_0$;
- Uso da equação da geodésica;
- Uso da solução conformastática, λ ajustado para zero;
- Fazendo $u = \frac{1}{r}$;

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = e^{-2\sigma}\left(\alpha_0 + \beta_0 e^{-2\sigma}\right) \tag{9}$$

e

$$\sigma(u) = -\frac{1}{2}\left(\frac{k_0}{2} ln(u) + C_0 u^{-2}\right). \tag{10}$$

Refs.[CAPISTRANO, A. 2009; CAPISTRANO, A. 2018; BARROCAS, G. 2014]

Precessão do periastro de exoplanetas - Métrica de Weyl

- Pelo uso do método de Harko [HARKO, T. 2011] encontramos a equação do desvio do periélio para o caso de Weyl

$$\delta\theta = \underbrace{\frac{6\pi GM}{c^2 a(1-\epsilon^2)}}_{\delta\theta_{schw}} - 4\beta_0 C_0 \pi; \tag{11}$$

- $\theta = \phi$ e $C_0 \ll 1 \rightarrow C_0 = \pm\frac{\delta}{4\pi}\nu$, sendo $\nu = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} = \frac{2\pi}{T}$;
- $\beta_0 = \epsilon^4\sqrt{1-\epsilon^2}$, com β_0 no intervalo $[0, 1]$;

$$\delta\phi = \delta\phi_{schw} \pm \frac{2\pi}{T}\beta_0. \tag{12}$$

Ref.[CAPISTRANO, A. 2014]

Precessão baseada no NNA para exoplanetas com excentricidade maior que 0,1

Table 1 Relevant quantities for the determination of perihelion precession for selected exoplanets with eccentricities larger than 0.1 and smaller than 0.4. The orbital data were extracted from (Jórdan and Bakos 2008) and updated uncertainties of the planets HD49674b (Wright et al. 2007), HD88133b (Butler et al. 2006), HD118203b (Butler et al. 2006) and XO-3b (Krull et al. 2008)

Object	a (AU)	Mean eccentricity	P (days)
HD49674b	0.0580 ± 0.0033	0.29 ± 0.15	4.9437 ± 0.0023
HD88133b	0.0472 ± 0.0027	0.133 ± 0.072	3.41587 ± 0.00059
GJ436b	0.0280	0.1590	2.644
HD118203b	0.0703 ± 0.0041	0.309 ± 0.014	6.13350 ± 0.0006
HAT-P-2b	0.0690	0.5070	5.6330
HD185269b	0.0770	0.2960	6.8380
XO-3b	0.0476 ± 0.0005	0.260 ± 0.017	3.1915426 ± 0.00014

Ref.[CAPISTRANO, A; SEIDEL, P; NEVES, V. Astrophys Space Sci, 364, 47, 2019]

Precessão baseada no NNA para exoplanetas com excentricidade maior que 0,1

Table 1 Relevant quantities for the determination of perihelion precession for selected exoplanets with eccentricities larger than 0.1 and smaller than 0.4. The orbital data were extracted from (Jórdan and Bakos 2008) and updated uncertainties of the planets HD49674b (Wright et al. 2007), HD88133b (Butler et al. 2006), HD118203b (Butler et al. 2006) and XO-3b (Krull et al. 2008)

Object	a (AU)	Mean eccentricity	P (days)
HD49674b	0.0580 ± 0.0033	0.29 ± 0.15	4.9437 ± 0.0023
HD88133b	0.0472 ± 0.0027	0.133 ± 0.072	3.41587 ± 0.00059
GJ436b	0.0280	0.1590	2.644
HD118203b	$\boxed{0.0703 \pm 0.0041}$	0.309 ± 0.014	$\boxed{6.13350 \pm 0.0006}$
HAT-P-2b	0.0690	0.5070	5.6330
HD185269b	$\boxed{0.0770}$	0.2960	$\boxed{6.8380}$
XO-3b	0.0476 ± 0.0005	0.260 ± 0.017	3.1915426 ± 0.00014

Precessão baseada no NNA para exoplanetas com excentricidade maior que 0,1

Table 2 Comparison between the precession expected from standard parameterized post-newtonian (PPN) approximation $\delta\phi_{sch}$ with the nearly newtonian approximation (NNA) $\delta\phi_{sch}$ in units of degrees per century deg cy^{-1} as shown by the relative difference $\Delta\phi$ in the fourth column. The last column shows the relative β_0 parameter for each exoplanet. The $\delta\phi_{sch}$ data were obtained from Jórdan and Bakos (2008)

Object	$\delta\phi_{sch}$	$\delta\phi$	$\Delta\phi$ (%)	β_0
HD49674b	1.576	1.57912 ± 0.00044	0.1979	0.00677 ± 0.01398
HD88133b	2.958	2.95593 ± 0.00008	−0.0699	0.00031 ± 0.00067
GJ436b	2.234	2.26056	1.1888	0.00063
HD118203b	1.231	1.23007 ± 0.0002	−0.0755	0.00867 ± 0.00164
HAT-P-2b	1.836	1.86244	1.44	0.05695
HD185269b	1.046	1.05579	0.9359	0.00733
XO-3b	3.886	3.88305 ± 0.00062	−0.0759	0.00441 ± 0.00119

Precessão baseada no NNA para exoplanetas com excentricidade maior que 0,1

Table 2 Comparison between the precession expected from standard parameterized post-newtonian (PPN) approximation $\delta\phi_{sch}$ with the nearly newtonian approximation (NNA) $\delta\phi_{sch}$ in units of degrees per century deg cy^{-1} as shown by the relative difference $\Delta\phi$ in the fourth column. The last column shows the relative β_0 parameter for each exoplanet. The $\delta\phi_{sch}$ data were obtained from Jórdan and Bakos (2008)

Object	$\delta\phi_{sch}$	$\delta\phi$	$\Delta\phi$ (%)	β_0
HD49674b	1.576	1.57912 ± 0.00044	0.1979	0.00677 ± 0.01398
HD88133b	2.958	2.95593 ± 0.00008	−0.0699	0.00031 ± 0.00067
GJ436b	2.234	2.26056	1.1888	0.00063
HD118203b	1.231	1.23007 ± 0.0002	−0.0755	0.00867 ± 0.00164
HAT-P-2b	1.836	1.86244	1.44	0.05695
HD185269b	1.046	1.05579	0.9359	0.00733
XO-3b	3.886	3.88305 ± 0.00062	−0.0759	0.00441 ± 0.00119

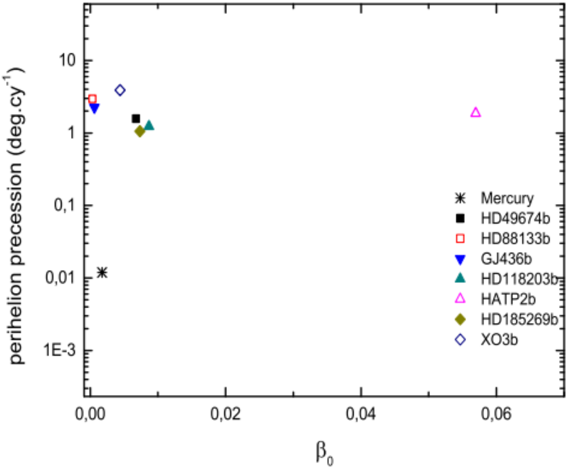


Fig. 1 Comparison between the calculated apsidal precession from NNA method in logarithm scale, the β_0 parameter and the eccentricity for the first group studied with eccentricity larger than 0.1. As a reference, the value of apsidal precession of Mercury is represented by the symbol $(*)$

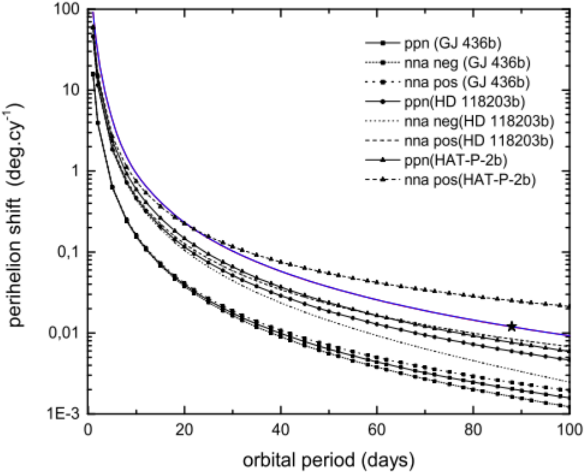


Fig. 2 Comparison between the calculated apsidal precession versus orbital period in days from comparing the NNA positive $\delta\phi_+$ and negative $\delta\phi_-$ solutions to the expected value as indicated. As a reference, the value of apsidal precession of Mercury is represented by the star symbol

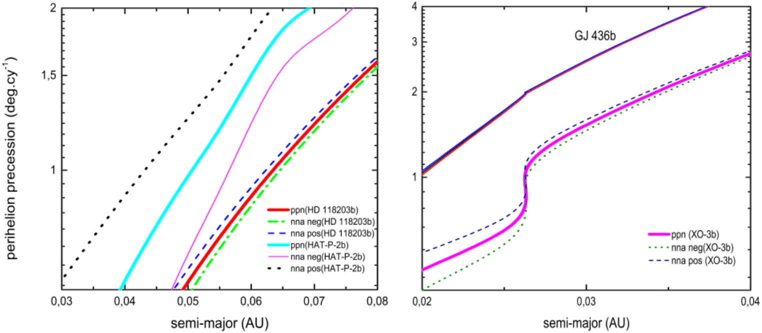


Fig. 3 The calculated apsidal precession (in units of deg cy^{-1}) in function of the semi-major (in units of AU) from comparing the NNA positive (pos) $\delta\phi_+$ and negative (neg) $\delta\phi_-$ solutions with the standard PPN solution (bold solid lines in panels) for a set of exoplanets (Table 1) due to their high values of apsidal precession. In the left panel, we compare the exoplanets HD118203b and HAT-P-2b. In the right panel, it shows a comparison between XO-3B and GJ436b. In the latter, there is no significant difference in the curves from PPN and NNA

Análises - tabela (1) e (2)

- ϵ e β_0 são procionais;
- $\delta\phi > \delta\phi_{Merc} \approx 0,0119 deg.cy^{-1}$;
- $\Delta\phi = \Delta\phi\% = 100\frac{\delta\phi^{\pm} - \delta\phi_{schw}}{\delta\phi_{schw}} < 2\%$ e $\Delta\phi < 0$ mostra como o valor percentual excede os valores da RG.

O modelo é sensível à variação do semi-eixo maior e dos períodos orbitais.

$$\downarrow a + \downarrow P + \uparrow \beta_0 \quad \longrightarrow \quad \uparrow \delta\phi$$

Precessão do periastro de exoplanetas com excentricidades pequenas e órbitas circulares

Table 3 Relevant quantities for the determination of the apsidal precession of selected exoplanets with eccentricities smaller than 0.1. Particularly, for the Kepler family the authors (Macdonald et al. 2016) state they cannot determine the exact value for their eccentricity, which is regarded as null in this paper

Object	γ (AU) ($\times 10^{-3}$)	Mean eccentricity	τ (days)
WASP 12b	22.9 ± 0.8	0.049 ± 0.0150	1.091423 ± 0.000003
WASP 14b	37.1 ± 1.1	$0.0830^{+0.0029}_{-0.0030}$	$2.24376507 \pm 4.6 \times 10^{-7}$
Kepler 80f	17.5 ± 0.2	0	0.9867873 ± 0.00000006
Kepler 80d	37.2 ± 0.5	0	$3.07222^{+0.00006}_{-0.00004}$
Kepler 80e	49.1 ± 0.7	0	$4.64489^{+0.00020}_{-0.00019}$
Kepler 80b	64.8 ± 0.9	0	$7.05246^{+0.00020}_{-0.00022}$
Kepler 80c	79.2 ± 1.1	0	$9.52355^{+0.00041}_{-0.00029}$
TRAPPIST-1b	11.11 ± 0.34	0.081	$1.51087081 \pm 0.6 \times 10^{-6}$
TRAPPIST-1c	15.21 ± 0.47	0.083	$2.4218633 \pm 0.17 \times 10^{-5}$
TRAPPIST-1d	$21.44^{+0.66}_{-0.63}$	0.070	$4.049610 \pm 0.63 \times 10^{-4}$
TRAPPIST-1e	$28.17^{+0.83}_{-0.87}$	0.085	$6.099615 \pm 0.11 \times 10^{-4}$
TRAPPIST-1f	37.1 ± 1.1	0.063	$9.206690 \pm 0.15 \times 10^{-4}$
TRAPPIST-1g	45.1 ± 1.4	0.061	$12.35294 \pm 0.12 \times 10^{-3}$
TRAPPIST-1h	63^{+27}_{-13}	0	20^{+15}_{-6}

Precessão do periastro de exoplanetas com excentricidades pequenas e órbitas circulares

Table 4 Prediction of perihelion precession $\delta\phi$ in units of degrees per century deg cy^{-1} from the NNA approximation for selected exoplanets with eccentricities smaller than 0.1 as compared with the perihelion precession $\delta\phi_{sch}$ from Einstein's standard result. The last column shows the relative β_0 parameter for each eccentricity

Object	$\delta\phi_{sch}$	$\delta\phi$	β_0
WASP 12b	21.0038281 ± 0.0000018	21.0038282 ± 0.0001728	0.0000058 ± 0.000
WASP 14b	6.37353945 ± 0.0000061	6.3735395 ± 0.0010906	0.0000473 ± 0.000
Kepler 80f	16.5564890 ± 0.0000208	16.5564889 ± 0.0000208	0
Kepler 80d	2.47908685 ± 0.0000000	2.47908686 ± 0.0000000	0
Kepler 80e	1.24968191 ± 0.0000000	1.24968191 ± 0.0000000	0
Kepler 80b	0.62185756 ± 0.0000000	0.62185756 ± 0.0000000	0
Kepler 80c	0.37723898 ± 0.0000000	0.37723898 ± 0.0000000	0
TRAPPIST-1b	1.87140472 ± 0.0000001	1.87140472 ± 0.0000001	0.0429053 ± 0.000
TRAPPIST-1c	0.85187242 ± 0.0000000	0.85187242 ± 0.0000000	0.0472946 ± 0.000
TRAPPIST-1d	0.36133167 ± 0.0000000	0.36133167 ± 0.0000000	0.0239511 ± 0.000
TRAPPIST-1e	0.18296937 ± 0.0000000	0.18296937 ± 0.0000000	0.0520117 ± 0.000
TRAPPIST-1f	0.09198716 ± 0.0000000	0.09198716 ± 0.0000000	0.0157217 ± 0.000
TRAPPIST-1g	0.05626313 ± 0.0000000	0.056263133 ± 0.000000	0.0138206 ± 0.000
TRAPPIST-1h	0.025772344	0.025772343	0

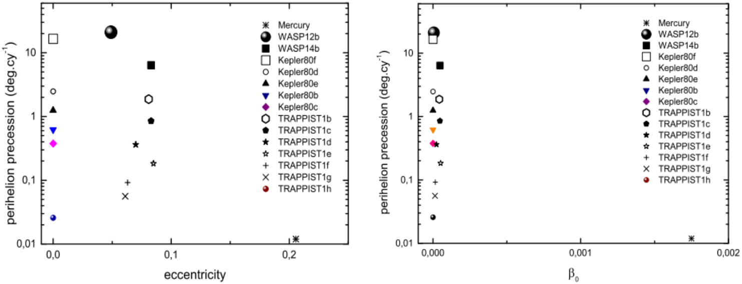


Fig. 4 Comparison between the calculated apsidal precession from NNA method in logarithm scale, the β_0 parameter and the eccentricity for the group 2 with 14 exoplanets. As a reference, the value of apsidal precession of Mercury is represented by the symbol ($*$)

Precessão do periastro de exoplanetas com excentricidades grandes

Table 5 Relevant quantities for determination the apsidal precession of selected exoplanets with large eccentricity

Object	γ (AU)	Mean eccentricity	τ (days)
HD66428b	3.18 ± 0.19	0.465 ± 0.030	1973 ± 31
HD37605b	0.261 ± 0.015	0.737 ± 0.010	54.23 ± 0.23
HD45350b	1.96 ± 0.11	0.798 ± 0.053	967 ± 6.2
HD168443b	0.300 ± 0.017	0.5296 ± 0.0032	58.11055 ± 0.00086
HD187085b	2.26 ± 0.13	0.75 ± 0.100	1147 ± 4
HD210277b	1.138 ± 0.066	0.476 ± 0.017	442.19 ± 0.50
HD222582b	1.347 ± 0.078	0.725 ± 0.012	572.38 ± 0.61
HD33283b	0.145	0.480 ± 0.050	18.1790 ± 0.0070
HD74156b	0.290 ± 0.017	0.6360 ± 0.0091	51.643 ± 0.011
HD117618b	0.176 ± 0.010	0.42 ± 0.17	25.827 ± 0.019
HD154857b	1.132 ± 0.069	0.510 ± 0.060	398.5 ± 9.0
16CygBb	1.681 ± 0.097	0.681 ± 0.017	798.5 ± 1.0
HD190228b	2.25 ± 0.13	0.499 ± 0.030	1146 ± 16

Precessão do periastro de exoplanetas com excentricidades grandes

Table 6 Prediction of perihelion precession $\delta\phi$ in units of milli-degrees per century mdeg cy^{-1} for selected exoplanets with large eccentricity. In the third and fifth columns, it is shown the values of the relative difference $\Delta\phi$ for the solutions $\delta\phi^{(+)}$ and $\delta\phi^{(-)}$, respectively. The values for the β_0 parameters are also shown. The values of $\Delta\phi^{(-)}$ (%) are the same as in $\Delta\phi^{(+)}$ (%) with negative sign

Object	$\delta\phi_{sch}$	$\delta\phi^{(+)}$	$\Delta\phi^{(+)}$ (%)	$\delta\phi^{(-)}$	β_0
HD66428b	0.08727	0.08726	0.0011	0.08726	0.04139 ± 0.0119
HD37605b	48.5701	48.5704 ± 0.0050	0.0006	48.5699 ± 0.00503	0.19941 ± 0.015
HD45350b	0.6077	0.6078 ± 0.00121	0.0031	0.6076 ± 0.00121	0.24439 ± 0.103
HD168443b	33.1127	33.1128 ± 0.1605	0.0002	33.1127 ± 0.1605	0.06673 ± 0.001
HD187085b	0.4019	0.4019 ± 0.00283	0.0032	0.4019 ± 0.00281	0.20928 ± 0.155
HD210277b	1.0060	1.0060 ± 0.00106	0.0007	1.0060 ± 0.00106	0.04515 ± 0.007
HD222582b	1.0596	1.0596 ± 0.00216	0.0024	1.0595 ± 0.00216	0.19029 ± 0.018
HD33283b	236.224	236.2241 ± 0.2242	0.0001	236.2237 ± 0.2242	0.04657 ± 0.021
HD74156b	53.2647	53.2649 ± 0.06155	0.0003	53.2646 ± 0.06155	0.12626 ± 0.009
HD117618b	113.410	113.4097 ± 0.1785	0.0001	113.4095 ± 0.1785	0.02824 ± 0.046
HD154857b	1.4218	1.4217 ± 0.00000	0.0007	1.4217 ± 0.000000	0.05819 ± 0.030
16CygBb	0.5377	0.5377 ± 0.00154	0.0026	0.5377 ± 0.00154	0.1574 ± 0.021
HD190228b	0.2327	0.2327 ± 0.00154	0.0013	0.2327 ± 0.00154	0.05373 ± 0.014

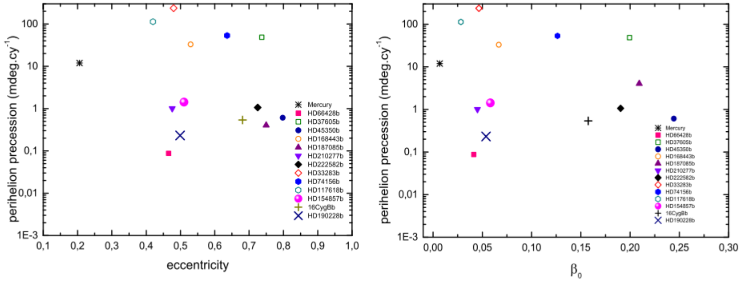


Fig. 5 Comparison between the calculated apsidal precession in logarithm scale, the β_0 parameter and the eccentricity for the third group with 13 exoplanets for large eccentricities ($\epsilon > 0.4$). As a reference, the value of apsidal precession of Mercury is represented by the symbol ($*$)

Métrica de Zipoy

- A métrica original usada por Zipoy é um elemento de linha com simetria cilíndrica e estática:

$$ds^2 = -e^{2(\xi-\sigma)}(d\rho^2 + dz^2) - \rho^2 e^{-2\sigma} d\phi^2 + e^{2\sigma} dt^2. \tag{13}$$

- Em coordenadas esferoidal oblata:

$$\rho = a\ coshvcos\theta \tag{14}$$

e

$$z = a\ senhvsen\theta. \tag{15}$$

- Fazendo $x = senhv$, $y = sen\theta$ e $r = ax$ um novo formato para a métrica de Zipoy é encontrada.

Ref.[ZIPOY, D. 1966]

Métrica de Zipoy

- As soluções para o potencial Newtoniano podem ser escritas como uma combinação linear de polinômios de Legendre de ordem integral l.

Três soluções são destacadas por Zipoy:

- $l = 0 \rightarrow$ **é referente a solução "monopólo";**
- $l = 1 \rightarrow$ é referente a solução de momento de dipolo;
- $l = 0$ e $l = 1 \rightarrow$ é a solução de "monopólo-dipolo".

$$\begin{aligned} ds^2 &= -e^{2(\xi-\sigma)}[dr^2 + (r^2 + a^2)d\theta^2] \\ &- e^{-2\sigma}(r^2 + a^2)cos^2\theta d\phi^2 + e^{2\sigma}dt^2 \end{aligned} \quad (16)$$

Ref.[ZIPOY, D. 1966]

Métrica de Zipoy

Para $l = 0$:

$$e^{2\xi} = \left(\frac{r^2 + a^2 sen^2\theta}{r^2 + a^2}\right)^{\beta^2+1} \quad \text{e} \quad \sigma = -\beta \arctan\frac{a}{r} \tag{17}$$

- Para $l = 1$:

$$\xi = \frac{(1-\gamma^2)}{2} ln\left(\frac{r^2 + a^2 sen^2\theta}{r^2 + a^2}\right) - \frac{\gamma^2 cos^2\theta}{2}\left[\left(arctan\frac{a}{r}\right)^2 + \left(1 - \frac{r}{a} arctan\frac{a}{r}\right)^2\right];$$

$$\sigma = \gamma\left(1 - \frac{r}{a}\arctan\frac{a}{r}\right) sen\theta \quad \text{sendo} \quad \gamma = \frac{3p}{a^2}.$$

- Para $l = 0$ e $l = 1$:

$$\sigma = -\beta \arctan\frac{a}{r} + \gamma\left(1 - \frac{r}{a}\arctan\frac{a}{r}\right) sen\theta;$$

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{1}{2}\lambda ln\left(\frac{r^2 + a^2 sen^2\theta}{r^2 + a^2}\right) - 2\beta\gamma\left(sen\theta arctan\frac{a}{r} - arctan\frac{asen\theta}{r}\right)\\ &- \frac{1}{2}\gamma^2 cos^2\theta\left[\left(arctan\frac{a}{r}\right)^2 + \left(1 - \frac{r}{a} arctan\frac{a}{r}\right)^2\right] \quad \text{sendo} \quad \lambda = 1 + \beta^2 - \gamma^2.\end{aligned}$$

Ref.[ZIPOY, D. 1966]

Considerações:

- Temos $\beta = \frac{m}{a}$ sendo m a "massa" e a como "raio";
- Quando $\sigma \rightarrow 0$ a eq.(16) $\rightarrow ds^2$ de Schw. isotrópico, pois $r \rightarrow \infty$;
- Para $r \ll a$ e $v = \frac{r}{a}$ temos singularidades anéis.

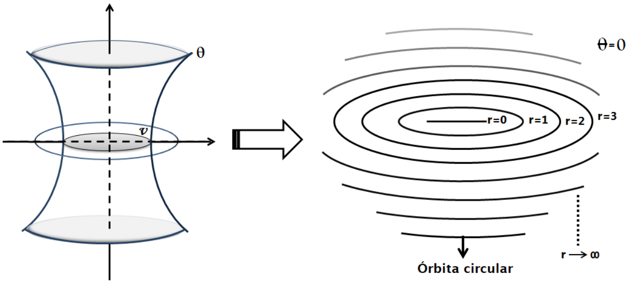


Figura: Ilustração das coord. oblatas (v, θ) com um hiperbolóide e elipsóide centrado.

Ref.[CAPISTRANO, A; SEIDEL, P; CABRAL, L. Eur. Phys. J. C, 79, 730, 2019]

Desvio do periélio - métrica de Zipoy $l = 0$ e $\theta = 0$

- Tomando $\vec{v} \cdot \vec{v} = g_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta = -1$, sendo $v^\alpha = \frac{d\alpha}{d\tau}$ temos:

$$-\left(\frac{r^2}{r^2+a^2}\right)^{\beta^2+1} e^{-2\sigma(r)} \underbrace{(v^r)^2}_{\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2} - e^{-2\sigma(r)}(r^2+a^2) \underbrace{(v^\phi)^2}_{\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2} + e^{2\sigma(r)} \underbrace{(v^t)^2}_{\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2} = -1.$$

- Quantidades conservadas envolvidas:

$$L = -e^{-2\sigma(r)}(r^2+a^2)\frac{d\phi}{d\tau} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 = \frac{L^2 e^{4\sigma(r)}}{(r^2+a^2)^2}$$

e

$$E = e^{2\sigma(r)}\frac{dt}{d\tau} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = E^2 e^{-4\sigma(r)}.$$

Desvio do periélio - métrica de Zipoy $l = 0$ e $\theta = 0$

- Fazendo:

$$\alpha(u) = (1 + a^2u^2)^{\beta^2} = 1 + \beta^2 a^2 u^2 + \ldots + O(u). \tag{18}$$

e

$$C(u) = E^2 e^{-2\sigma(u)}, \text{ sendo } E^2 e^{-2\sigma(u)} >> 1. \tag{19}$$

- Obtemos:

$$\begin{aligned}\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 \quad &= \quad u^2\left[\frac{3a^2E^2}{e^{4\sigma(u)}L^2} - 1\right] + u^4a^2\beta^2\left[\frac{3a^2E^2}{e^{4\sigma(u)}L^2} - 1\right] \\ &+ \quad a^2u^4\left[\frac{3a^2E^2}{e^{4\sigma(u)}L^2} - 2\right] + \frac{(1 + a^2u^2\beta^2)E^2}{e^{4\sigma(u)}L^2} + u^2.\end{aligned}$$

Desvio do periélio - métrica de Zipoy $l = 0$ e $\theta = 0$

- Sabemos que $\sigma(u) = -\beta arctan(au)$, $\beta = \dfrac{m}{a}$, $u = \dfrac{1}{r}$ e $r = ax = asenhv$. Logo temos:
$e^{-4\sigma(v)} = e^{4\beta arctan\left(\frac{a}{asenhv}\right)} = e^{4\beta arctan(cschv)}$.
- Temos duas regiões para considerar.

Região $\sigma(v) \to 0$ (expansão em torno da singularidade em anel)

$$e^{-4\sigma(v)} = 1 - 4\sigma(v) + 8\sigma(v)^2 + ... \approx 1 - 4\sigma(v);$$

$$-4\sigma(v) = -2\beta\pi;$$

Temos $e^{-4\sigma(v)}$ se aproxima de $e^{-2\beta\pi}$.

Região $\sigma(v \to \infty)$ (próxima a órbita circular)

Temos $e^{-4\sigma(v)}$ se aproximando de 1.

Região $\sigma(v) \to 0$ ($e^{-4\sigma(v)} \to e^{-2\beta\pi}$)

$$\begin{aligned}\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 &= \frac{E^2}{L^2}e^{-2\beta\pi} + u^2\left[\frac{a^2E^2}{L^2}e^{-2\beta\pi}(3+\beta^2)\right] \\ &+ u^4\left[a^2\beta^2\left[\frac{3a^2E^2}{L^2}e^{-2\beta\pi} - 1\right] + a^2\left[\frac{3a^2E^2}{L^2}e^{-2\beta\pi} - 2\right]\right].\end{aligned}$$

Região $\sigma(v \to \infty)$ ($e^{-4\sigma(v)} \to 1$)

$$\begin{aligned}\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 &= u^2\left[\frac{a^2E^2}{L^2}(3+\beta^2)\right] \\ &+ u^4\left[a^2\beta^2\left[\frac{3a^2E^2}{L^2} - 1\right] + a^2\left[\frac{3a^2E^2}{L^2} - 2\right]\right] + \frac{E^2}{L^2}.\end{aligned}$$

Solução geral para o desvio do periélio de Zipoy para $l = 0$

- Surge da expansão assintótica de concordância, somando as equações das duas regiões e subtraindo o resultado da equação de órbita sobreposta, quando $\beta = 0$.

$$\delta\phi_{(zipoy)} = \frac{-2\pi a^2 E^2}{L^2}\left(3e^{-2\beta\pi} + \beta^2\left(1 + e^{-2\beta\pi}\right)\right). \quad (20)$$

- Para $\beta \ll 1$, temos $e^{-2\beta\pi} \approx 1 - 2\beta\pi$ logo:

$$\delta\phi_{(zipoy)} = \frac{-6\pi a^2 E^2}{L^2}(1 - 2\beta\pi). \quad (21)$$

PRECESSÕES RETRÓGRADAS INCLUÍDAS!

Solução geral para o desvio do periélio de Zipoy para $l = 0$

- Com base em $E = \dfrac{-GM}{2\gamma}$ e $L^2 = \mu p$, com $\mu = GM$ e $p = \gamma(1-\epsilon^2)$ logo a eq.(21):

$$\delta\phi_{(zipoy)} = \frac{-3\pi a^2 GM(1-2\beta\pi)}{2c^2\gamma^3(1-\epsilon^2)}.$$

- Sabemos que $\dfrac{GM}{\gamma^3} = \left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2$:

$$\delta\phi_{(zipoy)} = \frac{-6\pi^3 a^2(1-2\beta\pi)}{c^2(1-\epsilon^2)T^2}. \qquad (22)$$

Semelhante ao desvio obtido pela métrica de Schwarzschild,

$$\delta\phi_{(schw)} = \frac{24\pi^3 a^2}{c^2 T^2(1-\epsilon^2)}. \qquad (23)$$

Teste do qui-quadrado (*Software* Gnuplot 5.2)

Tabela 9: $\delta\phi_{(obs)}$ para o teste do qui-quadrado

P	$\delta\phi_{(obs)}$	Ref.
89	43.098 ± 0.503	[NAMBUYA, G. 2010; PITJEVA, E. 2013; PITJEV, N. 2013]
88	43.20 ± 0.86	[SHAPIRO, I. 1972]
89	43.11 ± 0.22	[SHAPIRO, I. 1976]
88	43.11 ± 0.22	[ANDERSON, J. 1978]
87	42.98 ± 0.09	[SHAPIRO, I. 1990]
87	43.13 ± 0.14	[ANDERSON, J. 1992]

$$a_* \approx -1.15806 \times 10^{11} \tag{24}$$

$$\chi^2 = 0.0166 \tag{25}$$

$$p > 0.95. \tag{26}$$

Valor do desvio do periélio de Mercúrio para Zipoy

$$\delta\phi(zipoy)(Merc) = -2.18131 \times 10^{-15}(1 - 6.28318\beta)\frac{{a_*}^2}{P^3}.$$

- Sendo $a_* = -1.15806 \times 10^{11}$, $P = 87.969$ [NASA Mercury Fact Sheet] e $\beta = 8.86038 \times 10^{-6}$:

$$\delta\phi(zipoy)_{Merc} = 42.9696\,''.cy^{-1} \tag{27}$$

Table 1 Comparison between the values for secular precession of Mercury in units of arcsec/century($''.cy^{-1}$) of the standard (Einstein) perihelion precession $\delta\phi_{sch}$ [26] and the Weyl conformastatic solution $\delta\phi_{Weyl}$. The $\delta\phi_{obs}$ stands for the secular observed perihelion precession in units of arcsec/century. In the fourth column, some observational values of perihelion precession are available. The first data point was adapted from [61] by adding a supplementary precession calibrated with the Ephemerides of the Planets and the Moon (EPM2011) [62,63]

$\delta\phi_{sch}$	$\delta\phi_{Weyl}$	$\delta\phi_{Zipoy}$	$\delta\phi_{obs}$	References
42.9781	43.105	42.9696	43.098 ± 0.503	[61–63]
			43.20 ± 0.86	[64]
			43.11 ± 0.22	[65]
			43.11 ± 0.22	[66]
			42.98 ± 0.09	[67]
			43.13 ± 0.14	[68]
			42.98 ± 0.04	[69,70]
			43.03 ± 0.00	[71]
			43.11 ± 0.45	[72,73]

Table 2 Comparison between the observational values $\delta\phi_{obs}$ for secular precession in units of arcsec/century and the values from the standard (Einstein) perihelion precession and the Zipoy solution $\delta\phi_{model}$ for selected asteroid 1566 Icarus and 2-Pallas

Object	$\delta\phi_{obs}\,(''.cy^{-1})$	$\delta\phi_{sch}\,(''.cy^{-1})$	$\delta\phi_{model}\,(''.cy^{-1})$
1566 Icarus	10.05	10.0613	10.029
2 Pallas	−133.534	–	−133.52

- 1566 Icarus: $a_* \approx -3.21987 \times 10^{11}$; $\beta = 8.0222 \times 10^{-6}$; $\chi^2 = 0.00272$ e $p > 0.95$.
- 2-Pallas: $a_* \approx -1.680 \times 10^{13}$; $\beta = 8.0222 \times 10^{-6}$; $\chi^2 = 1245.46$ e $p > 0.95$.

Roteiro

Conclusões

- O modelo gravitacional e uma aproximação apropriada podem surtir em soluções fisicamente adequadadas para fins astrofísicos;

- Tomamos os dados de 34 exoplanetas como laboratório para testar efeitos relativísticos no movimento lento da RG respeitando o perfil não-linear da teoria via NNA para o desvio do periastro. O aumento da precisão auxilia a notar perturbações relativísticas nos parâmetros orbitais planetários.

- O parâmetro β_0 pode ser interessante para ser explorar e pode ser possível para encontrar novos fenômenos na astrofísica relativística, por fornecer uma lacuna interessante para hospedar novos efeitos.

Conclusões

- Via o caso mais simples da métrica de Zipoy, relacionado com a solução de monopólo. Obtemos equações orbitais altamente não-lineares mostrando pontos a favor do uso de tal métrica para fins astrofísicos.

- A solução leva à órbitas elípticas, reproduz valor próximo para $\delta\phi$ de Mercúrio, possibilita o estudo voltado ao caso do cinturão de asteróides.

- Vimos que mesmo soluções assintóticas 'a solução de Schwarzschild como exemplo a métrica de Weyl e a de Zipoy ao perderem a covariância generalizada apresentam novos campos gravitacionais. Assim, podemos estudar casos astrofísicos respeitando a física do problema, visto que ao linearizar a RG estamos desprezando eventos que ocorrem no campo não-linear.

Roteiro

Roteiro

Referências

[1] PAIS, Abraham. Relativity, the special theory. In: **Subtle is the Lord**. United States: Oxford University Press, New York, 2005. cap. 3, p.111-137.

[2] LO, Kin-Ho; YOUNG, Kenneth; LEE, Benjamin. Advance of perihelion. **Am. J. Phys.** 81, 695 (2013).

[3] FROLOV, Valeri P.; KUBIZNAK, David. Higher-Dimensional Black Holes: Hidden Symmetries and Separation of Variables. **Classical and Quantum Gravity**, vol.25, p.154005, jul. 2008. DisponÃvel em: <http://arxiv.org/pdf/0802.0322v2.pdf>.

[4] VALADA, Rafael. **Soluções Exatas da Métrica de Weyl para Aproximação de Segunda Ordem de um Disco Fino e Testes Clássicos da RG**. 2013. 88f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) - Programa de Pós-Graduação em Matemática aplicada, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2013.

[5] D'INVERNO, Ray. Tensor calculus. In: **Introducing Einstein's relativity**. United States: Oxford University Press, New York, 1999.

[6] HARTLE, James. The Geometry Outside a Spherical Star. In: **Gravity an Introduction to Einstein's General Relativity.** Pearson Education, San Francisco, 2003.

[7] CARROLL, Sean. The Schwarzschild Solution. In: **Spacetime and Geometry an Introduction to General Relativity**. San Francisco: Addison Wesley, 2004. cap. 5, p.192-237.

Referências

[8] MISNER, Charles; THORNE, Kip; WHEELER, John. Other theories of gravity and the post-newtonian approximation. In: **Gravitation**. San Francisco: Freeman and Company, 1973.

[9] CAPISTRANO, Abraão. On Nearly Newtonian Potentials and Their Implications to Astrophysics. **Galaxies** 2018, 6, 48.

[10] MAIA, M. D.; CAPISTRANO, A. J. S.; MULLER, D. Perturbations of dark matter gravity. **International Journal of Modern Physics D**, v.18, p. 1273-1289, 2009.

[11] CAPISTRANO, Abraão; ROQUE, Waldir; VALADA, Rafael. Weyl conformastatic perihelion advance. **MNRAS** 444, 1639-1646 (2014).

[12] BARROCAS, Guilherme. **Curvas de Rotação de Galáxias LSB em aproximação quase-newtoniana da Teoria da Relatividade Geral**. 2018. 77f. Dissertação (Mestrado em Física Aplicada) - Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada, Universidade Federal da Integração Latino-Americana, Foz do Iguaçu, 2018.

[13] CAPISTRANO, A; SEIDEL, P; NEVES, V. Exoplanets apsidal precession and analysis on their eccentricities.**Astrophys Space Sci**, 364, 47, 2019.

[14] ZIPOY, David. Topology of Some Spheroidal Metrics. **Journal of Mathematical Physics**. v.7, n.6, American Institute of Physics, june, 1966.

[15] CAPISTRANO, A; SEIDEL, P; CABRAL, L. Effective apsidal precession from a monopole solution in a Zipoy spacetime. **Eur. Phys. J. C**, 79, 730, 2019.