

A EQUAÇÃO DO EQUILÍBRIO ESTELAR EM TEORIAS MODIFICADAS DA GRAVITAÇÃO

Túlio Ottoni, Vinícius Barcellos, Matheus Bregonci e Júlio C. Fabris
Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Espírito Santo

Introdução

Neste trabalho foi feito uma introdução ao estudo do equilíbrio estelar na teoria newtoniana. Partindo de uma equação de estado politrópica chega-se em uma equação para estrutura estelar em equilíbrio hidrodinâmico, a chamada equação de *Lane-Emden*. Com uma análise mais profunda dessa equação incorporando efeitos quânticos é possível estudar a física das anãs brancas. Posteriormente é feita introdução às teorias de gravidade modificada e como a equação de *Lane-Emden* é impactada neste contexto. Essa equação possui algumas soluções analíticas, mas aqui é focado no caso mais simples que nos leva a uma estrutura com densidade constante.

Equilíbrio estelar

Pensamos em uma estrela como sendo um sistema auto-gravitante, *i.e.*, sua estrutura é mantida pela sua própria gravidade e não há forças externas atuando. Além disso, tratamos estrelas como um fluido.

Para um tratamento mais simples consideramos uma estrela esférica e estática, desconsiderando outros efeitos como o de rotação, pulsação, e oscilação (que alteram a geometria da estrela) e efeitos de campos magnéticos. As quantidades físicas importantes terão dependência somente na variável radial r . A massa da estrela contida em seu raio é dada por

$$M(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr', \quad (1)$$

onde $\rho(r)$ é a densidade da estrela e essa equação indica a *conservação da massa*. No centro da estrela temos que $M(r=0) = 0$ e em sua superfície $M(r=R) = M$, que é a massa total da estrela. Por conta disso, a equação da conservação da massa pode ser escrita de uma forma que será mais útil para soluções numéricas,

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r). \quad (2)$$

A equação anterior é uma forma de escrever a equação (1) e é nossa primeira equação fundamental da estrutura estelar.

A segunda equação fundamental da estrutura estelar é a equação de equilíbrio hidrostático dada por

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{G\rho(r)M(r)}{r^2}, \quad (3)$$

e o sinal negativo se deve ao fato de a pressão diminuir a medida que r aumenta. A interpretação física desta equação é: o gradiente de pressão é equilibrado pela densidade de força gravitacional.

No centro das estrelas a pressão terá um valor P_c e como a pressão diminui radialmente, o raio da estrela define onde a pressão será nula, logo, $P(r=R) = 0$.

No contexto da Relatividade Geral, a equação de equilíbrio hidrostático newtoniana dá lugar à equação TOV

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{G\rho(r)M(r)}{r^2} \left[\left(1 + \frac{P(r)}{\rho(r)c^2} \right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 P(r)}{M(r)c^2} \right) \left(1 - \frac{2GM(r)}{rc^2} \right)^{-1} \right] \quad (4)$$

que tomando o limite $c \rightarrow \infty$ recuperamos a equação newtoniana (3). O fato de a pressão aparecer nos termos à direita da equação significa que ela servirá como fonte de gravidade.

Equação de Lane-Emden

O caso estudado foi para uma equação de estado politrópica (que é um caso particular da equação de estado barotrópica $P = P(\rho)$) em que a pressão é proporcional a uma potência da densidade,

$$P = K\rho^{1+\frac{1}{n}}, \quad (5)$$

onde K é uma constante e $\gamma \equiv 1 + 1/n$ é chamado de índice adiabático, enquanto n é o índice politrópico.

Com as equações fundamentais da estrutura estelar (2) e (3) e a equação de estado politrópica (5) é possível obter uma única equação para estrutura estelar. Para isso define-se as seguintes quantidades,

$$\xi = \frac{r}{r_0} \quad (6)$$

$$\rho(r) = \rho_c \theta^n(r), \quad (7)$$

onde r_0 é uma constante que possui unidade de uma distância característica, de forma que ξ é adimensional, ρ_c é a densidade central da estrela e $\theta(r)$ é uma variável adimensional tal que, por construção, $\theta(r=0) = 1$. A equação obtida é a chamada equação de *Lane-Emden*,

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^n. \quad (8)$$

As condições de contorno dessa equação são: $\theta^n(0) = 1$ e $\theta'(0) = 0$. Usando então as condições de contorno adequadas, integramos a equação de Lane-Emden até o ponto em que $\theta = 0$, que equivale ao ponto em que a pressão se anula. Chamando ξ_1 o ponto em que isso ocorre, *i.e.*, $\theta(\xi_1) = 0$, temos então um valor para o raio da estrela

$$R = r_0 \xi_1 = \sqrt{\frac{(1+n)\rho_c^{\frac{1-n}{n}} K}{4\pi G}} \xi_1 \quad (9)$$

e relação Massa $\times$ Raio é obtida utilizando a equação da continuidade da massa e as quantidades definidas em (6) e (7), onde obtém-se

$$M \propto R^{3-n/(1-n)}. \quad (10)$$

Anãs brancas e a massa de Chandrasekhar

As anãs brancas são estrelas que pertencem à classe dos objetos compactos e possuem dimensões planetárias e massas da ordem da massa solar. A aproximação politrópica pode ser usada para essas estrelas. Por conta de seu tamanho e sua alta densidade a matéria em seu interior é fortemente comprimida. Porém, por conta de efeitos quânticos como o Princípio da Incerteza e o Princípio de Exclusão a pressão que sustenta a anã branca é devido ao gás degenerado de elétrons.

Um gás de elétrons degenerado não-relativístico possui uma equação de estado dada por

$$P = K_1 \rho^{5/3}, \quad (11)$$

onde K_1 é uma constante que depende de quantidades fundamentais tais como $\hbar, c, m_e$. Esse é o caso de um politropo de índice $n = 1.5$. De acordo com a relação Massa $\times$ Raio (10), temos

$$M \propto R^{-3}, \quad (12)$$

o que indica que quanto mais massiva a estrela menor o seu raio. Quando entramos no limite relativístico (estrelas de nêutrons mais compactas) a equação de estado tem o índice politrópico diferente e é escrita como

$$P = K_1 \rho^{4/3}, \quad (13)$$

que corresponde a um politropo de índice $n = 3$.

Olhando para a relação (10) percebe-se que este caso representa uma massa limite, *i.e.*, uma massa em que a estrela atinge um regime de instabilidade. Essa massa é conhecida como *Massa de Chandrasekhar* e é da ordem de

$$M_{CH} = 1.46 M_\odot. \quad (14)$$

Teorias modificadas de gravitação

A existência de um setor escuro no modelo cosmológico padrão, baseado na teoria da relatividade geral, que é composto de matéria e energia escura, motivou a busca de extensões da teoria relativista. Isto leva à suspeita que, a partir de certas escalas em astrofísica e cosmologia, a teoria da relatividade geral deixaria de ser válida e uma outra teoria deve substituí-la. Essas teorias utilizam mecanismos de *blindagem* para recuperar a Relatividade Geral localmente.

As mudanças feitas nas teorias de gravitação implicam em alterações nas equações de equilíbrio hidrostático. Somos assim levados a uma equação de equilíbrio modificada. As equações de equilíbrio hidrostático e conservação da massa se tornam

$$\frac{dP(\xi)}{d\xi} = -\frac{G\rho_c}{r_0} \frac{1}{\xi^2} \theta^n M(\xi) - \frac{\Upsilon G\rho_c}{4} \theta^n \frac{d^2 M(\xi)}{d\xi^2}, \quad (15)$$

$$\frac{dM(\xi)}{d\xi} = 4\pi \rho_c r_0^3 \xi^2 \theta^n(\xi). \quad (16)$$

Combinando as equações acima é possível obter

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left[\left(1 + \frac{\Upsilon n \xi^2 \theta^{n-1}}{4} \right) \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} + \frac{\Upsilon \xi^3 \theta^n}{2} \right] = -\theta^n, \quad (17)$$

que é a equação de Lane-Emden modificada. Notamos que no limite em que $\Upsilon = 0$ recuperamos a equação de Lane-Emden (8). Esses resultados aparecem nas teorias *beyond-Horndeski*.

Caso $n = 0$ na teoria newtoniana e em gravidade modificada

O caso $n = 0$ representa um fluido com densidade constante. Dessa forma, a equação da conservação da massa (1) é facilmente integrada de 0 a r , resultando em

$$M = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho_c. \quad (18)$$

A equação de equilíbrio hidrostático também é facilmente integrada e obtemos

$$P = P_c - \frac{2\pi}{3} G \rho_c^2 r^2, \quad (19)$$

Para o caso de um fluido incompressível o raio R da estrela é encontrado onde a pressão se anula, ou seja, $P(r=R) = 0$. Portanto, o raio R é dado por

$$R = \sqrt{\frac{3P_c}{2\pi G \rho_c^2}}. \quad (20)$$

De forma análoga ao caso newtoniano, faremos uma integração da equação de equilíbrio hidrostático no contexto de gravidade modificada que resulta em

$$P = P_c - \left(\frac{2}{3} + \Upsilon \right) \pi G \rho^2 r^2. \quad (21)$$

Portanto,

$$R = \sqrt{\frac{3P_c}{\pi G \rho^2 (2 + 3\Upsilon)}}. \quad (22)$$

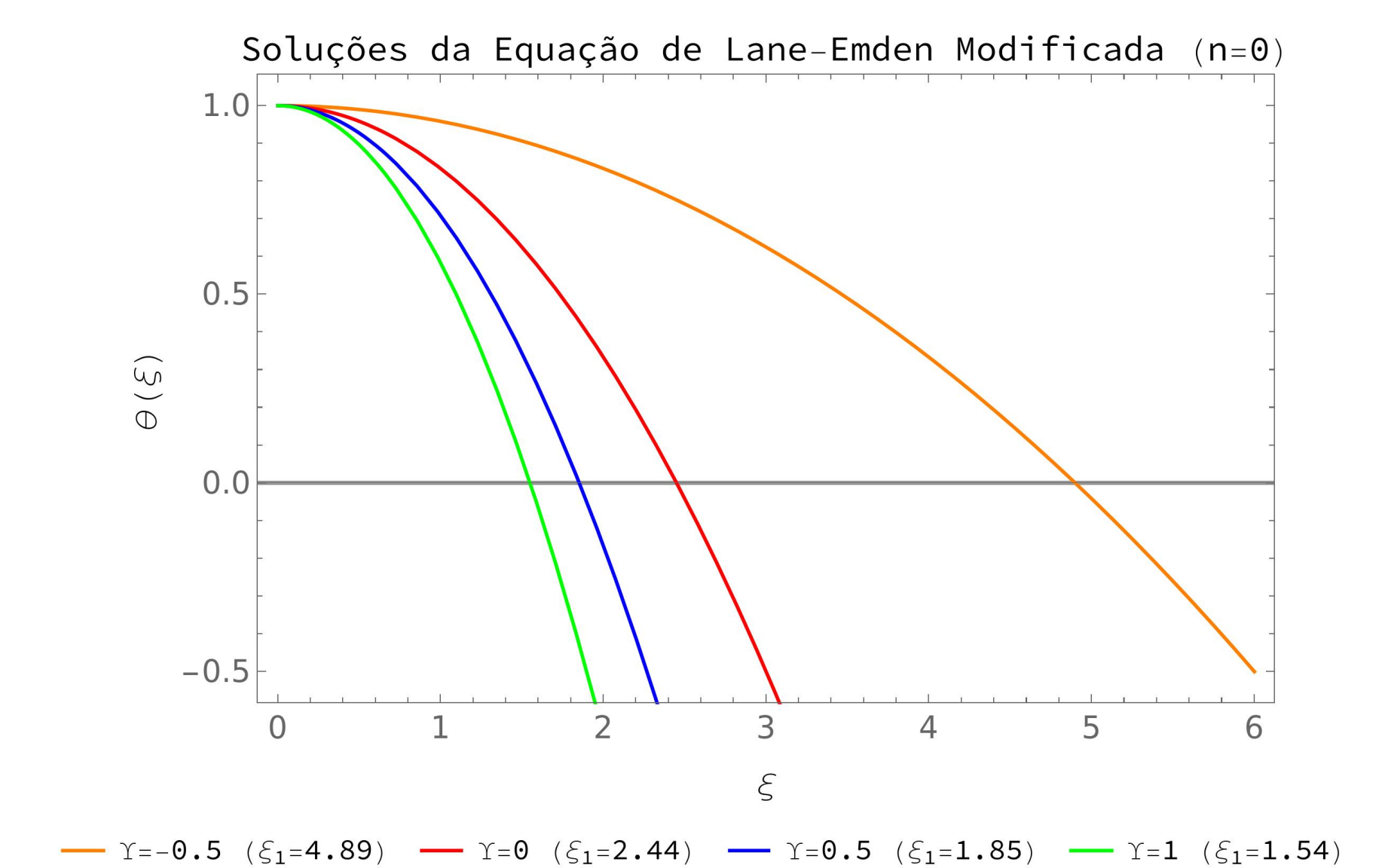


Fig. 1: Soluções para a Equação de Lane-Emden modificada. Em vermelho temos a gravidade puramente Newtoniana ($\Upsilon = 0$).

References

- [1] Chandrasekhar, S., **An Introduction to the Study of Stellar Structure**, Dover Publications, Inc., 1967.
- [2] Chandrasekhar, S., **The Maximum Mass of Ideal White Dwarfs**, Astrophysical Journal, v. 74, p. 81, 1931.
- [3] P. Banerjeem, D. Garain et al., **Constraining Modified Gravity from Tidal Phenomena in Binary Stars**, The Astrophysical Journal, v. 910, p. 23, 2021.