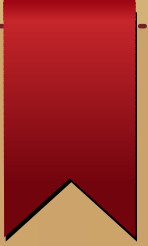


Inverno Astrofísico 2019



Introdução à Relatividade Geral

Thiago R. P. Caramês (UFES)

trpcarames@gmail.com

Castelo-ES, Brasil



Livros

A GENERAL RELATIVITY WORKBOOK

Thomas A. Moore

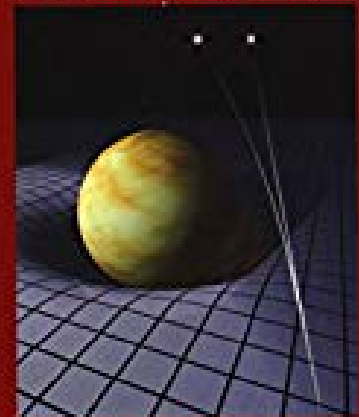
Thomas A. Moore

INTRODUCING EINSTEIN'S RELATIVITY

RAY D'INVERNO

Ray D'Inverno

An Introduction to General Relativity SPACETIME and GEOMETRY



Sean M. Carroll

Sean M. Carroll

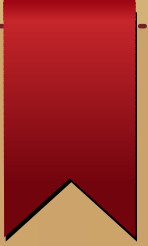
Algumas questões

- **Por quê a RG?**
- **Qual a linguagem da RG?**
- **Como testá-la?**
- **Quais seus desafios e perspectivas?**

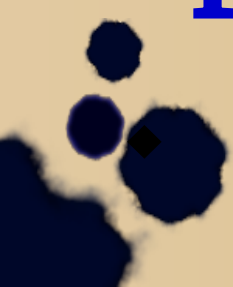
Conteúdo

- ♦ Relatividade Especial
- ♦ Gravidade newtoniana
- ♦ Princípio da Equivalência
- ♦ Gravidade como Geometria
- ♦ Forças de Maré
- ♦ A linguagem da RG
- ♦ Equações de Einstein
- ♦ Solução esfericamente simétrica
- ♦ Órbitas de partículas
- ♦ Testes clássicos da RG
- ♦ Desafios e perspectivas

1ª Aula



- ◆ **Relatividade Especial**
- ◆ **Gravidade newtoniana**
- ◆ **Princípio da Equivalência**



Relatividade Galileana



DIALOGO DI GALILEO GALILEI LINCEO MATEMATICO SOPRAORDINARIO DELLO STUDIO DI PISA. *E Filosofo, e Matematico primario del* SERENISSIMO GR.DVCA DI TOSCANA.

Doue ne i congressi di quattro giornate si discorre
sopra i due

MASSIMI SISTEMI DEL MONDO
TOLEMAICO, E COPERNICANO;

*Proponendo indeterminatamente le ragioni Filosofiche, e Naturali
tanto per l'una, quanto per l'altra parte.*

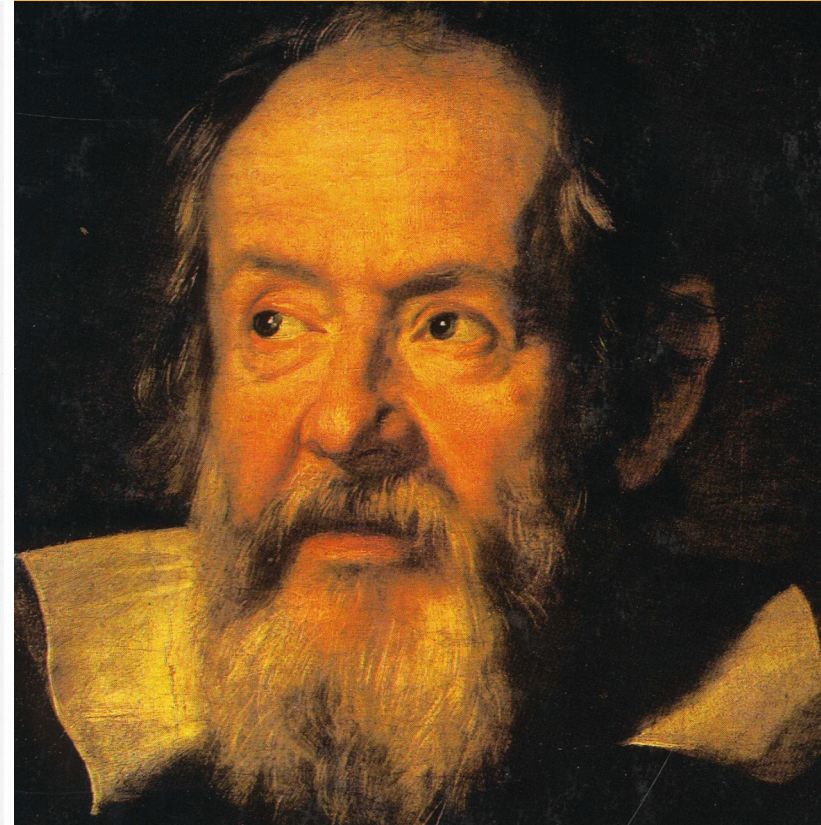


CON PRI

VILEGI.

IN FIRENZA, Per Gio:Batista Landini MDCXXXII.

CON LICENZA DE' SUPERIORI.

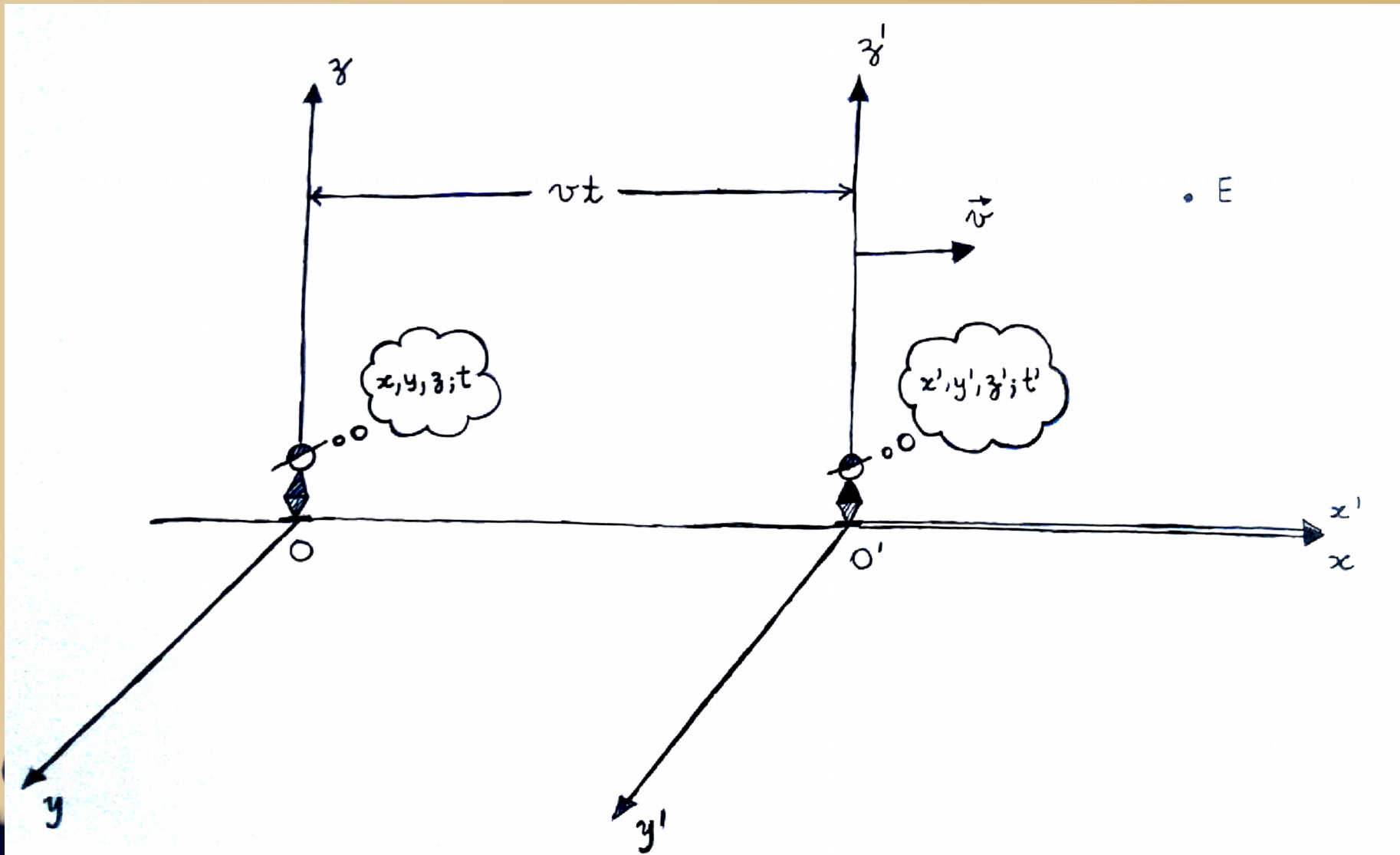


Galileu Galilei (1564 - 1642)

“Diálogo sobre os dois principais sistemas
do mundo” (1632)

Relatividade Galileana

Considere dois observadores inerciais:



Relatividade Galileana

Transformações de Galileu:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} u'_x = u_x - v \text{ (lei da adição de velocidades)} \\ a'_x = a_x \end{array}$$

Mecânica newtoniana

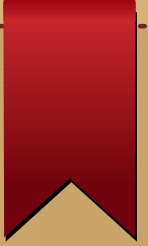
- Em O: $F = ma_x$
- Em O': $F'_x = m' a'_x = ma_x$

Princípio da Relatividade:

“As leis da Mecânica são as mesmas para todos os observadores inerciais”

O mesmo não se observa para o Eletromagnetismo!

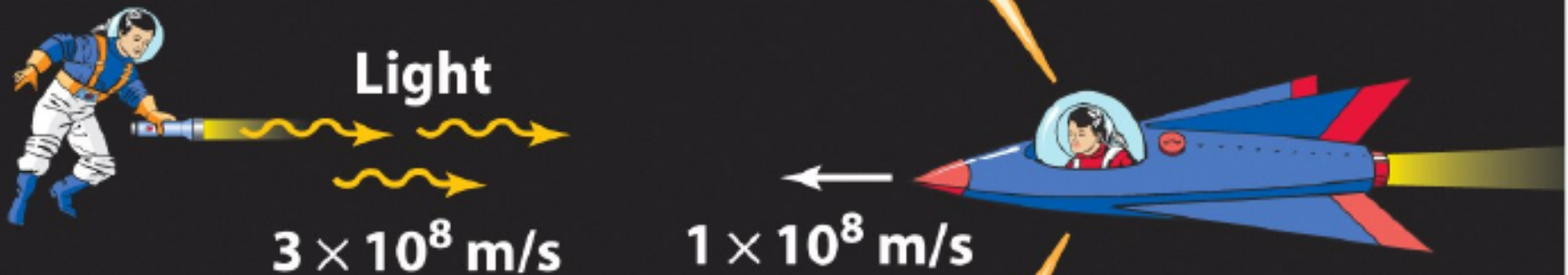
Relatividade Especial



Experimento de Michelson-Morley (1887): A velocidade da luz permanece a mesma em diferentes direções!

Incorrect Newtonian description:

As seen by the astronaut in spaceship, the light is approaching her at $(3 \times 10^8 \text{ m/s}) + (1 \times 10^8 \text{ m/s}) = 4 \times 10^8 \text{ m/s}$.



Correct Einsteinian description:

As seen by the astronaut in spaceship, the light is approaching her at $3 \times 10^8 \text{ m/s}$.

Relatividade Especial



Albert Einstein (1879 - 1954)

Relatividade Especial

Transformações de Lorentz:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(t - vx/c^2). \end{cases}$$
$$\gamma \equiv 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Adição de velocidades:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2}$$

$$u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - (v/c)^2}}{1 - u_x v/c^2}$$

$$u'_z = \frac{u_z \sqrt{1 - (v/c)^2}}{1 - u_x v/c^2}$$

1º Postulado: As leis da Física são as mesmas para todos os observadores inerciais

2º Postulado: A velocidade da luz no vácuo tem o mesmo valor c em todos os referenciais inerciais

Diagramas de espaço-tempo

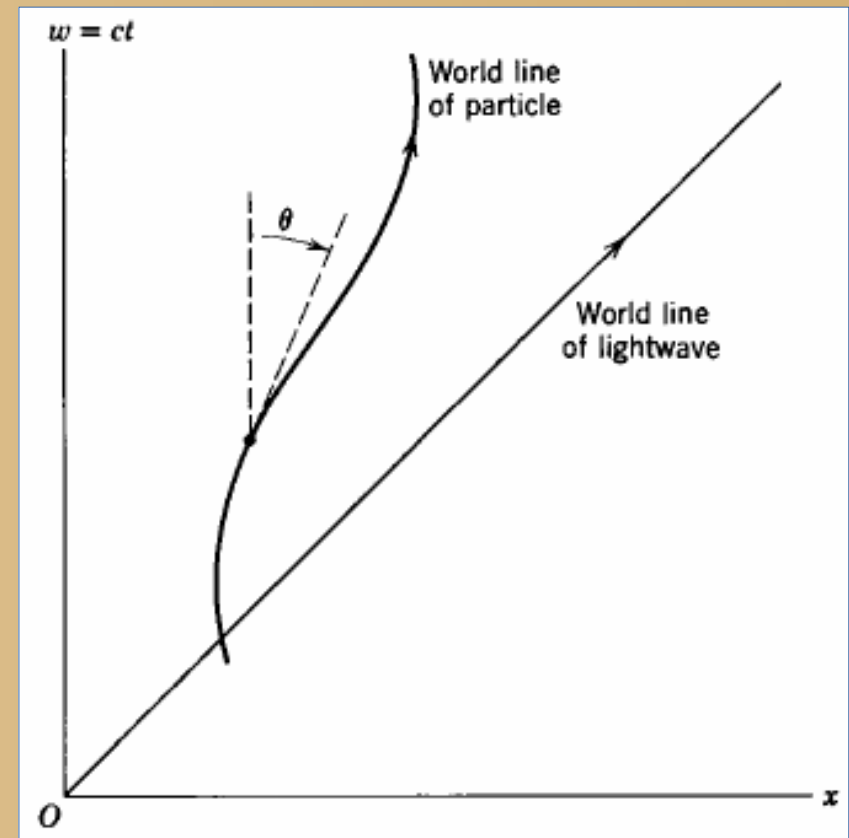
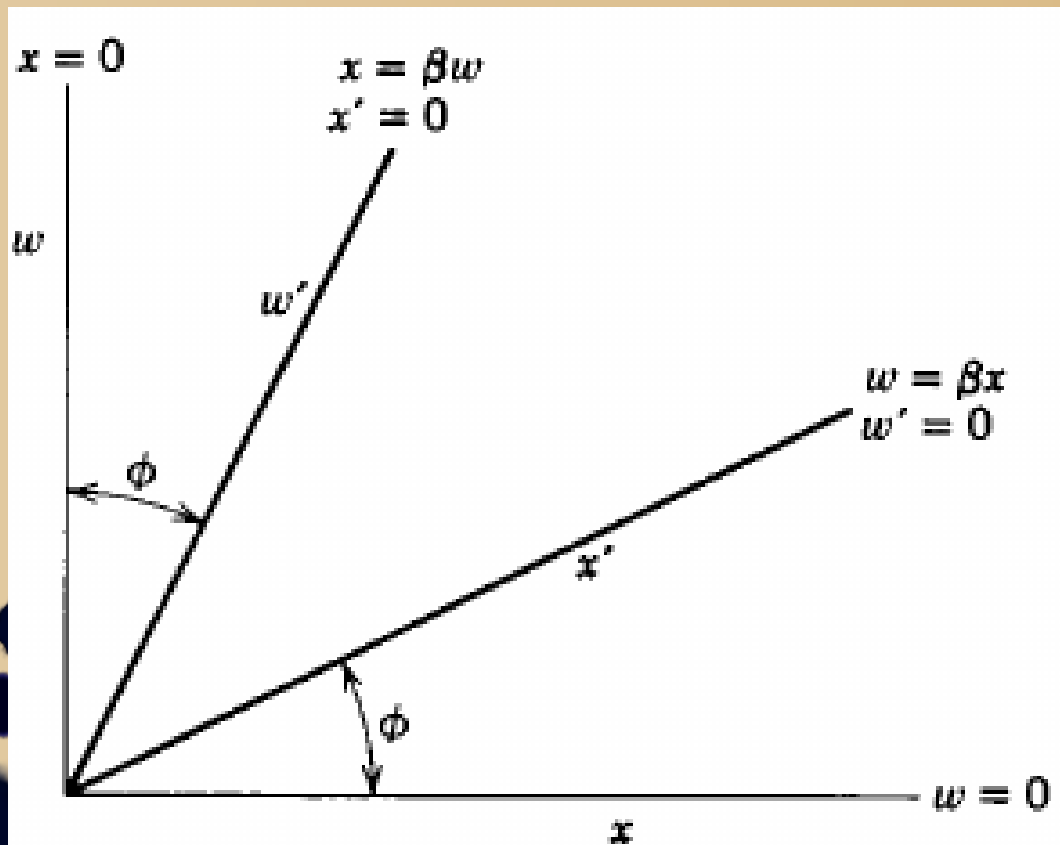
$$w = ct$$

$$x' = \frac{x - \beta w}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$x = \frac{x' + \beta w'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$w' = \frac{w - \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$w = \frac{w' + \beta x'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$



Intervalos e Diagramas de espaço-tempo

$$\Delta s^2 = -\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

spacelike if $\Delta s^2 > 0 \Rightarrow \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 > \Delta t^2$

lightlike if $\Delta s^2 = 0 \Rightarrow \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = \Delta t^2$

timelike if $\Delta s^2 < 0 \Rightarrow \Delta t^2 > \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$

Tempo próprio

$$\begin{aligned}\Delta\tau &= \int \sqrt{-ds^2} \\ &= \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{1 - v^2} dt\end{aligned}$$

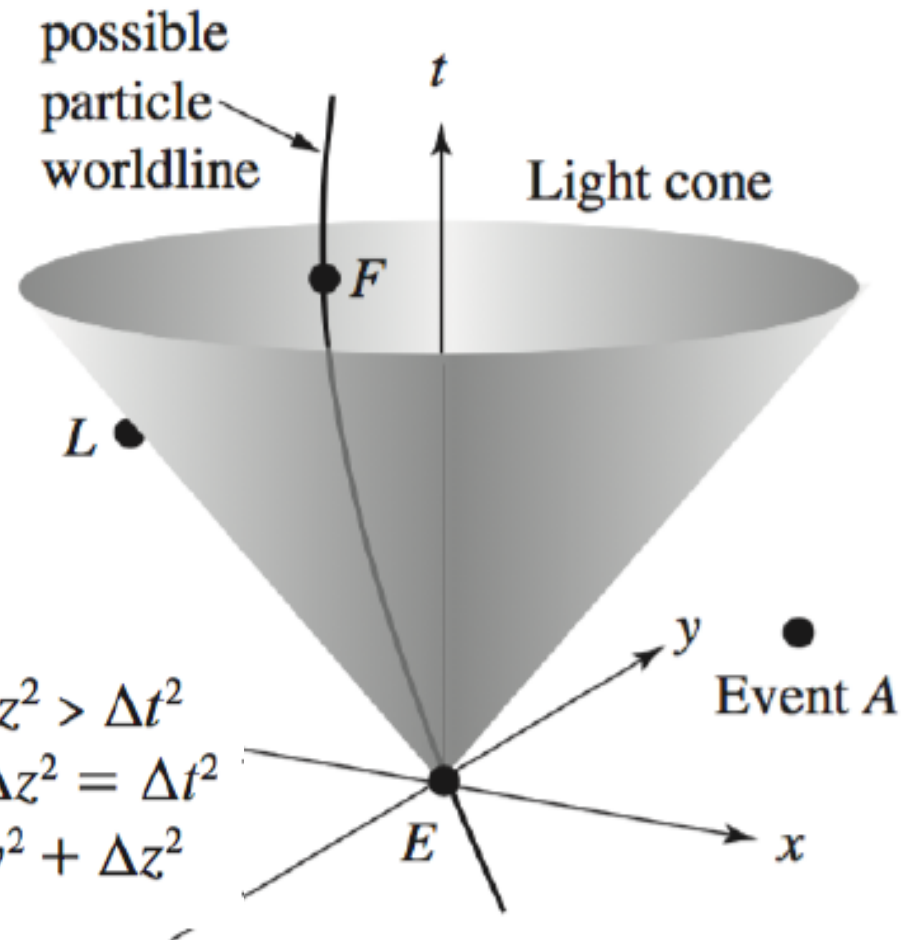


Figure 2.3: A spacetime diagram that shows the light cone for event E . Note that event A lies outside event E 's light cone, so it is causally unrelated to E , but events L and F could be caused by E . Particle worldlines that pass through event E must lie inside its light cone.

4-velocidade

$$d\mathbf{s} \equiv \begin{bmatrix} dt \\ dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{u} \equiv \frac{d\mathbf{s}}{d\tau} \equiv \begin{bmatrix} dt/d\tau \\ dx/d\tau \\ dy/d\tau \\ dz/d\tau \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} u^t \\ u^x \\ u^y \\ u^z \end{bmatrix}$$

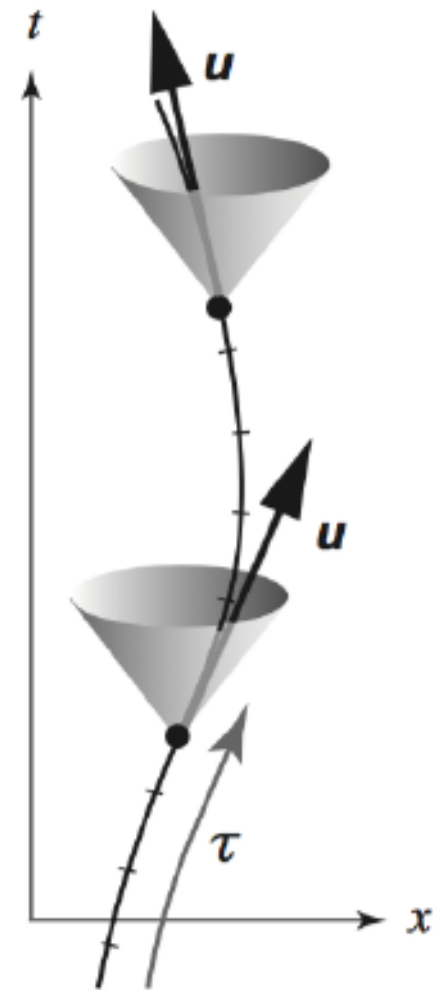
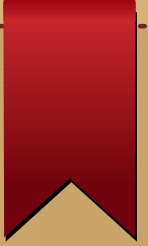


Figure 3.1: A spacetime diagram displaying an object's worldline. We can label events along the worldline according to the proper time τ measured by the object from some suitable starting event. An object's four-velocity $\mathbf{u}$ is tangent to the worldline at each event and inside the event's light cone.

Relatividade Especial



Algumas consequências:

✓ **Contração do comprimento:**

$$\Delta L = \sqrt{1 - (v/c)^2} \Delta L_0$$

✓ **Dilatação do tempo:**

$$\Delta t = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

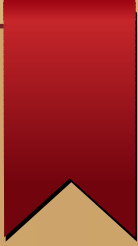
✓ **Simultaneidade:**

Se em O': $\Delta t' = 0$ Então em O:

$$\Delta t = \frac{v \Delta x}{c^2}$$



Relatividade Especial



- Para $v \ll c$: transf. de Lorentz $\rightarrow$ transf. de Galileu;
- As Eqs. de Maxwell preservam sua forma mediante as transformações de Lorentz;
- Mecânica newtoniana $\rightarrow$ Mecânica relativística;
- Espaço-tempo de Minkowski;
- Preserva: $\Delta s^2 = -\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$;
- O conceito de **simultaneidade** agora depende de observador.

Gravitação de Newton Vs. Relatividade Especial

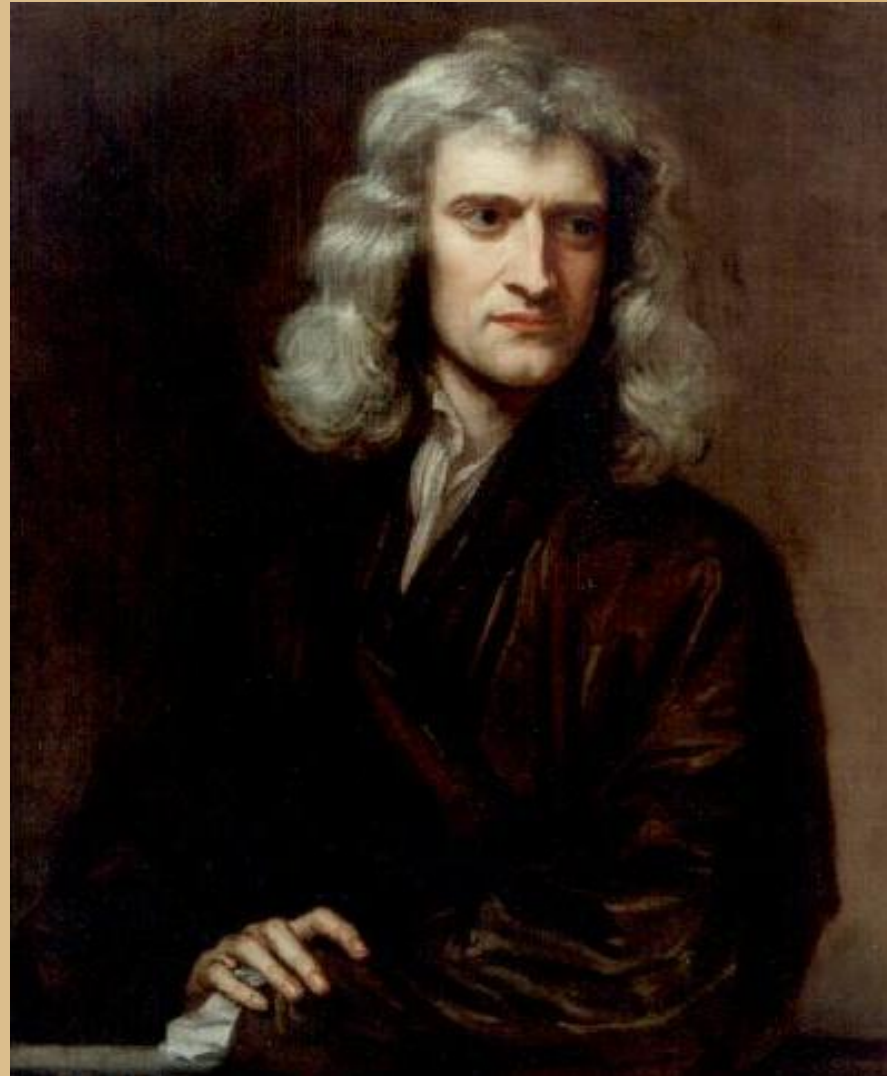
PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore *J* S. NEWTON, *Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos*
Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, *Reg. Soc. PRÆSES.*
Julii 5. 1686.

LONDINI,

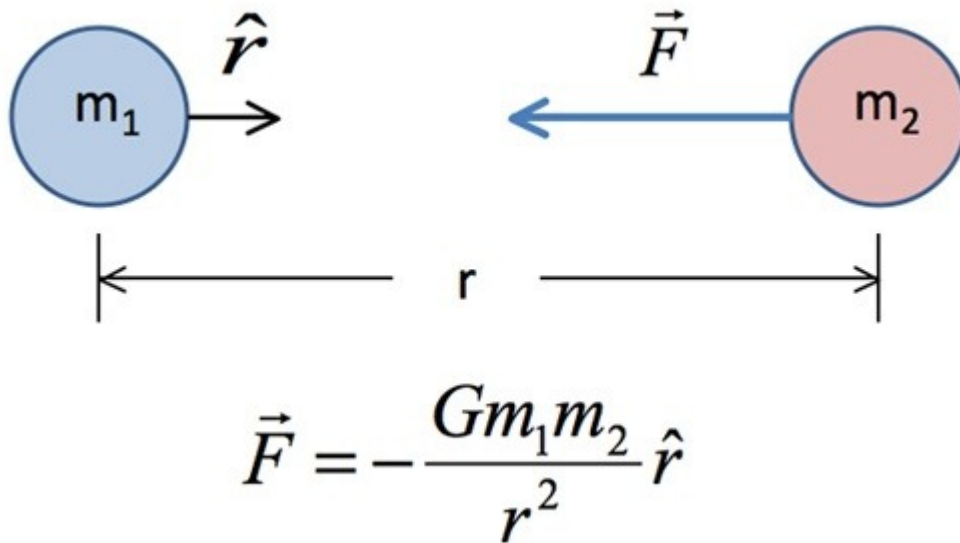
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud
plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.



Isaac Newton (1642 - 1726)

Gravitação de Newton Vs. Relatividade Especial

Lei da gravitação universal de Newton:



“A força entre duas partículas quaisquer, de massas m1 e m2, separadas pela distância r, é atrativa e age ao longo da linha que une às partículas”

- Os corpos “caem” por sofrerem ação de uma **força**;
- Bem sucedida na descrição de um amplo leque de fenômenos;
- **Ação instantânea à distância**;

Por quê RG?

- **Relatividade Especial:** Simultaneidade não é um conceito absoluto;
- **Gravidade Newtoniana:** ação instantânea a distância;
- **A teoria newtoniana é incompatível com a Relatividade Especial!**

Princípio da Equivalência

- Massa inercial: nos diz o quanto um corpo resiste à aceleração

$$F = m_I a$$

- Massa gravitacional: nos diz o quão forte um corpo se acopla a um campo gravitacional

$$F_g = \frac{GMm_g}{r^2}$$

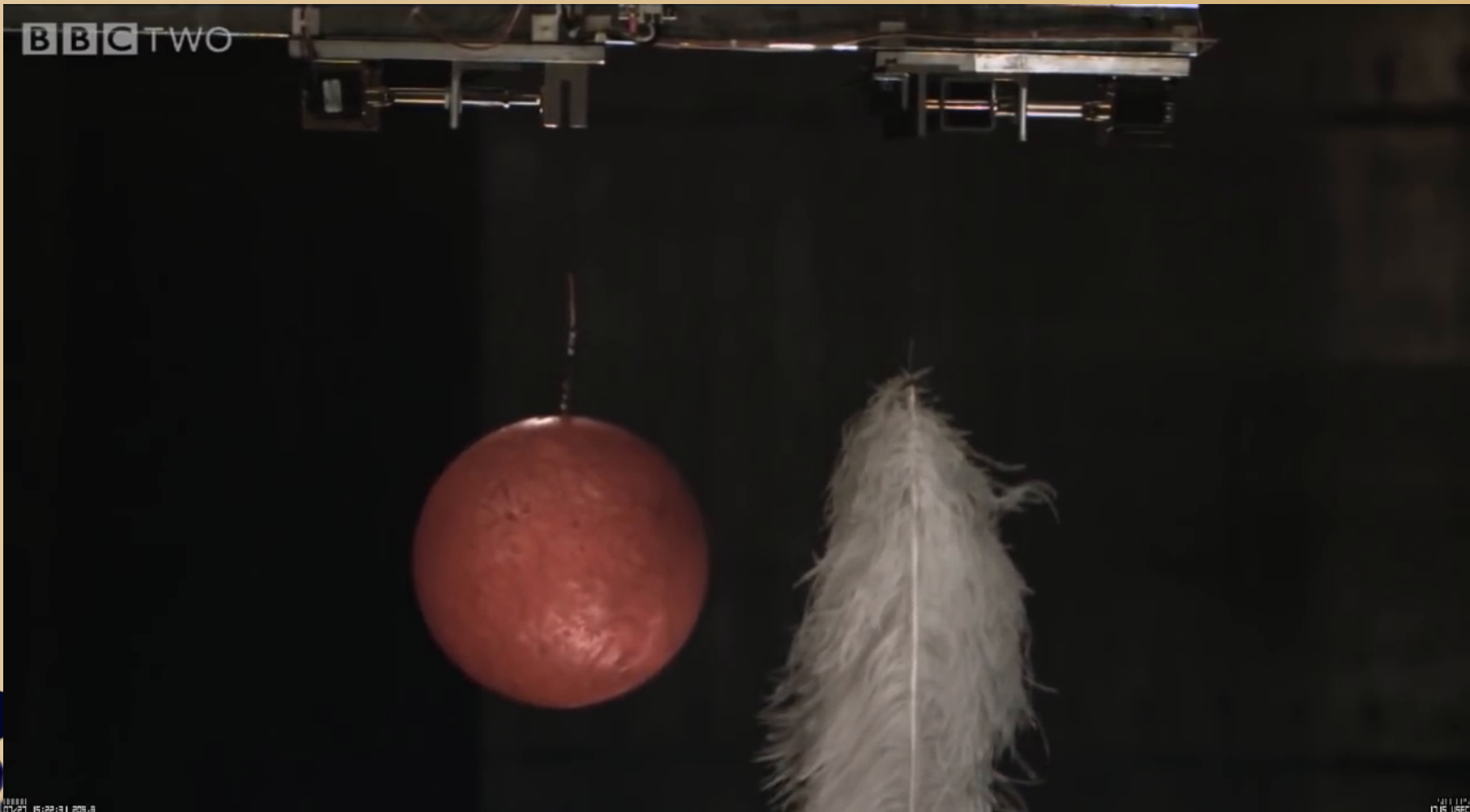
Princípio da Equivalência

$$\vec{a} = \frac{m_g}{m_i} \vec{g}$$

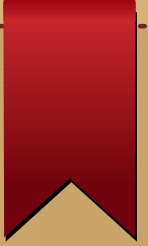
Se $m_i \propto m_g$

...então a aceleração gravitacional é **localmente** a mesma para todos os corpos (confirmado por experimentos)!

Princípio da Equivalência



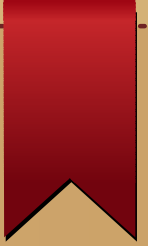
2ª Aula



- ♦ **Princípio da Equivalência**
- ♦ **Forças de Maré**
- ♦ **A linguagem da RG**



Princípio da Equivalência



Queda livre e o “pensamento mais feliz de Einstein”:

I was sitting in a chair in the patent office in Bern when all of a sudden a thought occurred to me: “if a person falls freely he will not feel his own weight.” I was startled. This simple thought made a deep impression on me. It impelled me toward a theory of gravity.

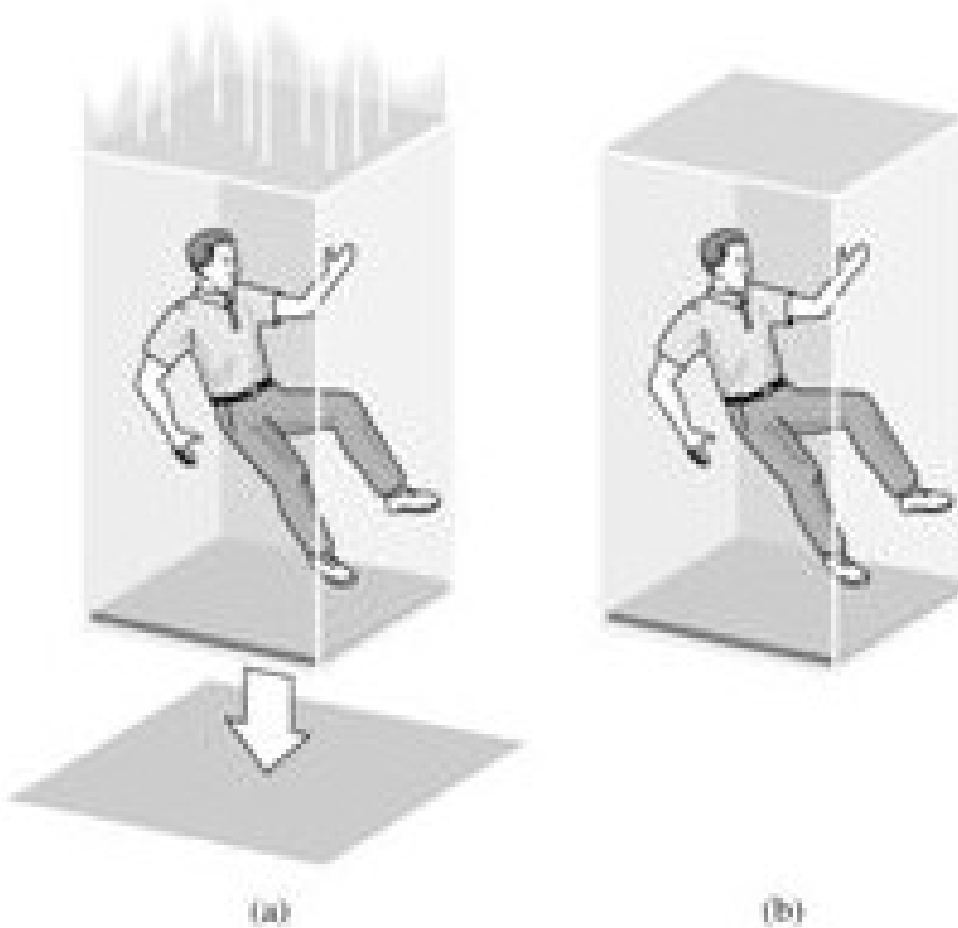
A. Einstein

Princípio da Equivalência

Einstein postulou que:

“Referenciais em queda livre, sem rotação, são fisicamente equivalentes”

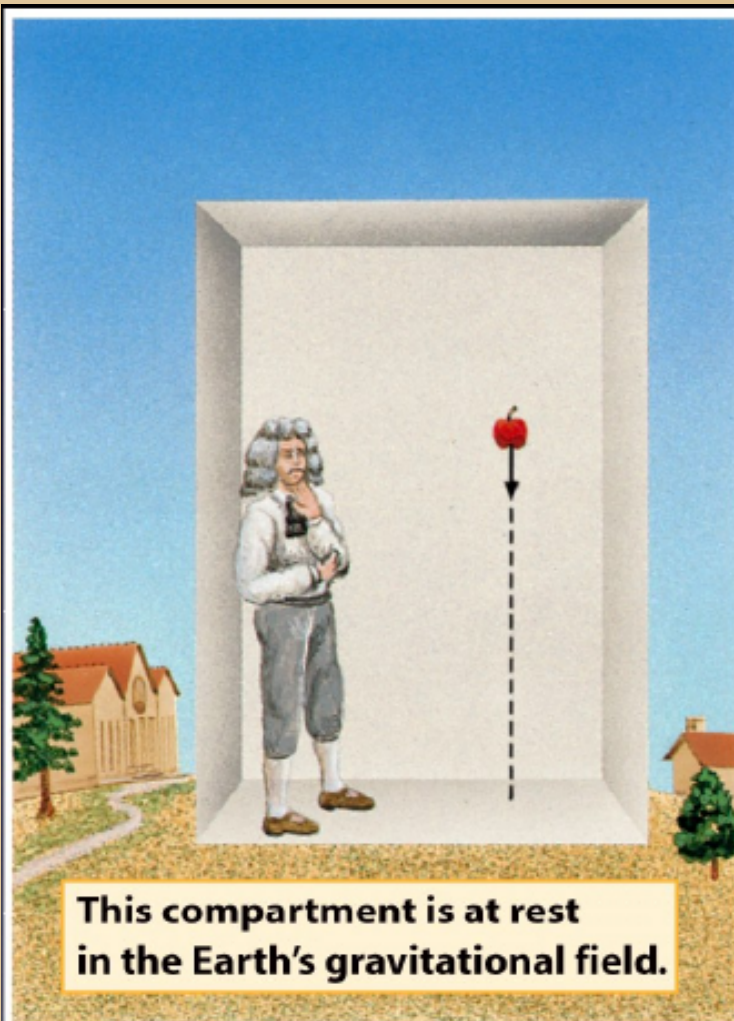
(Princípio da Equivalência de Einstein)



Princípio da Equivalência



Princípio da Equivalência



(a) The apple hits the floor of the compartment because the Earth's gravity accelerates the apple downward.



(b) The apple hits the floor of the compartment because the compartment accelerates upward.

Princípio da Equivalência



Campo
Gravitacional



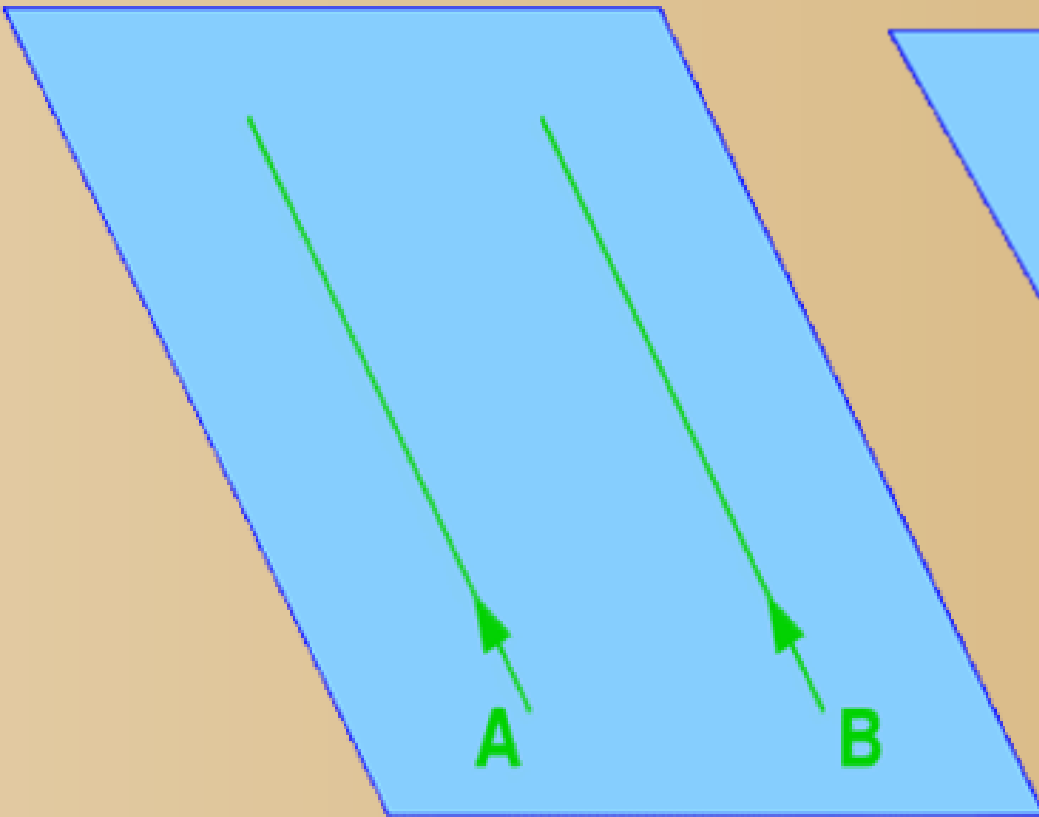
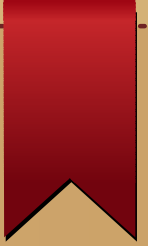
Aceleração do
sistema de
referência

Princípio da
Relatividade

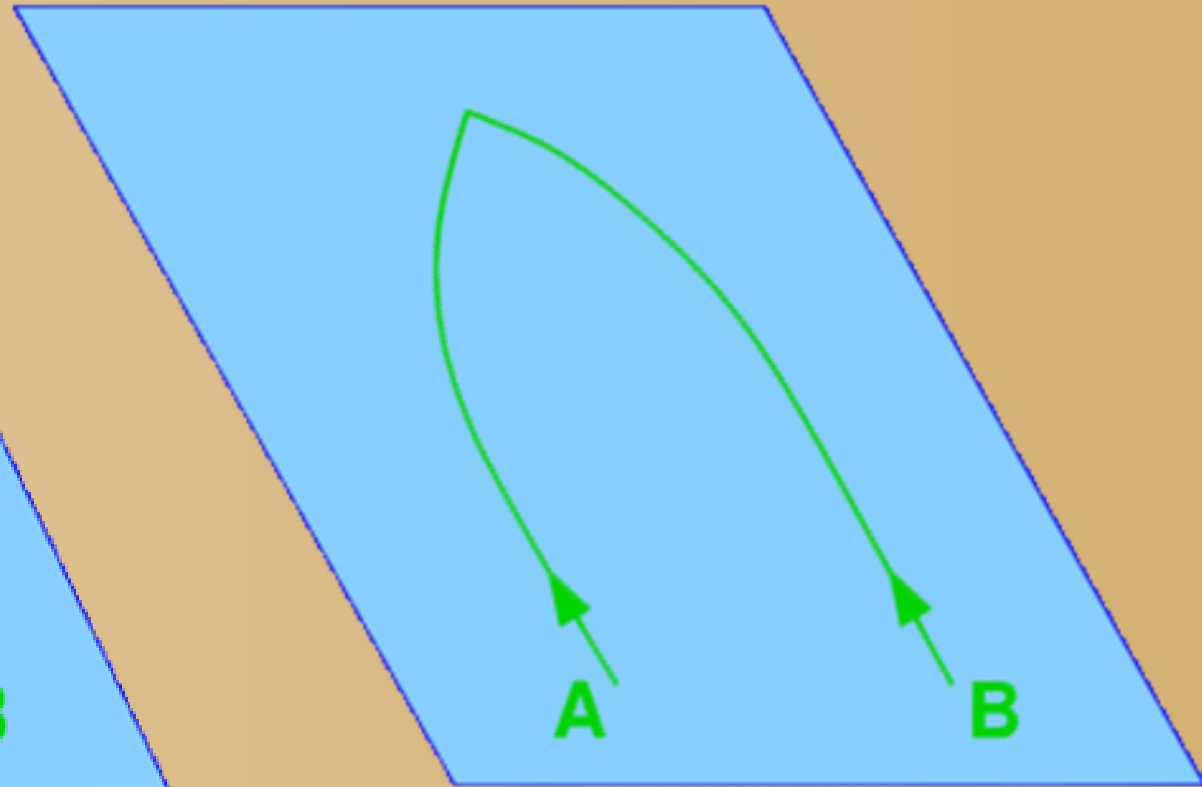


Estendido para
observadores
acelerados

Gravidade: Força Vs. Geometria

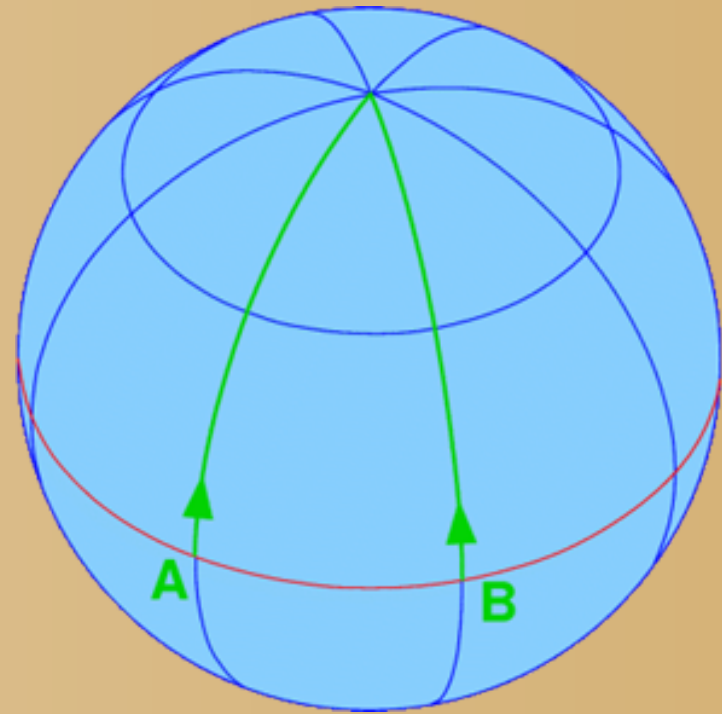
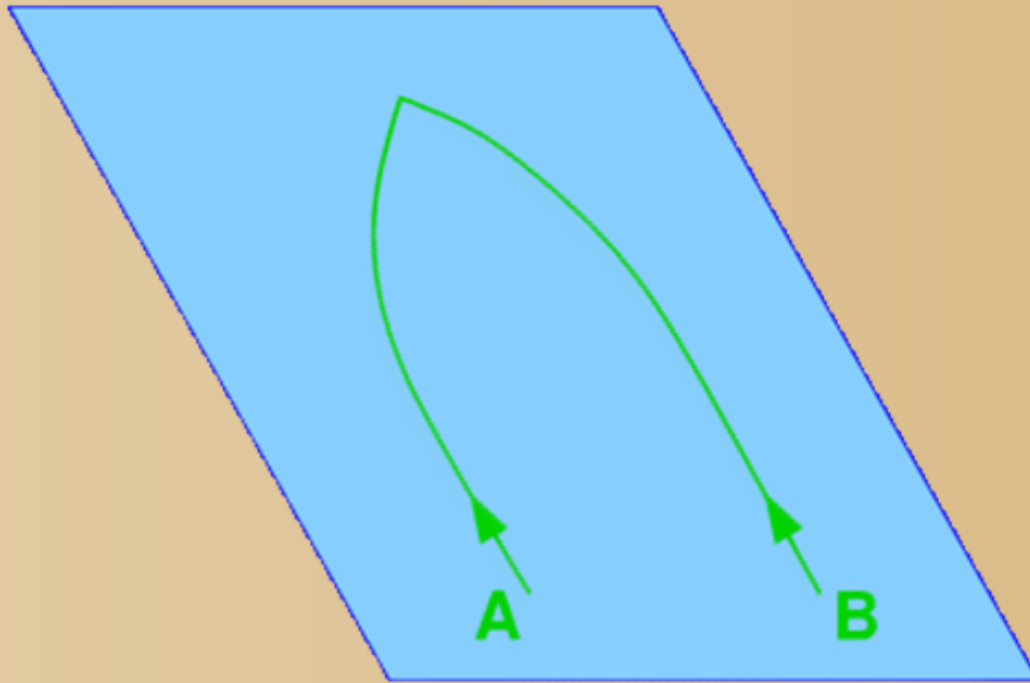


ESQUERDA: A e B possuem $\alpha=0$, seguem linhas retas.



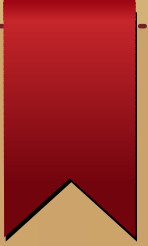
DIREITA: A e B estão sujeitas a uma força e se desviam de trajetórias retilíneas.

Gravidade: Força Vs. Geometria



- As partículas também se desviam da trajetória retilínea se a geometria for curva;
- Elas seguem uma **geodésica** (o caminho “mais reto” possível nesse espaço;

Newton Vs. Einstein

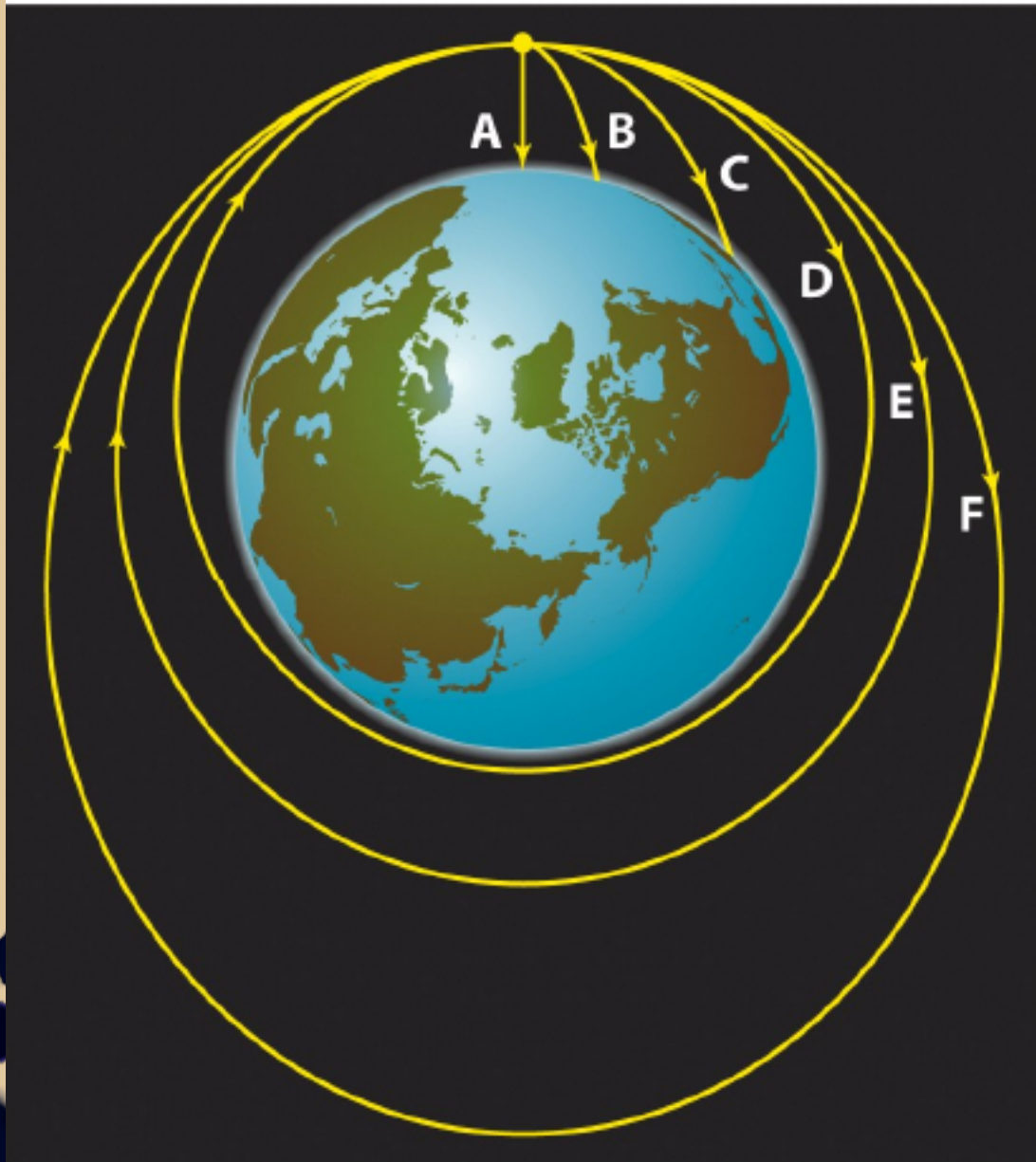


	Newton	Einstein
$m_i = m_g$	Coincidência	Consequência de um princípio fundamental
Gravidade	Força	Geometria

Hipótese geodésica: um referencial em queda livre segue um caminho geodésico num espaço-tempo curvo!



Órbitas segundo a RG

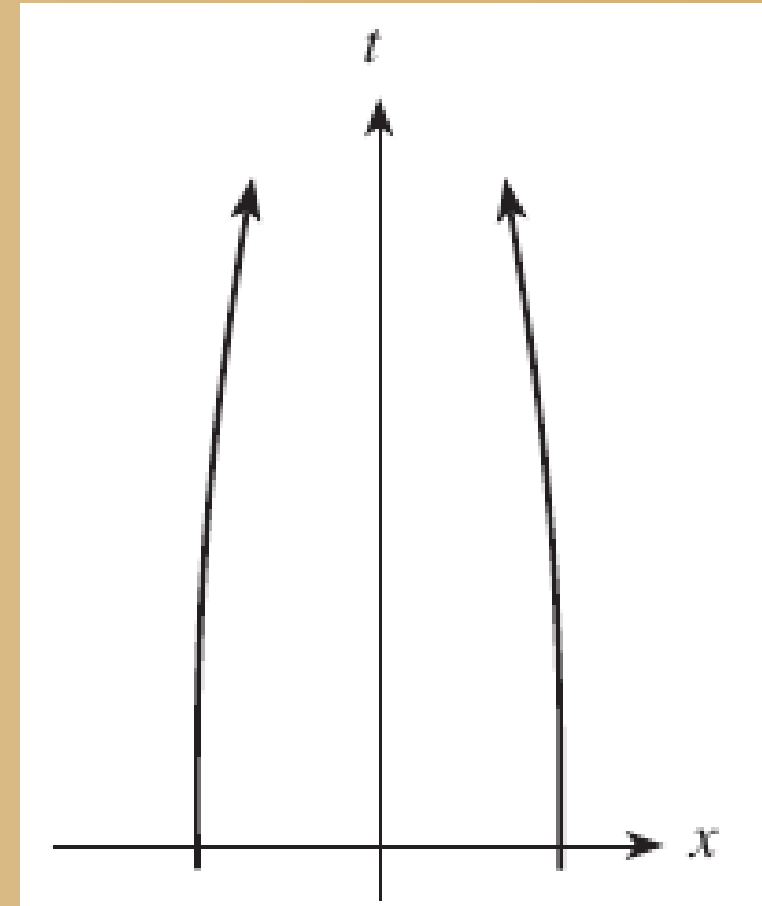
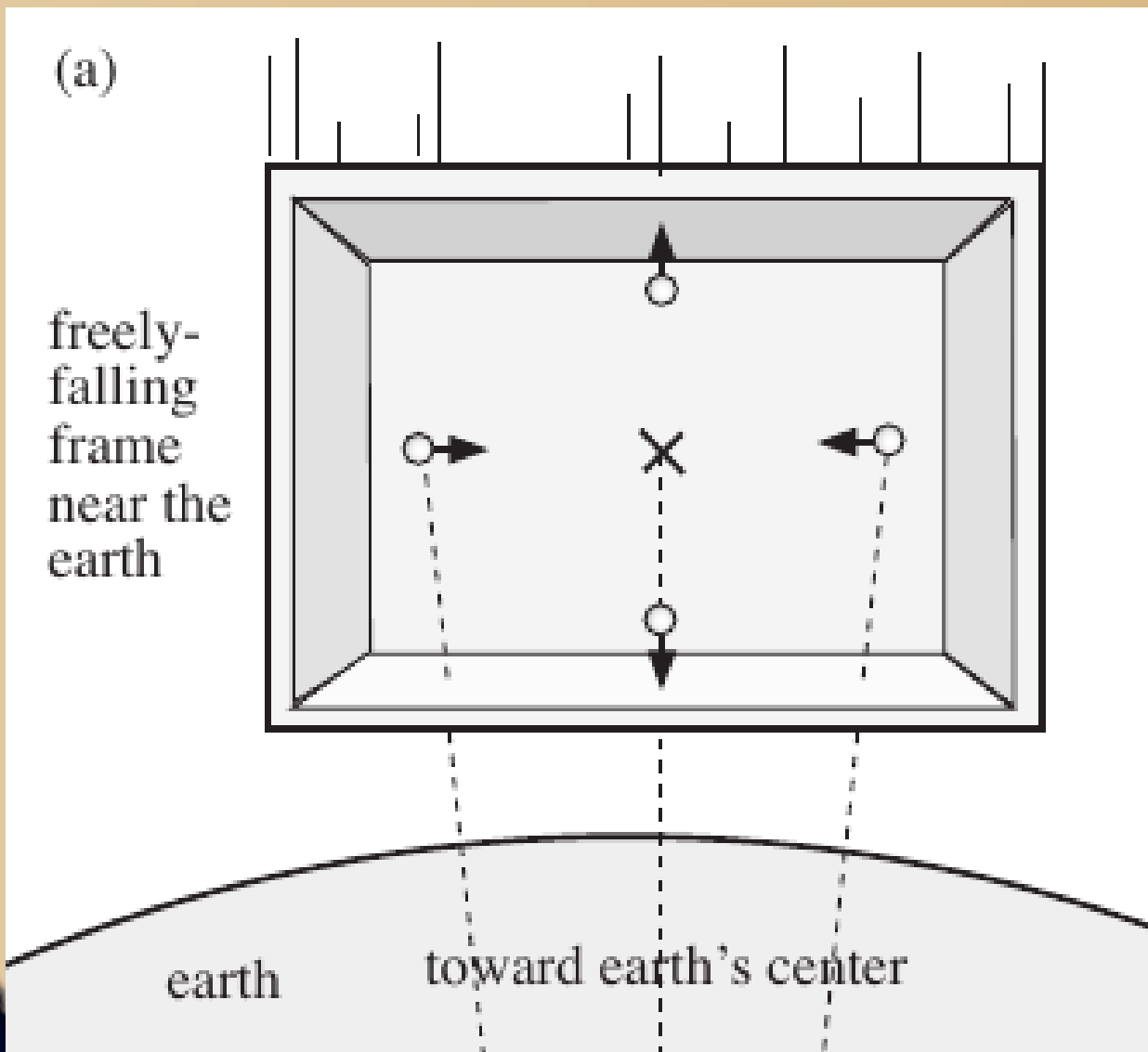


- ♦ Localmente não há força: todas as órbitas representam “queda livre”
- ♦ Nenhuma aceleração é sentida por observadores nas diferentes trajetórias
- ♦ Cada observador nas diferentes órbitas carregam referencial localmente inercial
- ♦ Caminho mais “retilíneo possível numa geometria curva”

Mas...

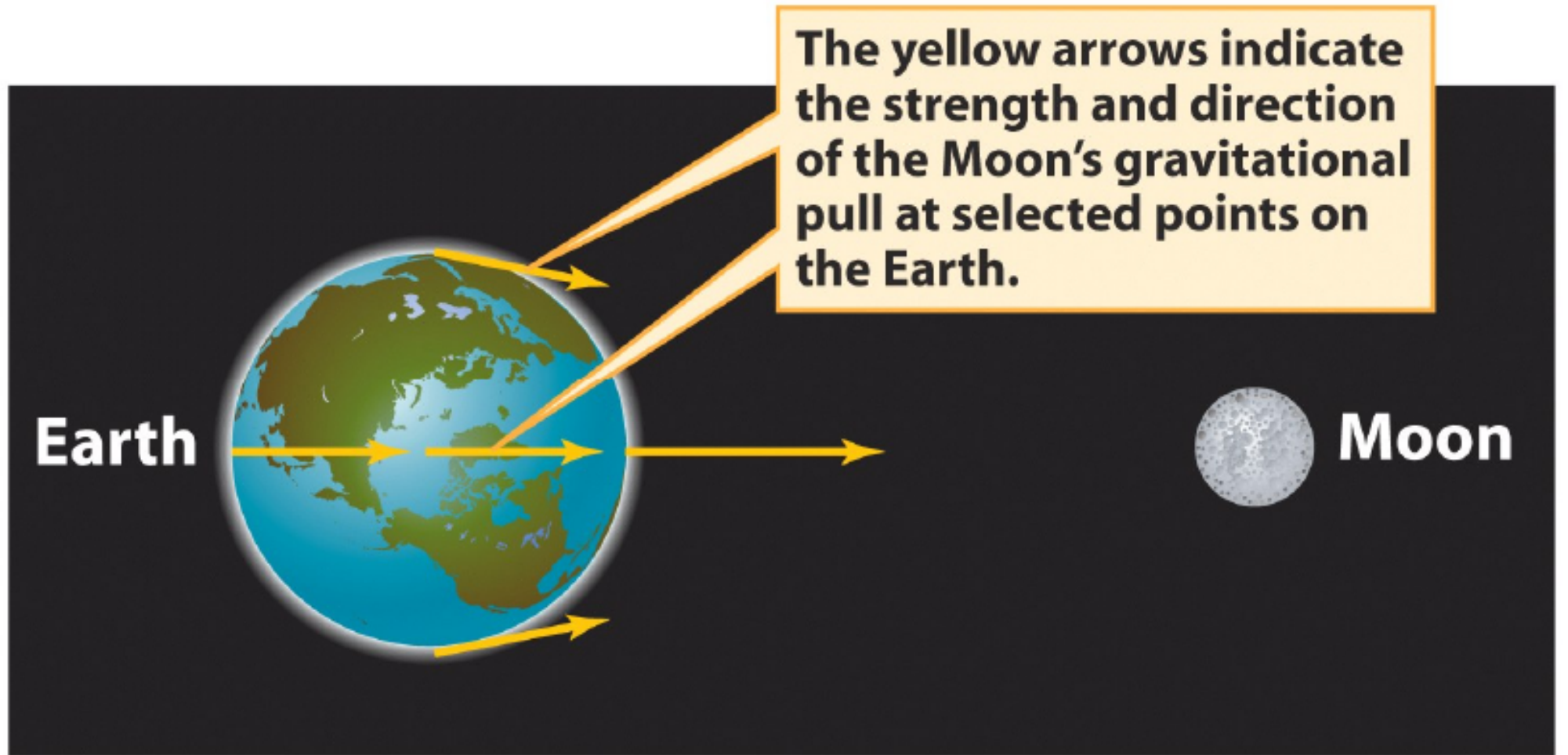
- Seriam os efeitos gravitacionais totalmente eliminados pela queda livre?
- Seria possível um observador em queda livre realizar um experimento capaz de detectar o campo gravitacional?

Forças de maré = Curvatura (RG)

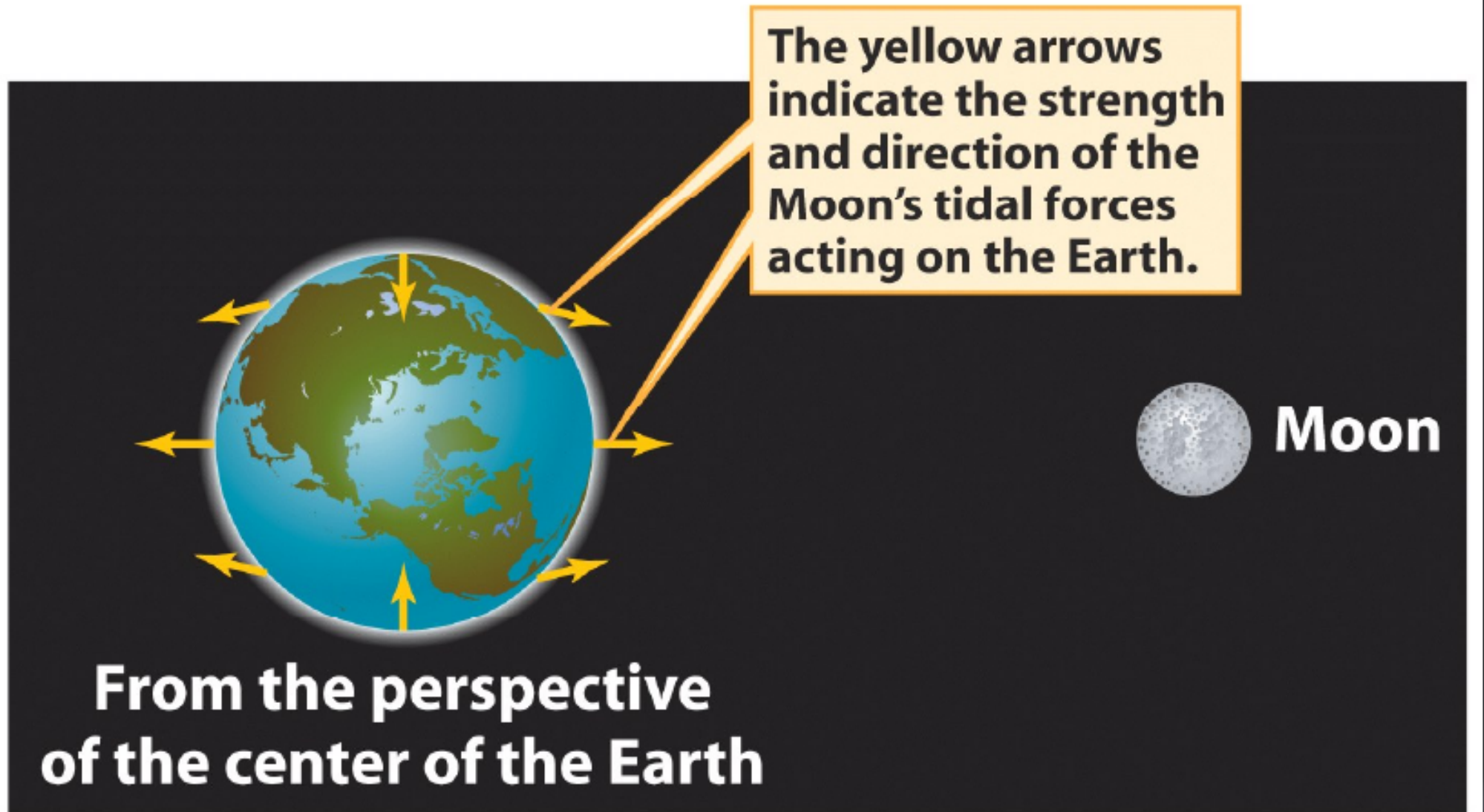


As trajetórias são inicialmente paralelas, depois de curvam!

Efeitos de maré

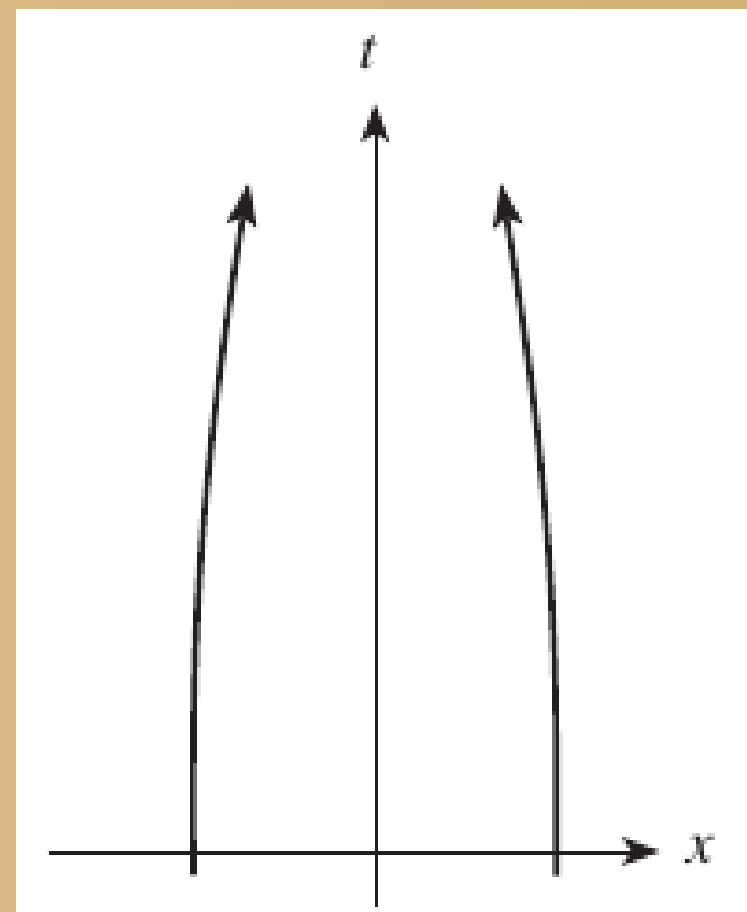


Efeitos de maré

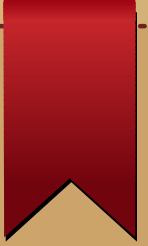


Efeitos de maré

- Efeitos de maré = o efeito “inevitável” da gravidade
- Equivalentes à curvatura na linguagem da RG



RG: uma teoria geométrica da gravidade



O espaço-tempo ao
redor de um campo
gravitacional é curvo!

Precisamos traduzir
isso para uma
linguagem matemática!

RG: uma teoria geométrica da gravidade

Precisaremos de:

Geometria



Conteúdo de
Matéria/Energia

...e também

Como descrever o movimento
em queda livre numa certa geometria?

Alguns conceitos úteis

Transformação geral de coordenadas

$$x^{\mu'} = x^{\mu'}(x^{\nu})$$

$$x^{\nu} = x^{\nu}(x^{\mu'})$$

Diferenciais de coords. $\rightarrow$ vetor contravariante

$$dx^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu}$$

$$A^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}} A^{\nu}$$

$$A^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\nu'}} A^{\nu'}$$

Gradiente $\rightarrow$ vetores covariantes

$$\partial_{\nu'} \Phi \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial x^{\nu'}} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial \Phi}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\nu'}} \partial_{\mu} \Phi$$

$$B_{\nu'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\nu'}} B_{\mu}$$

Alguns conceitos úteis

Elemento de linha:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}' dx^{\mu'} dx^{\nu'} = g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}$$

$$g_{\mu\nu}' = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\nu'}} g_{\alpha\beta}$$

$$g^{\mu\nu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\beta}} g^{\alpha\beta}$$

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$$

**Baixando (levantando)
um índice:**

$$A_{\mu} \equiv g_{\mu\nu} A^{\nu}$$

Alguns conceitos úteis

Produto escalar de um vetor e um covetor:

$$A^{\mu'} B_{\mu'} = \left[\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\alpha}} A^{\alpha} \right] \left[\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\mu'}} B_{\beta} \right]$$

$$= \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\alpha}} A^{\alpha} B_{\beta}$$

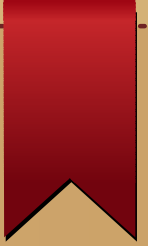
$$= \delta^{\beta}_{\alpha} A^{\alpha} B_{\beta} = A^{\alpha} B_{\alpha}$$

Exemplos de tensores

Rank	# Components	Other Name	Symbol	Transformation Law	Example quantities
0	$4^0 = 1$	(invariant scalar)	Φ	$\Phi' = \Phi$	Rest energy m
1	$4^1 = 4$	vector covector	A^μ A_μ	$A^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} A^\nu$ $A_{\mu'} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}} A_\nu$	four-velocity u^μ four-momentum p^μ gradient $\partial_\mu \Phi$ of a scalar
2	$4^2 = 16$	tensor	$T^{\mu\nu}$ $T^\mu{}_\nu$ $T_{\mu\nu}$	$T^{\mu\nu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta}$ $T^{\mu'}{}_\nu = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\nu'}} T^\alpha{}_\beta$ $T_{\mu\nu'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\nu'}} T_{\alpha\beta}$	Inverse metric $g^{\mu\nu}$ EM field tensor $F^{\mu\nu}$ Stress-energy tensor $T^{\mu\nu}$ Kronecker delta $\delta^\mu{}_\nu$ Metric tensor $g_{\mu\nu}$ Ricci tensor $R_{\mu\nu}$ Einstein tensor $G_{\mu\nu}$
3	$4^3 = 64$	tensor	$M^{\mu\nu}{}_\alpha$	$M^{\mu\nu}{}_{\alpha'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\alpha'}} M^{\beta\gamma}{}_\sigma$	(no obvious examples)
4	$4^4 = 256$	tensor	$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}$	$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}' = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\delta}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\nu'}} R^\gamma{}_{\delta\sigma\lambda}$	Riemann Tensor $R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}$

Table 6.1: Examples of tensors and their transformation rules. (The number of components is for 4D spacetime).

Derivada covariante



O gradiente de um vetor não **necessariamente** é um tensor:

$$\begin{aligned}\partial_{\nu'} A^{\mu'} &\equiv \frac{\partial A^{\mu'}}{\partial x^{\nu'}} = \frac{\partial}{\partial x^{\nu'}} \left(\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\alpha}} A^{\alpha} \right) = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} \left(\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\alpha}} A^{\alpha} \right) \\ &= \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial^2 x^{\mu'}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\alpha}} A^{\alpha} + \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\alpha}} (\partial_{\beta} A^{\alpha})\end{aligned}$$

A menos que a transformação seja linear (Lorentz).

Temos que definir uma derivada covariante (tensorial)!

Derivada covariante

Considere uma variação diferencial no vetor de base:

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^\mu} \equiv \Gamma_{\mu\alpha}^\nu \mathbf{e}_\nu$$

$$d\mathbf{A} = d(A^\mu \mathbf{e}_\mu) = \left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\sigma} dx^\sigma \right) \mathbf{e}_\mu + A^\mu \frac{\partial \mathbf{e}_\mu}{\partial x^\alpha} dx^\alpha$$

$$d\mathbf{A} = \left[\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\alpha\nu}^\mu A^\nu \right] \mathbf{e}_\mu dx^\alpha \equiv (\nabla_\alpha A^\mu) \mathbf{e}_\mu dx^\alpha$$

Derivada covariante

Considere uma variação diferencial no vetor de base:

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^\mu} \equiv \Gamma_{\mu\alpha}^\nu \mathbf{e}_\nu$$

Coeficientes de uma combinação linear

$$d\mathbf{A} = d(A^\mu \mathbf{e}_\mu) = \left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\sigma} dx^\sigma \right) \mathbf{e}_\mu + A^\mu \frac{\partial \mathbf{e}_\mu}{\partial x^\alpha} dx^\alpha$$

$$d\mathbf{A} = \left[\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\alpha\nu}^\mu A^\nu \right] \mathbf{e}_\mu dx^\alpha \equiv (\nabla_\alpha A^\mu) \mathbf{e}_\mu dx^\alpha$$

Derivada covariante

Considere uma variação diferencial no vetor de base:

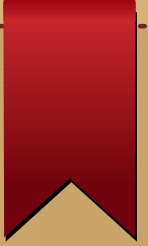
$$\frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^\mu} \equiv \Gamma_{\mu\alpha}^\nu \mathbf{e}_\nu$$

Conexão afim

$$d\mathbf{A} = d(A^\mu \mathbf{e}_\mu) = \left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\sigma} dx^\sigma \right) \mathbf{e}_\mu + A^\mu \frac{\partial \mathbf{e}_\mu}{\partial x^\alpha} dx^\alpha$$

$$d\mathbf{A} = \left[\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\alpha\nu}^\mu A^\nu \right] \mathbf{e}_\mu dx^\alpha \equiv (\nabla_\alpha A^\mu) \mathbf{e}_\mu dx^\alpha$$

3ª Aula



- ♦ A linguagem da RG
- ♦ Equações de Einstein
- ♦ Limite Newtoniano
- ♦ Solução de Schwarzschild



Derivada covariante

Pode-se verificar (exercício!) que se a derivada covariante é um tensor:

$$\nabla_{\mu'} V^{\nu'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}} \nabla_{\mu} V^{\nu}$$

Então a conexão se transforma de acordo com:

$$\Gamma_{\mu'\lambda'}^{\nu'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}} \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu} - \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}} \frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\lambda}}$$

...ou seja, NÃO É UM TENSOR!

Derivada covariante

$$\nabla_{\alpha} A^{\mu} \equiv \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma_{\alpha\nu}^{\mu} A^{\nu}$$

Sem torção!

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \Gamma_{\nu\mu}^{\alpha}$$

$$\nabla_{\alpha} B_{\mu} = \frac{\partial B_{\mu}}{\partial x^{\alpha}} - \Gamma_{\alpha\mu}^{\nu} B_{\nu}$$

**Variedade
Riemanniana!**

Em termos da métrica:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} \left[\partial_{\mu} g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu} g_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma} g_{\mu\nu} \right]$$

Que decorre de:

$$\nabla_{\rho} g_{\mu\nu} = 0$$

Equação da geodésica

- Geodésica: uma curva “localmente retilínea”;
- Sempre tangente à sua trajetória;
- Sob uma variação infinitesimal a 4-velocidade não muda:

$$0 = \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(u^\mu \mathbf{e}_\mu) = \frac{du^\mu}{d\tau} \mathbf{e}_\mu + u^\mu \frac{d\mathbf{e}_\mu}{d\tau}$$

$$u^\mu \equiv dx^\mu / d\tau$$

$$0 = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau}$$

Não-comutatividade da derivada covariante

- Eq. da geodésica não diz se temos gravidade ou se espaço é curvo ou não;
- Informação sobre a curvatura vem das 2^{as} derivadas da métrica;
- Para um vetor a^α temos:

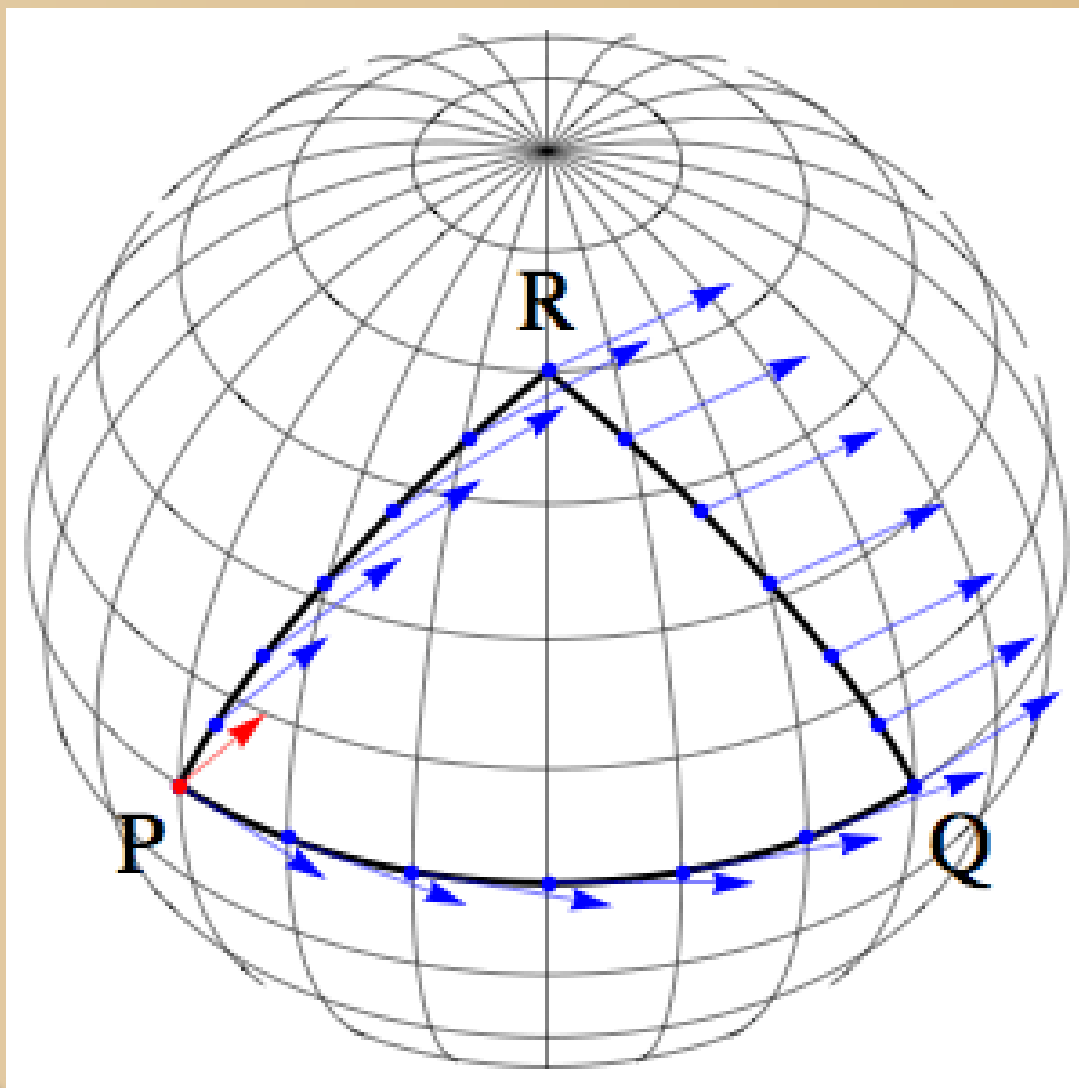
$$(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) a^\alpha = R^\alpha_{\beta\mu\nu} a^\beta$$

- Em que

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} \equiv \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\beta\nu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\beta\mu} + \Gamma^\alpha_{\mu\gamma} \Gamma^\gamma_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\sigma} \Gamma^\sigma_{\beta\mu}$$

...é o tensor de curvatura de Riemann

Transporte paralelo



- Em um espaço curvo a diferença entre dois vetores arbitrários tem que levar em conta a mudança do vetor de base;
- Eles devem ser comparados no mesmo ponto.

Campos de maré e Desvio geodésico

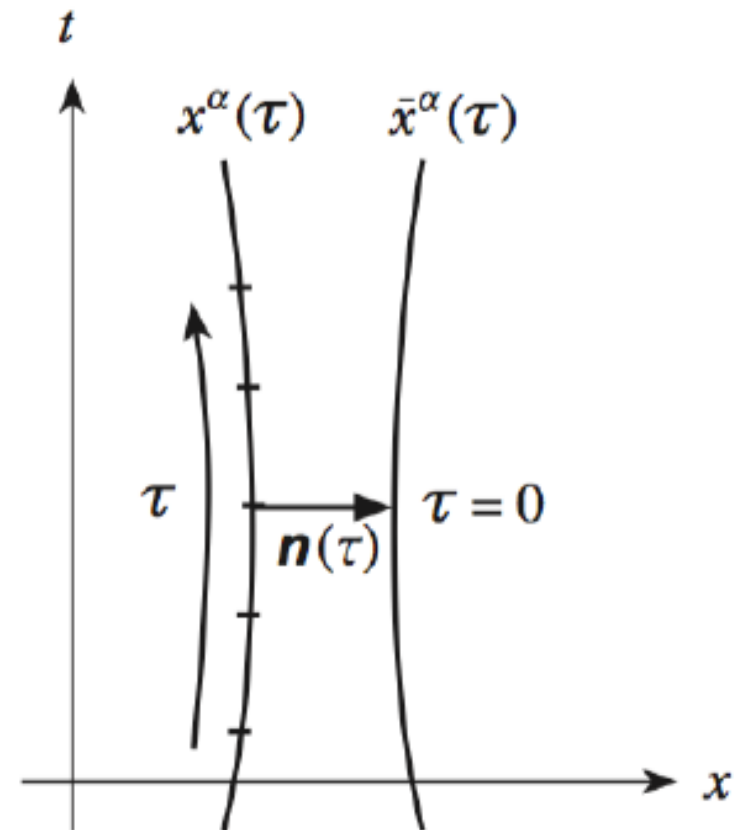
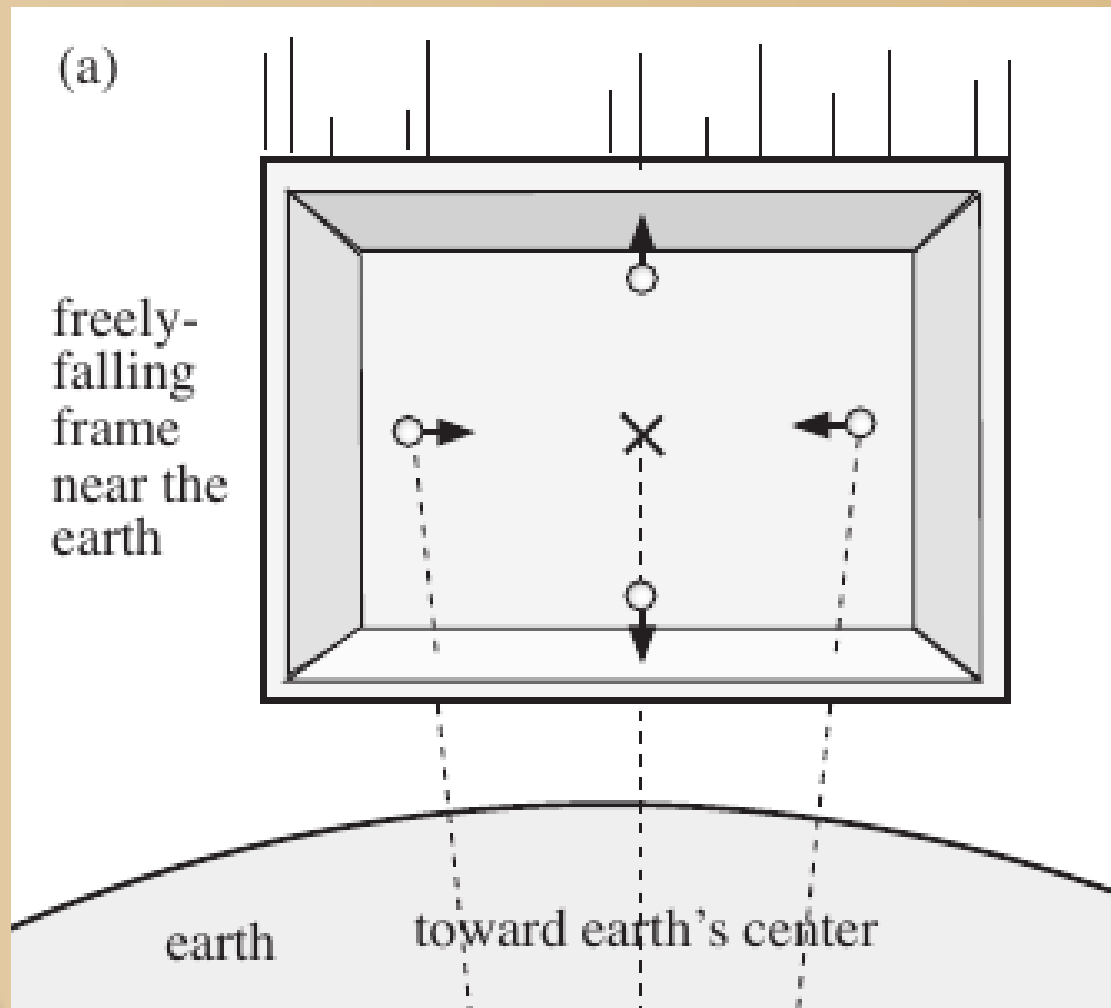


Figure 18.3. The worldlines of two objects following neighboring geodesics. The vector $\mathbf{n}$ connects the two objects at all times. The geodesics are parallel at $\tau = 0$.

Campos de maré e Desvio geodésico

Aceleração relativa entre duas geodésicas vizinhas:

$$\left(\frac{d^2 \mathbf{n}}{d\tau^2} \right)^\alpha = -R^\alpha_{\mu\nu\sigma} u^\sigma u^\mu n^\nu$$

Na teoria newtoniana:

$$\frac{d^2 n^i}{dt^2} \approx -\eta^{ij} [\partial_k \partial_j \Phi] n^k \equiv -\eta^{ij} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^k \partial x^j} n^k$$

Curvatura

- **Identidade de Bianchi:**

$$\nabla_{\sigma} R_{\alpha\beta\mu\nu} + \nabla_{\nu} R_{\alpha\beta\sigma\mu} + \nabla_{\mu} R_{\alpha\beta\nu\sigma} = 0$$

- **Tensor de Ricci:**

$$R_{\beta\nu} \equiv R^{\alpha}_{\beta\alpha\nu} \equiv g^{\alpha\mu} R_{\alpha\beta\mu\nu}$$

$$R_{\beta\nu} = R_{\nu\beta}$$

- **Escalar de Ricci (ou escalar de curvatura):**

$$R \equiv g^{\beta\nu} R_{\beta\nu} \equiv g^{\beta\nu} g^{\alpha\mu} R_{\alpha\beta\mu\nu}$$

Tensor energia-momento

Contém todas as possíveis fontes de gravidade, incluindo matéria relativística:

$$T^{\mu\nu} = \begin{array}{c} \mu = \\ t \\ \\ x, \\ y, \\ z \end{array} \begin{array}{cc} \nu = t & x, y, z \\ \left[\begin{array}{c|c} \text{energy density} & i\text{-flux of energy or} \\ & i\text{-mom. density} \\ \hline i\text{-flux of energy or} & i\text{-flux of} \\ & j\text{-mom.} \\ & \text{or} \\ i\text{-mom. density} & \text{vice versa} \end{array} \right] \end{array}$$

Tensor energia-momento

$$T^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \rho_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_0 \end{bmatrix} \quad (\text{for a perfect fluid at rest in an LIF})$$

$$T^{\mu\nu} = (\rho_0 + p_0)u^\mu u^\nu + p_0 g^{\mu\nu} \quad (\text{for a perfect fluid})$$

Equação de conservação $\Rightarrow \nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$

$$\partial_\mu(\rho_0 u^\mu) + p_0 \partial_\mu u^\mu = 0 \quad (\text{equation of continuity})$$

$$(\rho_0 + p_0)(\partial_\mu u^\nu)u^\mu = -(\eta^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu)\partial_\mu p_0 \quad (\text{equation of motion})$$

Tensor de Einstein

- As equações para a gravidade devem recuperar teoria newtoniana no limite do campo fraco:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -4\pi G\rho \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 \Phi = 4\pi G\rho$$

- A conservação do tensor E-M sugere :

$$\nabla_{\mu} G^{\mu\nu} = 0$$

- Einstein tensor:

$$G^{\mu\nu} \equiv R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R$$

Equações de Einstein

Assim Einstein propôs o conjunto de equações abaixo:

$$G^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu}$$

Note que as equações abaixo também satisfazem as condições anteriores:

$$G^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu}$$



Λ

: cosmological constant

Limite newtoniano

Assumindo pequenas velocidades e campo gravitacional fraco recuperamos a equação newtoniana para o movimento de uma partícula massiva:

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \quad |h_{\alpha\beta}| \ll 1$$

$$\Gamma_{00}^{\alpha} = -\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^{\beta}}$$

Comparando a equação da geodésica

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \frac{1}{2} \nabla h_{00}$$

com

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -\nabla \phi \quad \left| \quad \phi = -\frac{GM}{r} \right.$$

Temos

$$g_{00} = -(1 + 2\phi)$$

e

$$h_{00} = -2\phi + \text{constant}$$

Limite newtoniano

Usando

$$g_{00} = -(1 + 2\phi)$$

na E.E teremos:

$$\nabla^2 \Phi \approx R^{tt} = \kappa (T^{tt} - \frac{1}{2} \eta^{tt} T) + \Lambda g^{tt}$$

$$\nabla^2 \Phi \approx R^{tt} \approx \kappa [\rho - \frac{1}{2}(-1)(-\rho)] - \Lambda = \frac{1}{2} \kappa \rho - \Lambda$$

Comparando com a equação de Poisson:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$$

Obtemos a **constante de acoplamento**

$$\kappa = 8\pi G$$

Simetria esférica

Qualquer quantidade física só pode depend **t** and **r**:

Minkowski:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

Procuramos por:

$$ds^2 = -A(r, t) dt^2 + B(r, t) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Equações de Einstein em Simetria Esférica

$$R_{tt} = \frac{1}{2B} \left[+ \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} - \frac{1}{2A} \left(\frac{\partial A}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{2B} \frac{\partial A}{\partial r} \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{2}{r} \frac{\partial A}{\partial r} - \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} + \frac{1}{2B} \left(\frac{\partial B}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2A} \frac{\partial A}{\partial t} \frac{\partial B}{\partial t} \right] \quad (23.6a)$$

$$R_{rr} = \frac{1}{2A} \left[- \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{2A} \left(\frac{\partial A}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2B} \frac{\partial A}{\partial r} \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{2A}{Br} \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} - \frac{1}{2B} \left(\frac{\partial B}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2A} \frac{\partial A}{\partial t} \frac{\partial B}{\partial t} \right] \quad (23.6b)$$

$$R_{\theta\theta} = - \frac{r}{2AB} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{r}{2B^2} \frac{\partial B}{\partial r} + 1 - \frac{1}{B} \quad (23.6c)$$

$$R_{\phi\phi} = \sin^2 \theta R_{\theta\theta} \quad (23.6d)$$

$$R_{tr} = + \frac{1}{Br} \frac{\partial B}{\partial t} \quad (23.6e)$$

Equações de Einstein em Simetria Esférica

- No vácuo $R_{\alpha\beta}=0$:

$$R_{tr} = + \frac{1}{Br} \frac{\partial B}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial B}{\partial t} = 0$$

$$0 = \frac{B}{A} R_{tt} + R_{rr} = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial r} \right) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial r} = - \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial r}$$

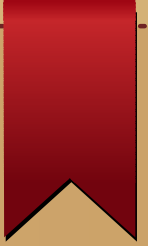
$$\frac{1}{B} = 1 + \frac{C}{r}$$

Podemos mostrar
que $B(r)=1/A(r)$!

Teorema de Birkhoff

- Começamos assumindo $A(r,t)$, $B(r,t)$ e terminamos com $A=1/B=A(r)$;
- Analogia newtoniana: o campo fora da fonte esférica é independente do tempo mesmo se a massa for dependente do tempo;
- O campo é o mesmo fora de uma estrela esférica, e estático, mesmo se a estrela realiza pulsação radial.

Solução de Schwarzschild



Karl Schwarzschild (1873 -1916)

“...como você vê, a guerra me tratou gentilmente o suficiente, apesar da artilharia pesada, para permitir-me ficar longe de tudo e aproveitar esta caminhada na terra de suas ideias...”

(Dezembro de 1915, em carta a Einstein)

Solução de Schwarzschild

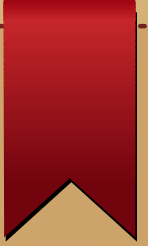
$$ds^2 = -\left(1 + \frac{C}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1 + C/r} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

Em largas distâncias
devemos recuperar a
gravidade newtoniana:

$$C = -2GM \quad (C = -2GM/c^2)$$

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

Órbitas de partículas: quantidades conservadas



Da Eq. da geodésica, temos (**exercício!**):

$$0 = \frac{d}{d\tau} \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) - \frac{1}{2} \partial_\mu g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau}$$

Para a solução de Schwarzschild:

$$0 = \frac{d}{d\tau} \left(g_{tt} \frac{dt}{d\tau} \right) \Rightarrow \text{constant} = -g_{tt} \frac{dt}{d\tau} = \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) \frac{dt}{d\tau} \equiv e$$

e : energia por unidade de massa da partícula

$$0 = \frac{d}{d\tau} \left(g_{\phi\phi} \frac{d\phi}{d\tau} \right) \Rightarrow \text{constant} = g_{\phi\phi} \frac{d\phi}{d\tau} = r^2 \sin^2 \theta \frac{d\phi}{d\tau} \equiv \ell$$

ℓ : momento angular por unidade de massa da partícula

Equação radial de movimento

Usando $g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = \epsilon$ obtemos:

$$\frac{1}{2}(e^2 - 1) = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - \frac{GM}{r} + \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{GM\ell^2}{r^3} \equiv \tilde{E}$$

$$\tilde{V}(r) \equiv -\frac{GM}{r} + \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{GM\ell^2}{r^3}$$

Vamos comparar com o resultado newtoniano

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \tilde{V}_N \equiv \tilde{E}_N \quad \text{where} \quad \tilde{V}_N(r) \equiv -\frac{GM}{r} + \frac{\ell^2}{2r^2}$$

Equação radial de movimento

Usando $g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = \epsilon$ obtemos:

$$\frac{1}{2}(e^2 - 1) = \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \frac{GM}{r} + \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{GM\ell^2}{r^3} \equiv \tilde{E}$$

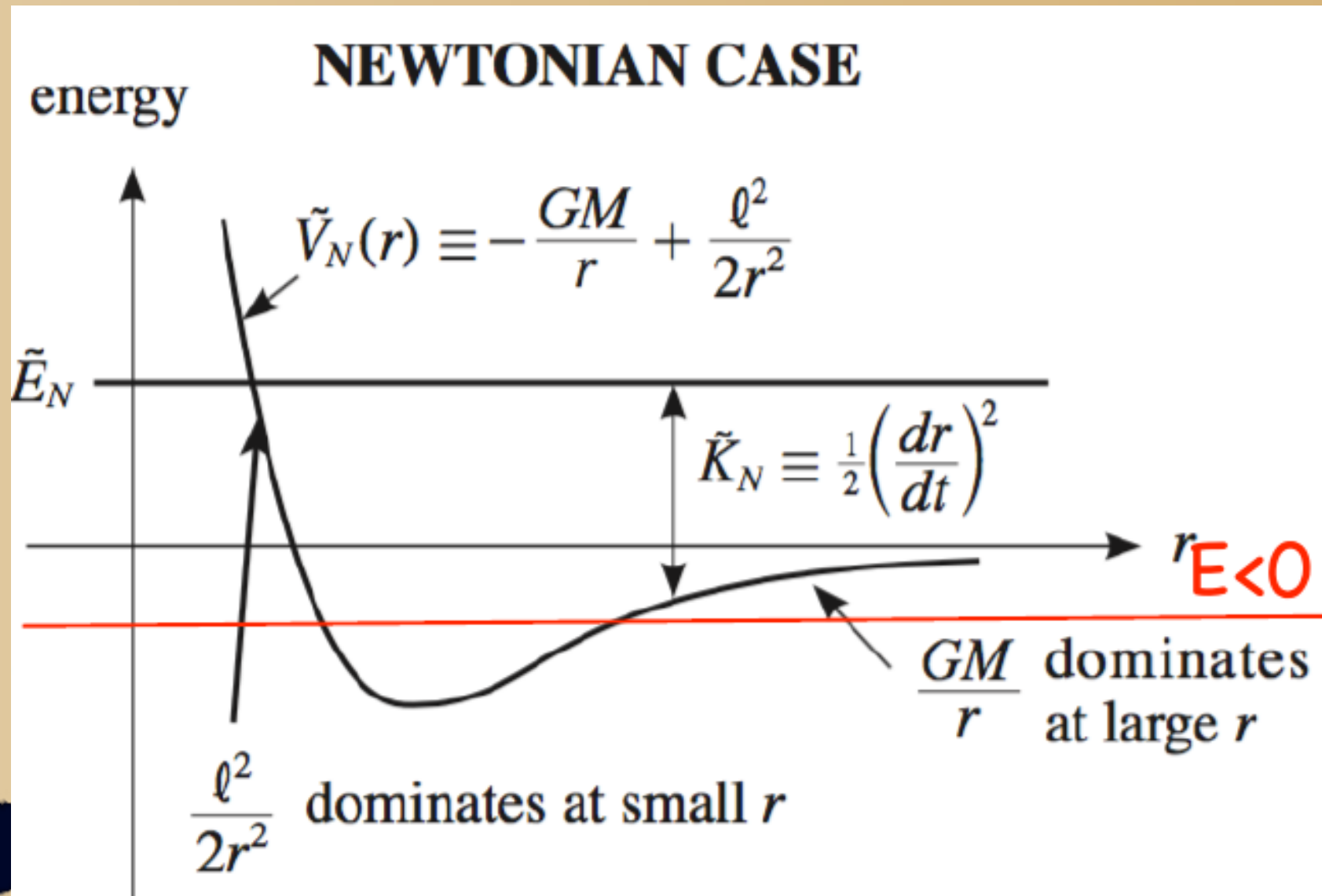
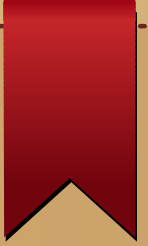
$$\tilde{V}(r) \equiv -\frac{GM}{r} + \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{GM\ell^2}{r^3}$$

correção
relativística!

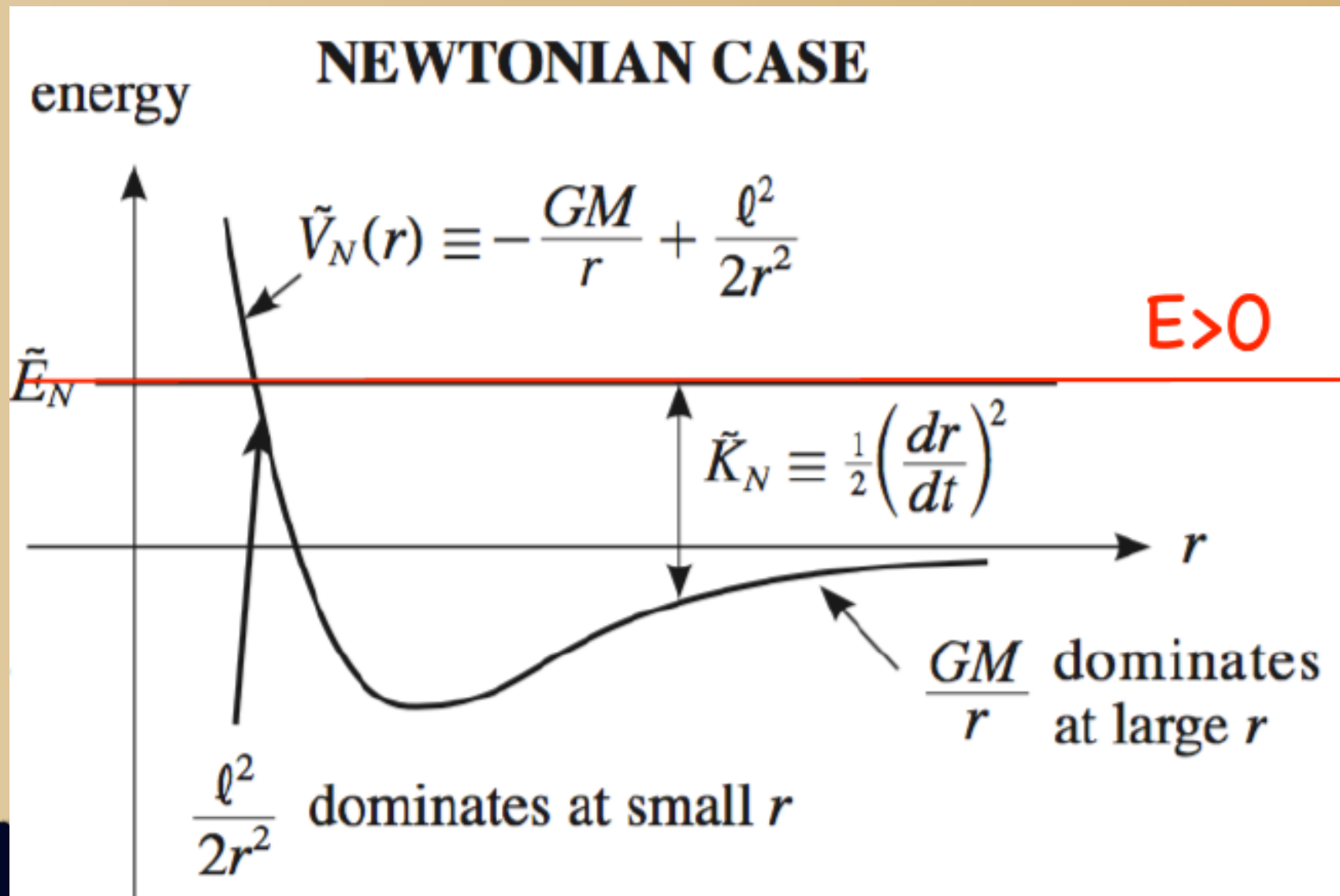
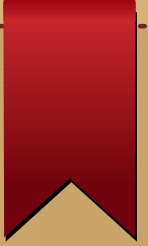
Vamos comparar com o resultado newtoniano

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \tilde{V}_N \equiv \tilde{E}_N \quad \text{where} \quad \tilde{V}_N(r) \equiv -\frac{GM}{r} + \frac{\ell^2}{2r^2}$$

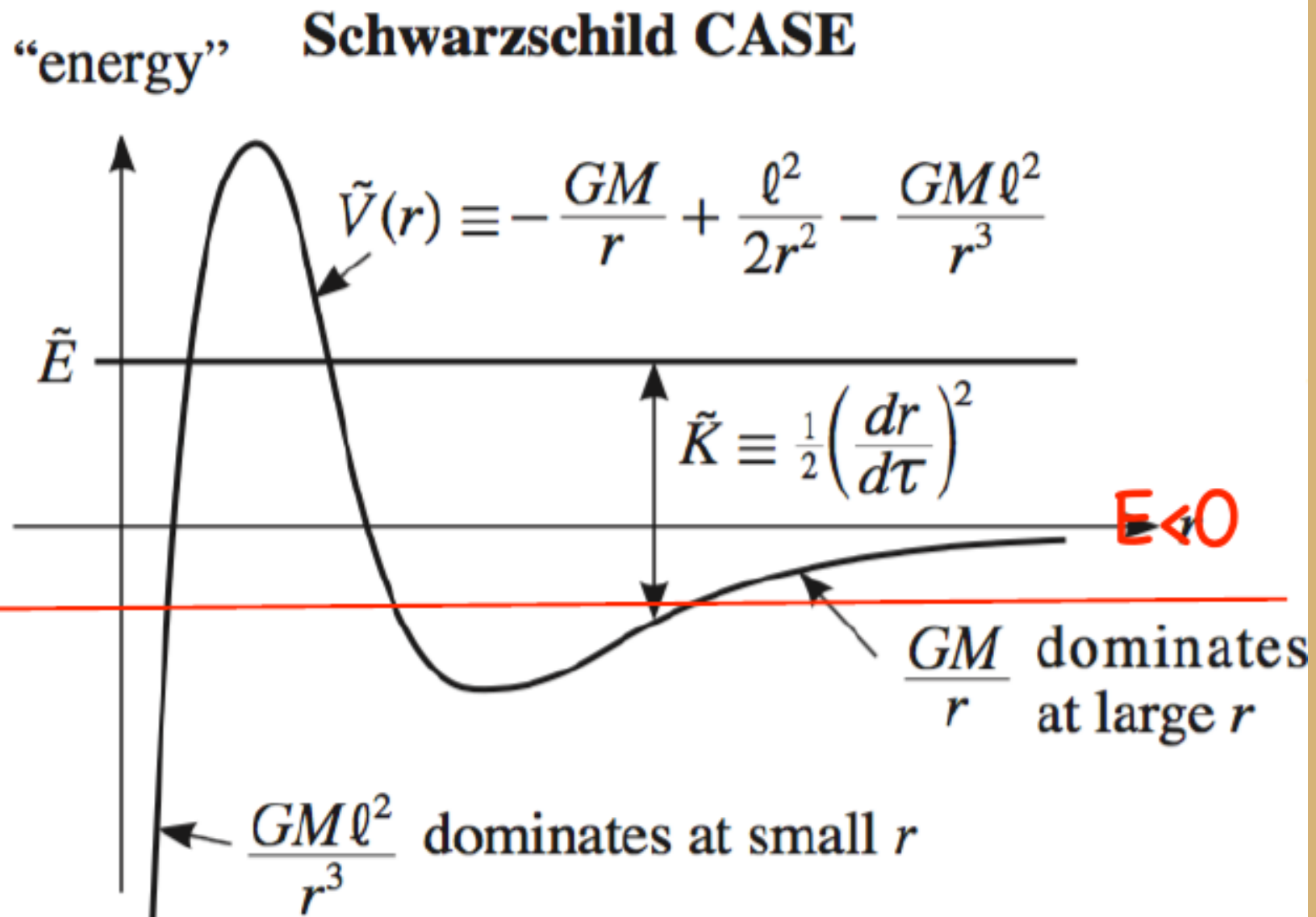
Órbitas ligadas: $r_1 < r < r_2$



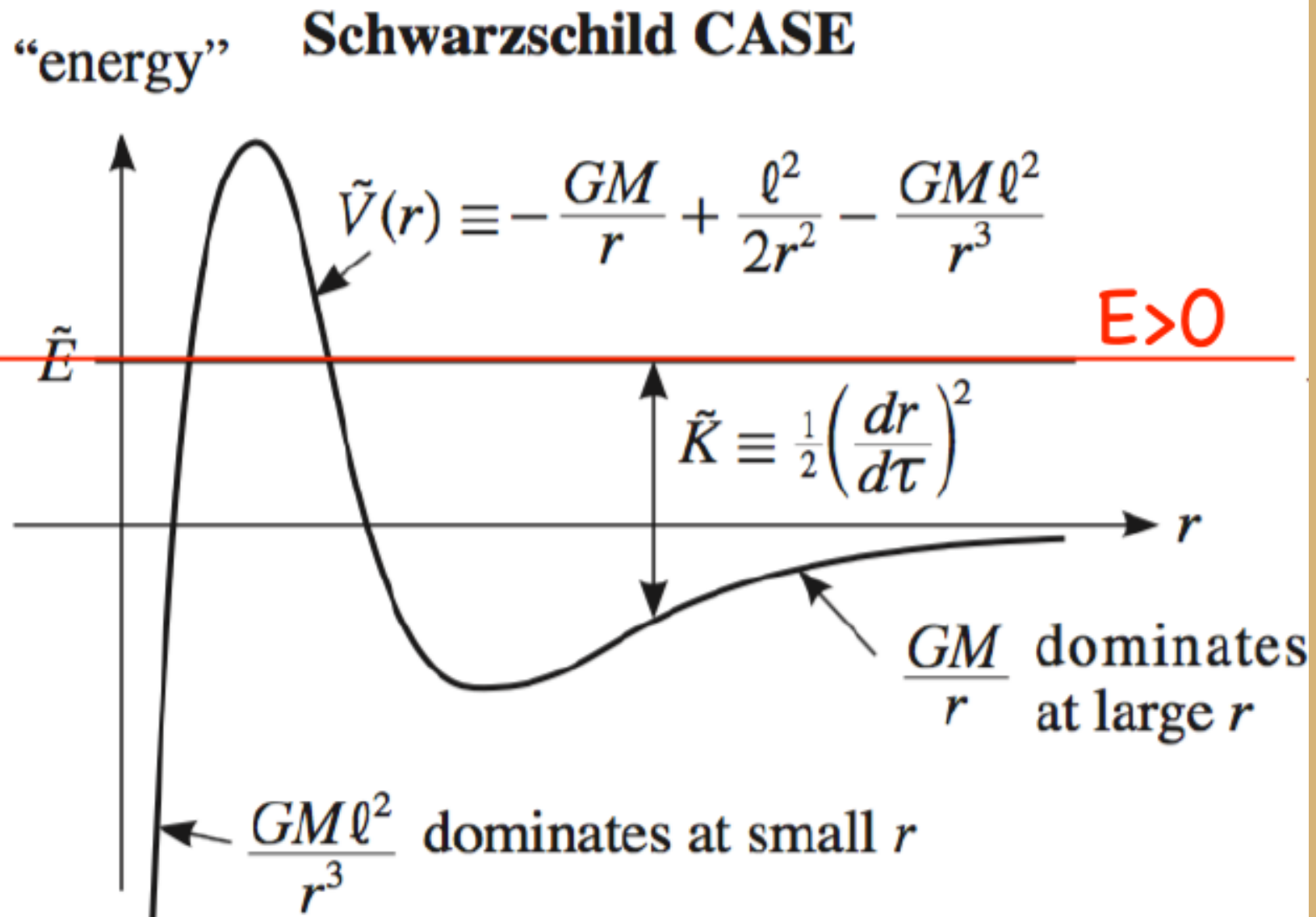
Órbitas não-ligadas: $r > r_m$



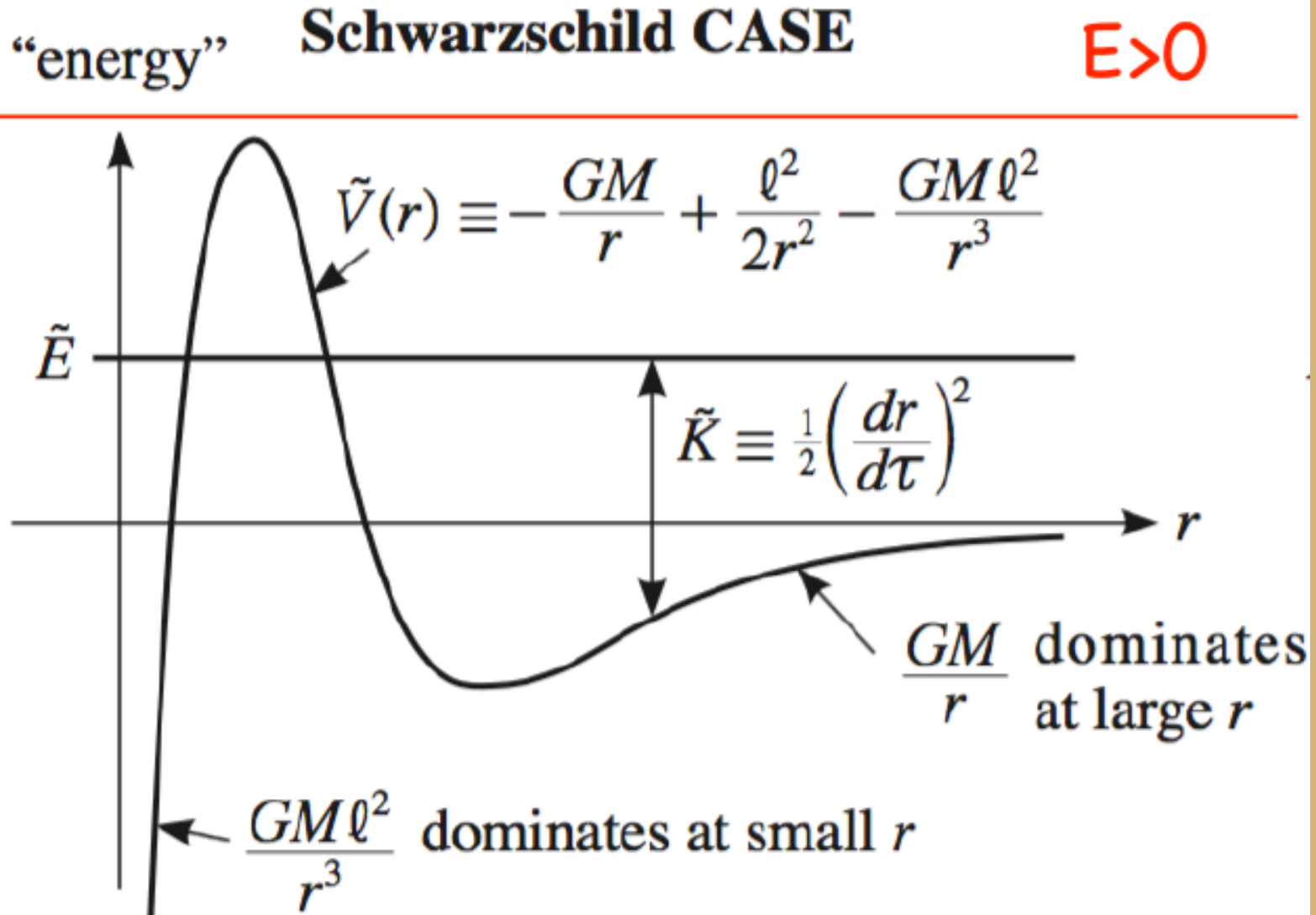
Órbitas ligadas



Órbitas não-ligadas



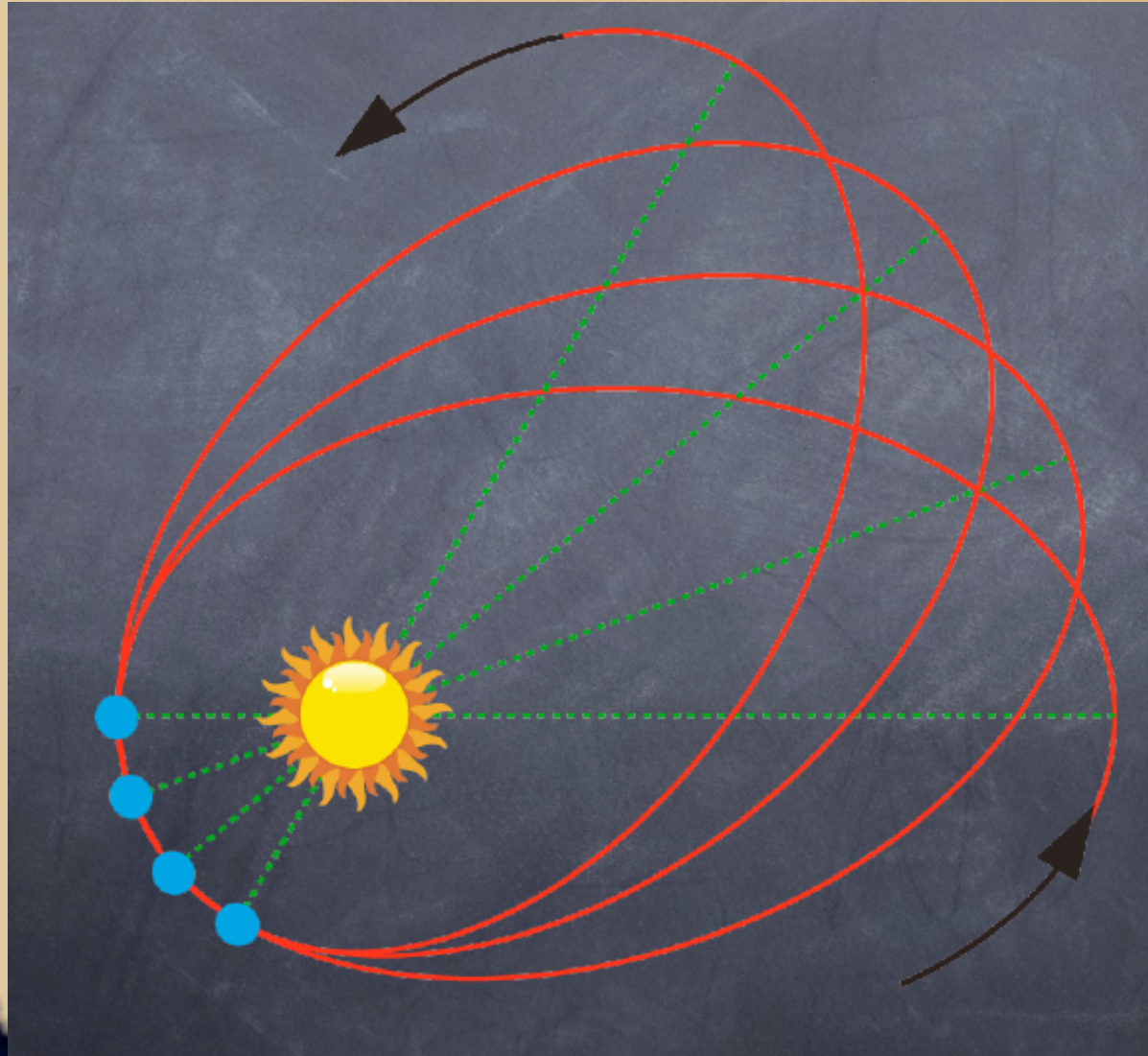
Órbitas espirais



Implicações astrofísicas

- Órbitas estáveis e instáveis são importantes em “discos de acreção” em torno de objetos compactos (estrela de nêutrons or buracos negros)
- Para $r < 6GM$ não há qualquer órbita circular estável
- $R_{\text{ISCO}} = 6GM$ é o raio da órbita circular estável mais interna
- Objetos compactos com raio menor que R_{ISCO} podem acretar material do raio interno do disco ao redor deles

Precessão do Periélio



- Observado por Urbain Leverrier em 1859
- Consiste em um avanço do periélio (restava explicar contribuição estimada em **43''/século**)
- Ele postulou a existência de um novo planeta

Precessão do Periélio

Sources of the precession of perihelion for Mercury

Amount (arcsec/Julian century)	Cause
531.63 ± 0.69	Gravitational tugs of the other planets
0.0254	Oblateness of the Sun
42.98 ± 0.04	General relativity
574.64 ± 0.69	Total
574.10 ± 0.65	Observed

Precessão do Periélio

A equação da órbita pode ser escrita como

$$\frac{d^2 x}{d\phi^2} - 1 + x = \frac{3G^2 M^2}{L^2} x^2.$$

$$x = \frac{L^2}{GM r}.$$

Considere um método perturbativo

$$x = x_0 + x_1$$

Solução:

$$x = 1 + e \cos \phi + \frac{3G^2 M^2 e}{L^2} \phi \sin \phi$$

O segundo termo contém o efeito do avanço do periélio!

Precessão do Periélio

Mercúrio:

$$\frac{GM_{\odot}}{c^2} = 1.48 \times 10^5 \text{ cm},$$
$$a = 5.79 \times 10^{12} \text{ cm}$$
$$e = 0.2056,$$

$$\Delta\phi = \frac{6\pi GM}{c^2(1-e^2)a}.$$

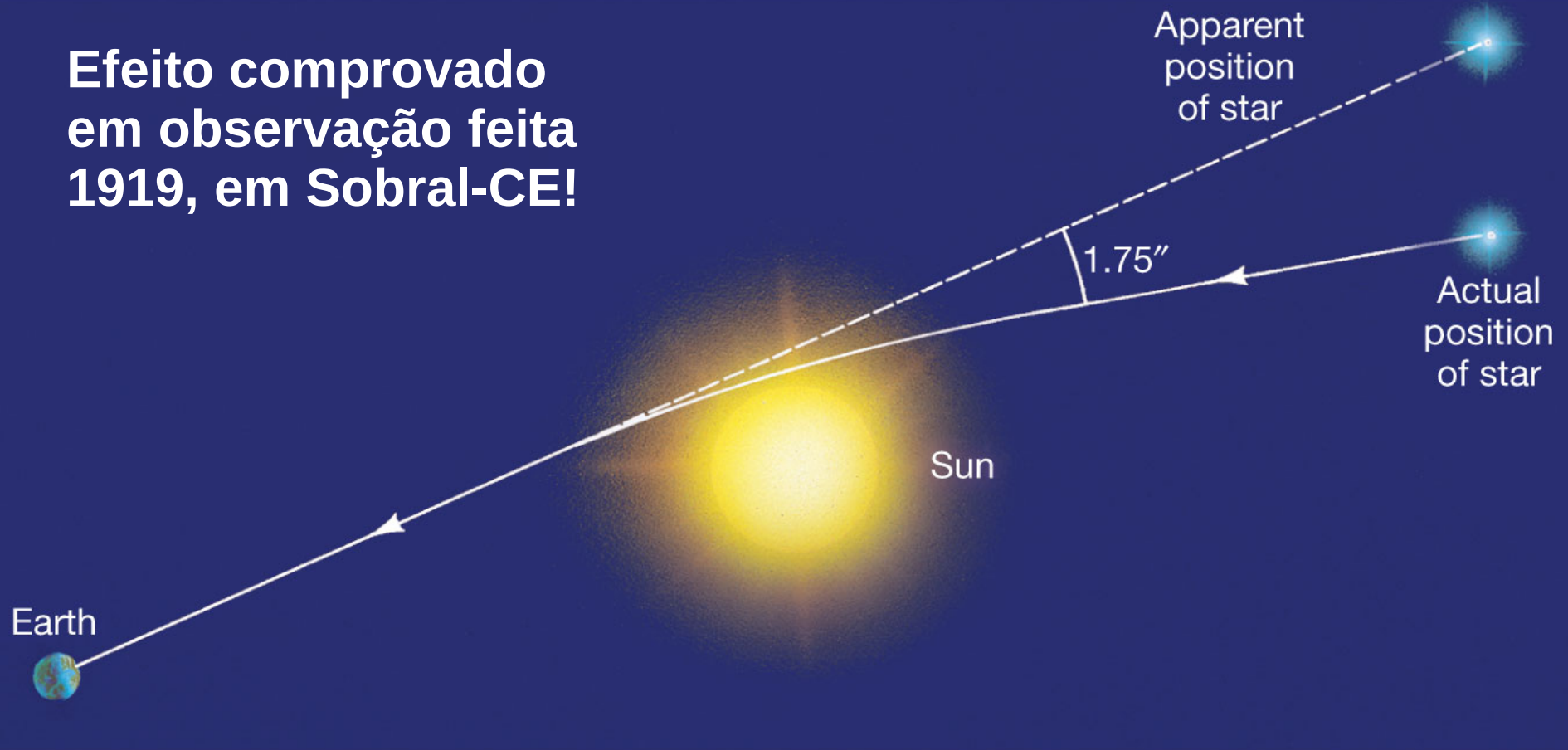
$$\Delta\phi_{\text{Mercury}} = 43.0''/\text{century}.$$

**GR descreve corretamente a precessão do periélio
Mercúrio!**

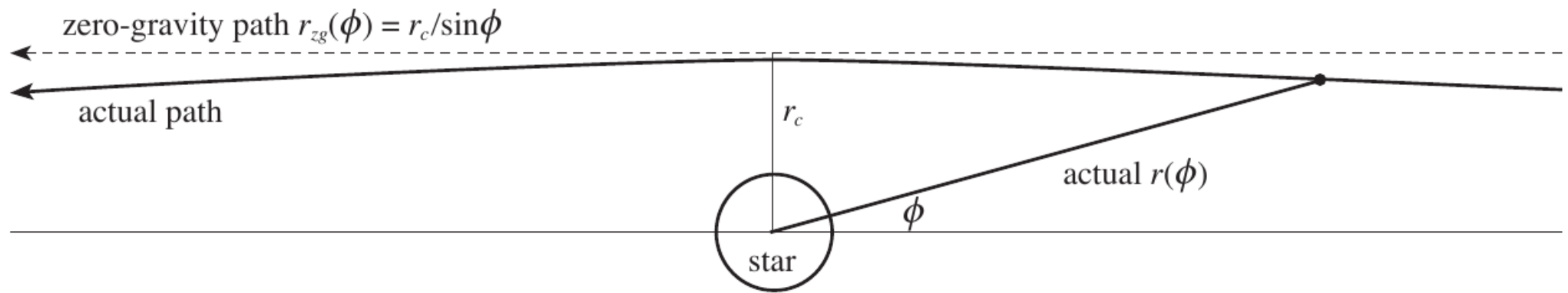
Deflexão gravitacional da luz

A geometria curva em torno de um corpo massivo causa a deflexão de um raio de luz passando por sua vizinhança!

**Efeito comprovado
em observação feita
1919, em Sobral-CE!**



Deflexão gravitacional da luz



$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = 3GMu^2$$

$$u(\phi) \approx \frac{1}{r_c} \left[\sin \phi + \frac{3GM}{2r_c} \left(1 + \frac{1}{3} \cos 2\phi \right) \right]$$

Deflexão gravitacional da luz



Para o raio de luz vindo do infinito e um pequeno deslocamento angular temos:

$$\phi_0 \approx -\frac{2GM}{r_c}$$

$$\delta \approx \left| \frac{4GM}{r_c} \right|$$

Redshift gravitacional

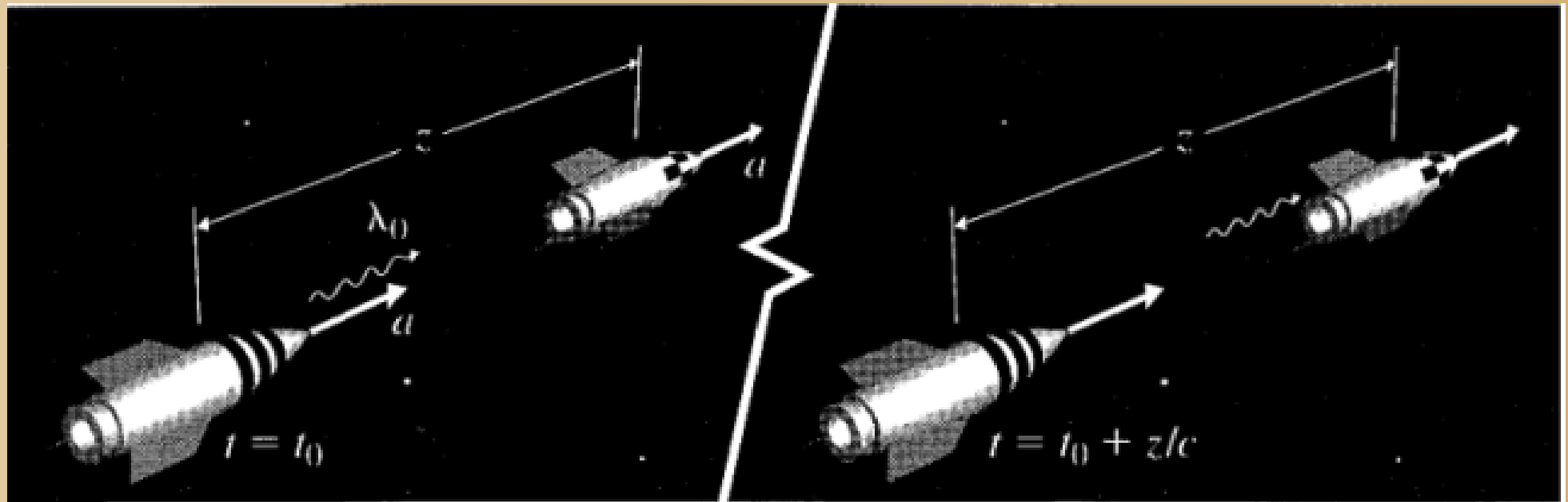
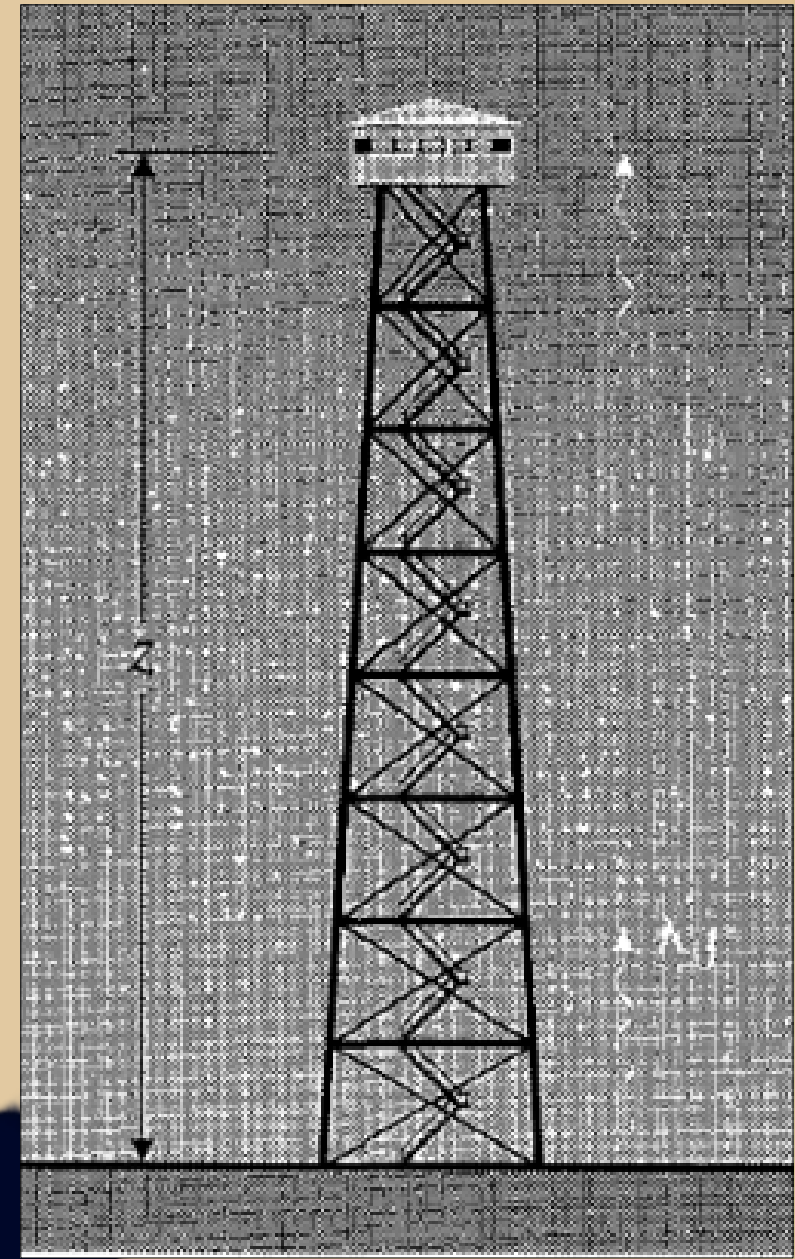
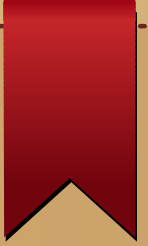


FIGURE 2.2 The Doppler shift as measured by two rockets separated by a distance z , each feeling an acceleration a .

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\Delta v}{c} = \frac{az}{c^2}.$$

Redshift gravitacional



$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{a_g z}{c^2}.$$

$$\mathbf{a}_g = \nabla\Phi$$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} &= \frac{1}{c} \int \nabla\Phi \, dt \\ &= \frac{1}{c^2} \int \partial_z \Phi \, dz \\ &= \Delta\Phi,\end{aligned}$$

FIGURE 2.3 Gravitational redshift on the surface of the Earth, as measured by observers at different elevations.

Redshift gravitacional



Laboratório Jefferson – Univ. de Harvard

**Pound & Rebka
1960**

**Mediram resultados
compatíveis com as
previsões da RG**

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} \simeq 2.5 \times 10^{-15}$$

$$\frac{(\Delta\nu)_{exp}}{(\Delta\nu)_{teoria}} = 1.05 \pm 0.10$$

**Pound & Snider
1965**

$$\frac{(\Delta\nu)_{exp}}{(\Delta\nu)_{teoria}} = 0.9990 \pm 0.0076$$

Considerações finais

- A RG inclui com sucesso a gravitação no esquema relativístico
- É uma teoria consistente com as observações
- Porém, ainda não possui uma formulação quântica
- Sofre de singularidades: buracos negros, início do universo etc
- Talvez não seja a teoria adequada na escala cosmológica
- A detecção de ondas gravitacionais abrir novas portas



MUITO OBRIGADO!

