

Objetos Compactos

Tulio Ottoni Ferreira da Costa



Inverno Astrofísico, 16-20 de Agosto de 2021.
Domingo Martins - ES.

O que são Objetos Compactos?

- Objetos ligados gravitacionalmente que não realizam fusão nuclear.

Podemos estimar quão compactos são esses objetos (compactidade) por meio da quantidade

$$C = \frac{GM}{Rc^2}. \quad (1)$$

- Anã Branca $C \sim 10^{-3}$ ($C_{\odot} = 10^{-6}$)
- Estrela de Nêutrons $C \sim 0.1 - 0.3$
- Buraco Negro $C = 0.5$

Diagrama HR

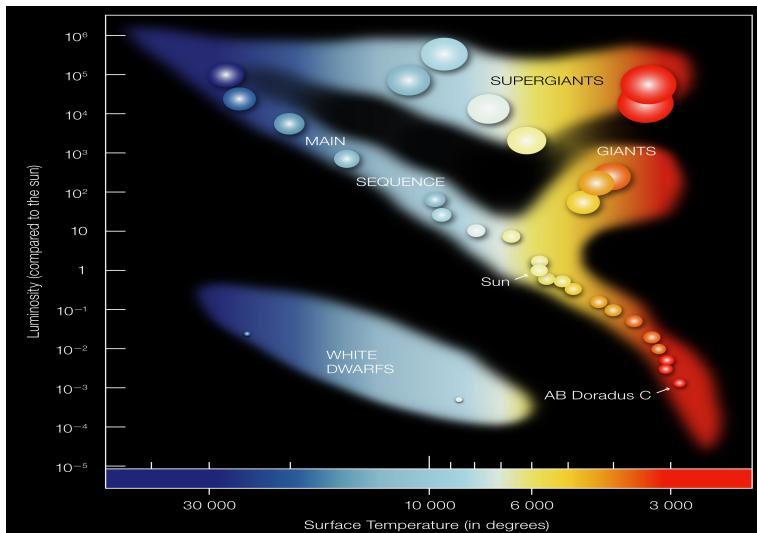


Figura 1: Uma foto de família. Créditos: ESA

Evolução Estelar

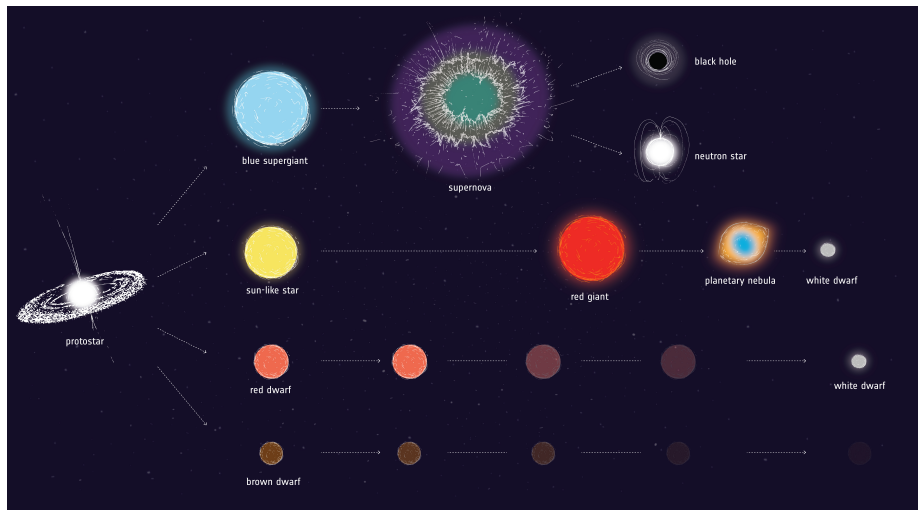


Figura 2: Evolução Estelar. Créditos: ESA

Estrutura em "cebola" do núcleo de estrelas massivas

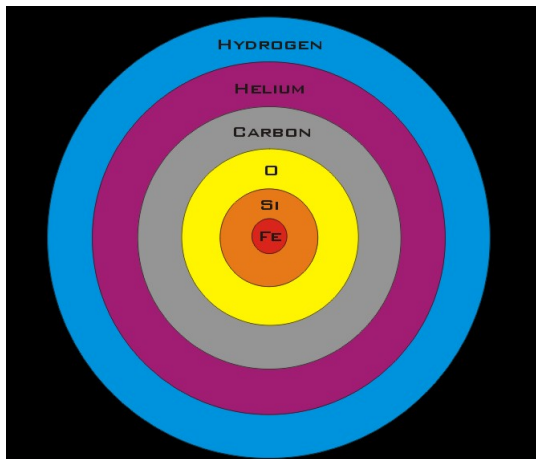


Figura 3: Créditos: Carolyn Brinkworth and Claire Thomas

Como estrelas massivas terminam sua vida ?

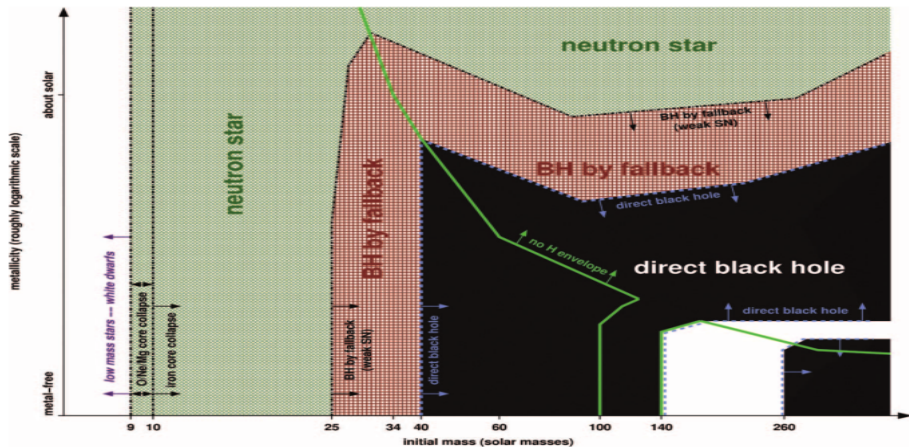


Figura 4: O destino de uma estrela massiva é guiado pela massa e composição química iniciais e pela sua perda de massa. Fonte: A. Heger et al. 2003

Nebulosa Planetária



Figura 5: Belíssima Nebulosa olho de gato (NGC 6543). No centro, o núcleo da estrela colapsado: uma anã branca. Créditos: NASA, ESA, HEIC, and The Hubble Heritage Team (STScI/AURA)

Supernovas

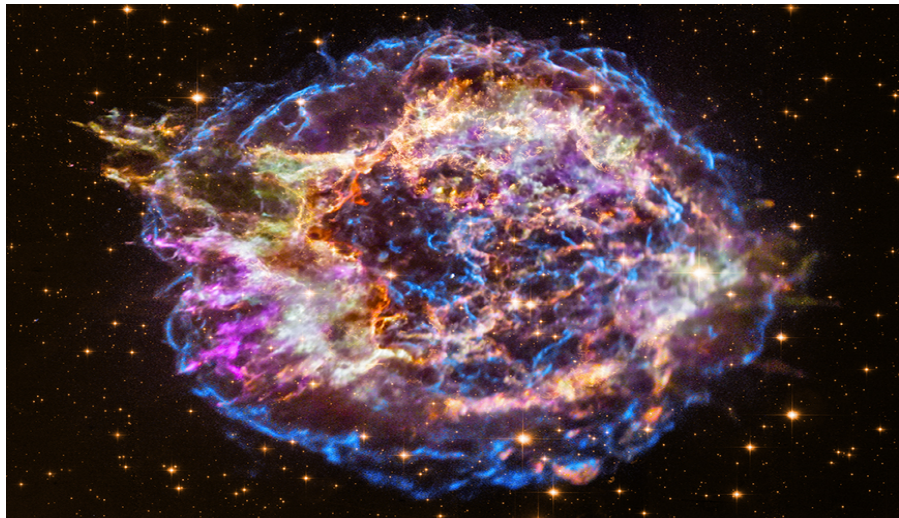


Figura 6: Cass A, restos de uma supernova a 11.000 anos-luz da Terra.
Créditos: X-ray: NASA/CXC/RIKEN/T. Sato et al.; Optical: NASA/STScI

Supernovas



Figura 7: Nebulosa do Caranguejo (M1), restos de uma Supernova que explodiu e foi vista aqui na Terra no ano 1054. Créditos: NASA and ESA.

Anãs Brancas

Propriedade Básicas das Anãs Brancas

- Massa: $M \sim (M_{\odot} = 1.98 \times 10^{30} \text{ Kg})$
- Raio: $R \sim 6.000 \text{ Km}$
- Densidade Média: $\bar{\rho} = 10^9 \text{ Kg/m}^3$



Figura 8: Impressão Artística de uma anã branca. Créditos: All About Space/Imagine Publishing

História das Anãs Brancas

- Em 1844, Friedrich Bessel analisando o movimento de Sirius e Procyon previu que deveria existir uma estrela "invisível" nesses sistemas.
- Em 1862 Alvan Clark viu Sirius B com seu telescópio recém desenvolvido.

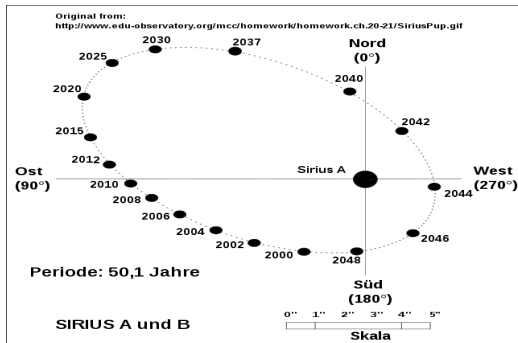


Figura 9: Movimento orbital de Sirius B. Wikimedia Commons image in the Public Domain

Sistema Binário Sirius A e B

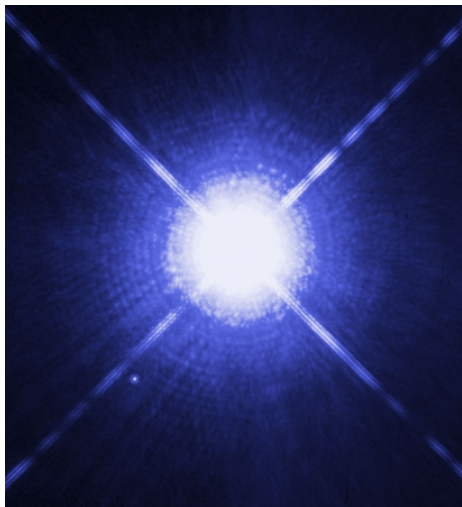


Figura 10: Sirius e sua companheira anã branca. Créditos: NASA, ESA, H. Bond (STScI), and M. Barstow (University of Leicester)

História das Anãs Brancas

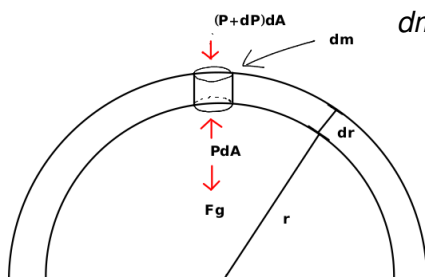
- Em 1926, Ralph H. Fowler usando a recém desenvolvida mecânica quântica mostrou que elétrons degenerados poderiam gerar uma pressão que equilibraria a atração gravitacional de uma Anã Branca.
- Entre 1931 e 1935, S. Chandrasekhar calculou com detalhes a estrutura de uma Anã Branca sustentada pela degenerescência eletrônica. Em particular, ele mostrou que existe um limite $M \sim 1.4M_{\odot}$ além do qual essas estrelas não se mantêm estáveis.



Figura 11: O jovem Subrahmanyan Chandrasekhar. Fonte: Chandra X-ray

Estrutura de uma Anã Branca

Como é o balanço de forças no equilíbrio ?



$$dm = \rho(r)dV = 4\pi\rho(r)r^2dr$$

$$F_g = \frac{-GM(r)dm}{r^2}$$

$$F_p = PdA - (P + dP)dA$$

No equilíbrio $F_p + F_g = 0$. Dividindo por $dV = dA dr$ encontramos

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2}$$

Estrutura de uma Anã Branca

Logo, no equilíbrio, temos duas equações que descrevem a estrutura da estrela:

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi\rho(r)r^2 \quad \left(M(r) = \int_0^r 4\pi\rho(r')r'^2 dr' \right) \quad (2)$$

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2} \quad (3)$$

Com as condições de contorno

$$M(r=0) = 0$$

$$P(r=0) = P_c$$

Porém temos um sistema incompleto, com duas equações e três variáveis ($M(r)$, $P(r)$ e $\rho(r)$). O que falta ???

Estrutura de uma Anã Branca

Falta uma relação entre a pressão e a densidade, a chamada **Equação de Estado**, que descreve a termodinâmica estelar.

Em geral, essa é uma relação complicada

$$P = P(\rho, T, X_i).$$

Porém fazemos algumas simplificações (justas). Primeiro admitimos uma equação chamada barotrópica

$$P = P(\rho).$$

Em seguida, supomos uma forma **politrópica**

$$P = K\rho^\Gamma \quad \text{ou} \quad P = K\rho^{1+\frac{1}{n}} \quad (\Gamma \equiv 1 + 1/n)$$

Estrutura de uma Anã Branca

Logo,

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi\rho(r)r^2 \quad (4)$$

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2} \quad (5)$$

$$P = K\rho^{1+\frac{1}{n}} \quad (6)$$

Podemos unificar essas três equações. Primeiramente, diferenciamos a equação 5

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho(r)} \frac{dP(r)}{dr} \right) = -G \frac{dM(r)}{dr} = -4\pi G \rho(r) r^2, \quad (7)$$

Definimos agora

$$\xi = \frac{r}{r_0} \quad (8)$$

$$\rho(r) = \rho_c \theta^n(r), \quad (9)$$

Estrutura de uma Anã Branca

Assim, substituindo essas novas variáveis na equação, temos

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^n \left(\frac{4\pi G r_0^2}{(1+n)\rho_c^{\frac{1-n}{n}} K} \right).$$

Conseguimos eliminar o termo constante entre parênteses se definirmos a distância característica como

$$r_0 = \sqrt{\frac{(1+n)\rho_c^{\frac{1-n}{n}} K}{4\pi G}}, \quad (10)$$

E ficamos finalmente com

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^n \quad (11)$$

conhecida como **equação de Lane-Emden**.

O fator de ocupação dos estados para férmions é

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/k_B T} + 1} \leq 1, \quad (12)$$

onde μ é o potencial químico.

Para baixas densidades e altas temperaturas,

$$f(E) \approx e^{\frac{-(E-\mu)}{k_B T}}, \quad (13)$$

que é o fator de ocupação clássico de Maxwell-Boltzmann.

Equação de Estado

A densidade de férmions é dada pelo número de estados e o fator de ocupação

$$n = \frac{g}{h^3} \int_0^\infty f(E) 4\pi p^2 dp, \quad (14)$$

onde g representa a degenerescência de cada estado. Para os elétrons $g=2$. No caso de um gás de elétrons completamente degenerado, a ocupação dos estados é dada por

$$f(E) = \begin{cases} 1 & \text{se } E < E_F \\ 0 & \text{se } E > E_F. \end{cases} \quad (15)$$

Podemos assim encontrar o momento de Fermi em termos da densidade

$$n = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{p_F} p^2 dp \quad \Rightarrow \quad n = \frac{8\pi}{3h^3} p_F^3 \quad (16)$$

A Pressão eletrônica será dada por

$$P_e = \frac{1}{3} \int_0^\infty p v(p) n(p) dp \quad (17)$$

Considerando o caso degenerado no limite não relativístico ($p=mv$)

$$P_e = \frac{1}{3} \int_0^{p_F} \frac{8\pi p^4}{h^3 m_e} dp = \frac{8\pi}{15 h^3 m_e} p_F^5 = \frac{h^2}{20 m_e} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} n_e^{5/3} \quad (18)$$

Para o caso ultra relativístico ($v=c$)

$$P_e = \frac{1}{3} \int_0^{p_F} \frac{8\pi c}{12 h^3} p^4 = \frac{hc}{8} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} n_e^{4/3} \quad (19)$$

Apesar da pressão ser gerada pelos elétrons a densidade é fornecida pelos íons

$$n_e = \frac{1}{\mu_e} \frac{\rho}{m_u} \quad (20)$$

onde μ_e é o peso médio por elétrons e m_u é a massa atômica unitária. Assim,

$$P_e = K_{NR} \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{5/3}, \quad K_{NR} = \frac{h^2}{20 m_e m_u^{5/3}} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{2/3} \quad (21)$$

$$P_e = K_{UR} \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{4/3}, \quad K_{UR} = \frac{hc}{8 m_u^{4/3}} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} \quad (22)$$

Equação de Estado

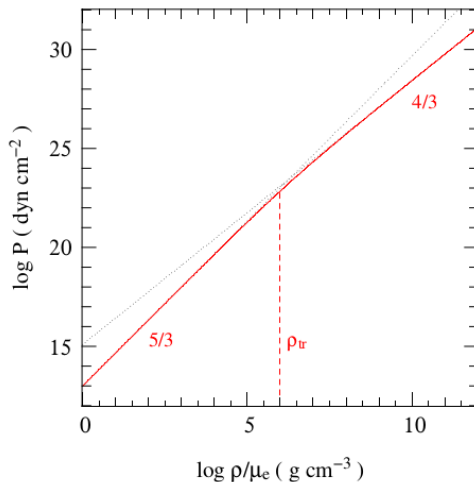


Figura 12: Relação da pressão com a densidade para um gás de elétrons degenerados. Fonte: Lectures on Stellar Structure by O. R. Pols

O limite de Chandrasekhar

O estudo da equação de Lane-Emden se mostra relevante para as anãs brancas.

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^n. \quad (23)$$

O raio da estrela é dado por

$$R = r_0 \xi_1 = \sqrt{\frac{(1+n) \rho_c^{\frac{1-n}{n}} K}{4\pi G}} \xi_1. \quad (24)$$

Já a massa da estrela é dada por

$$M(r) = \int_0^R 4\pi r'^2 \rho(r') dr' = 4\pi r_0^3 \rho_c \int_0^{\xi_1} \xi'^2 \theta^n d\xi'. \quad (25)$$

$$= -4\pi r_0^3 \rho_c \left[\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right]_{\xi=\xi_1} \quad (26)$$

O limite de Chandrasekhar

Encontramos assim uma relação Massa x Raio

$$M \propto R^{\frac{3-n}{1-n}}. \quad (27)$$

Para um gás degenerado não relativístico, $\Gamma = 5/3 \Rightarrow n = 1.5$

$$M \propto \frac{1}{R^3} \quad (28)$$

Já para o caso relativístico $\Gamma = 4/3 \Rightarrow n = 3$

Massa de Chandrasekhar

A massa não depende mais do raio e nem da densidade central, assumindo um valor limite

$$M_{CH} \approx 1.46 M_{\odot}. \quad (29)$$

Diagrama Massa x Raio

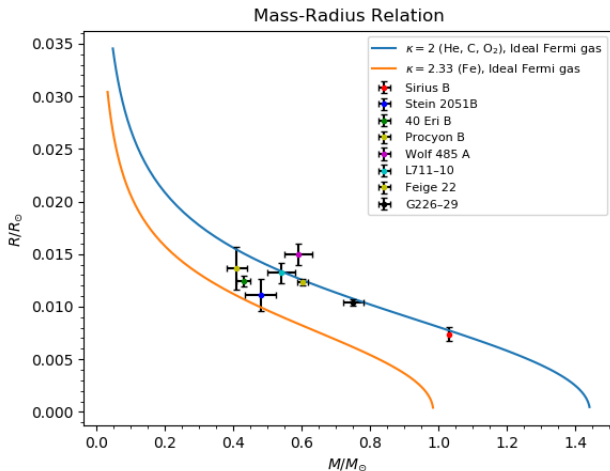


Figura 13: Cada modelo da estrutura interna gera um diagrama distinto.
Fonte: Marko Shuntov, M1/S2 Project Report.

Resfriamento das Anãs Brancas

Ideia básica:

$$L(t) = -\frac{dE(t)}{dt} \quad (30)$$

- A energia tem origem térmica.

O tempo de resfriamento obedece uma lei de potência (Mestel)

$$t_{\text{resfr}} = L^{-\frac{5}{7}} \approx 10^9 \text{ anos} \quad (31)$$

A cristalização pode ser entendida pelo parâmetro de Coulomb

$$\Gamma_C = \frac{\epsilon_C}{\epsilon_{CIN}} = \frac{Z^2 e^2}{d K_B T} \quad d \approx \left(\frac{4\pi n}{3} \right)^{-1/3}, \quad (32)$$

Quando $\Gamma_C \gg 1$ a matéria cristaliza.

Anãs Brancas em M4

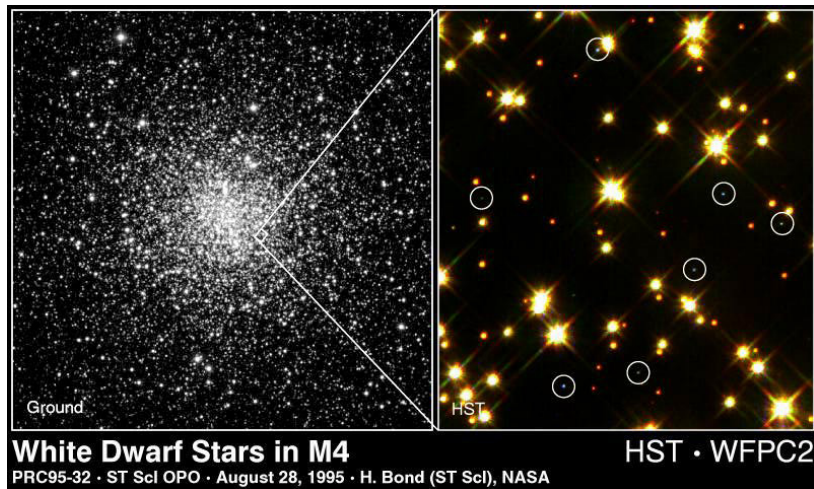


Figura 14: Anãs Brancas identificadas pelo Hubble no aglomerado mais próximo da terra, localizado a 7.000 anos-luz. Elas permitem uma estimativa da idade do aglomerado. Créditos: Harvey Richer, M. Bolte and NASA/ESA

Classificação das Anãs Brancas

Do ponto de vista espectral, as Anãs Brancas mais comuns são

- DA com atmosfera rica em hidrogênio
- DB com atmosfera rica em Hélio

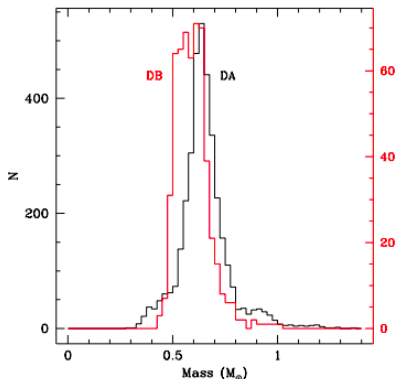


Figura 15: A distribuição de massas das anãs brancas mais comuns mostra um pico por volta de $M = 0.6M_{\odot}$. Fonte: S. O. Kepler et al. 2016

O Interior de uma Anã Branca

Já a composição interior da maioria das Anãs Brancas é basicamente Carbono e Oxigênio.

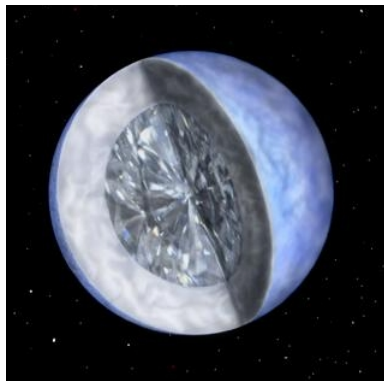


Figura 16: Estrela de diamante Lucy. Créditos: Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics / Travis Metcalfe, Ruth Bazinet

Estrelas de Nêutrons

Propriedades Básicas das Estrelas de Nêutrons

- Massa: $M \sim 1 - 3M_{\odot}$
- Raio: $R \sim 9 - 15\text{Km}$
- Densidade Média: $\bar{\rho} \sim 7 \times 10^{11}\text{Kg}/\text{m}^3 \sim (2 - 3)\rho_0$
- Gravidade Superficial: $g \sim GM/R^2 \sim 10^{12}\text{m}/\text{s}^2$

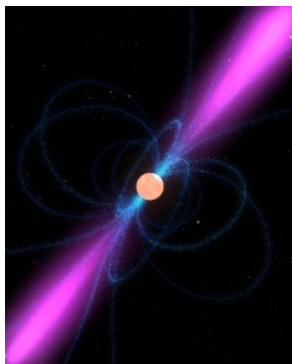


Figura 17: Credit: ESA/NASA/Felix Mirabel

História das Estrelas de Nêutrons

- Em 1931, Lev Landau, então com 23 anos, escreve um artigo sobre estrelas densas onde especula sobre a possibilidade de estrelas tão massivas quanto núcleos atômicos.
- No início de 1932, J. Chadwick publica um artigo na *Nature* com a descoberta dos nêutrons.
- W. Baade e F. Zwicky fazem a previsão teórica correta, em 1934, de que Estrelas de Nêutrons se formam em explosões de Supernovas.

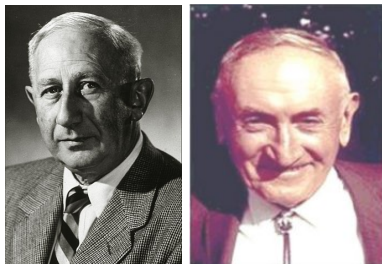


Figura 18: Walter Baade e Fritz Zwicky.

História das Estrelas de Nêutrons

- Em 1939, J. R. Oppenheimer, G. M. Volkov e R. C. Tolman derivam a equação de equilíbrio hidrostático no contexto da Relatividade Geral. Equação que é fundamental para o entendimento das Estrelas de Nêutrons. Com um modelo de nêutrons não interagentes eles encontram uma massa máxima $M_{max} \sim 0.7M_{\odot}$.
- Após a Segunda Guerra começam estudos mais detalhados da equação de estado para a matéria nuclear, com Wheeler, Harrison, Cameron e Zeldovich.
- Nos anos 60, as esperanças de se detectar a primeira Estrela de Nêutrons aumentaram com a astronomia de raios-X, assim como a possibilidade das emissões térmicas e de neutrinos desses objetos.

História das Estrelas de Nêutrons

- Em 6 de Agosto de 1967, Jocelyn Bell, uma estudante supervisionada por Antony Hewish, descobre uma tênue fonte de rádio com um período extremamente estável de 1.3373012 s



Figura 19: Jocelyn Bell e a felicidade da descoberta dos pulsares, com o radiotelescópio ao fundo. Créditos: SSPL/NMeM/Daily Herald Archive.

- Em trabalhos posteriores, principalmente de F. Pacini e T. Gold, se consolida a ideia de que esses pulsos são provenientes de uma Estrela de Nêutrons magnetizada com rotação.

Pulsar do Caranguejejo



Figura 20: Pulsar do Caranguejo energizando os restos da supernova em seu entorno, fenômeno conhecido como *Plerion*. Créditos: NASA and ESA.

História das Estrelas de Nêutrons

- Em 1974, Russel Hulse e Joseph Taylor descobriram um pulsar usando o radiotelescópio de Arecibo. O pulsar tinha um período de 59ms com uma variação periódica de 8 horas. Logo eles perceberam que o pulsar compartilhava a órbita com outra estrela de nêutrons.



Figura 21: Hulse e Taylor na época em que ganharam o Prêmio Nobel pela descoberta. Créditos: University of Frankfurt.

História das Estrelas de Nêutrons

- Em 2017, a colaboração LIGO anunciou a primeira detecção de ondas gravitacionais provenientes da coalescência de duas estrelas de nêutrons. O evento também foi visto por instrumentos óticos.

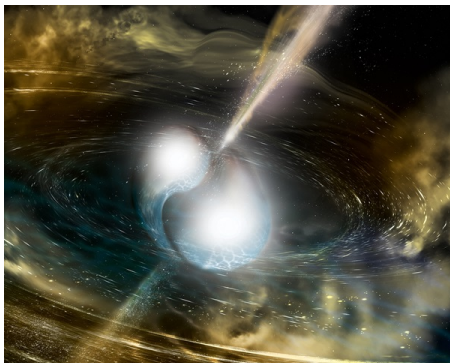


Figura 22: Colisão de gigantes. Créditos: National Science Foundation/LIGO/Sonoma State University/A. Simonnet.

O interior de uma Estrela de Nêutrons

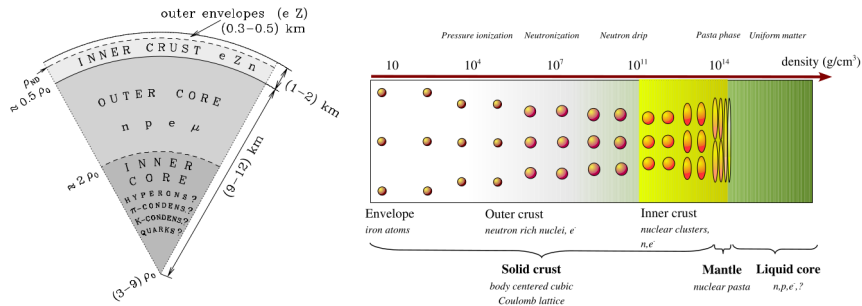


Figura 23: Fonte: Neutron Stars 1: Equation of state. P. Haensel, A.Y. Potekhin, and D.G. Yakovlev/Physics of Neutron Star Crusts (Living Reviews in Relativity). Nicolas Chamel and Pawel Haensel

- $10^7 \leq \rho \leq 10^{11} \text{ g/cm}^3$

Em densidades superiores às encontradas em Anãs Brancas, começa a acontecer o decaimento beta inverso



e a matéria se torna rica em nêutrons.

- $10^{11} \leq \rho \leq 5 \times 10^{12} \text{ g/cm}^3$

Aumentando ainda mais a densidade atingimos o limiar conhecido como "neutron drip". O gás de nêutrons livres passa a dominar a pressão com sua degenerescência.

No núcleo da Estrela de Nêutrons é onde ocorre a física realmente interessante (e desconhecida)

- $\rho \sim \rho_0 = 2.3 \times 10^{17} \text{ Kg/m}^3$

ρ_0 é a densidade de saturação nuclear.

O diagrama de fase da QCD

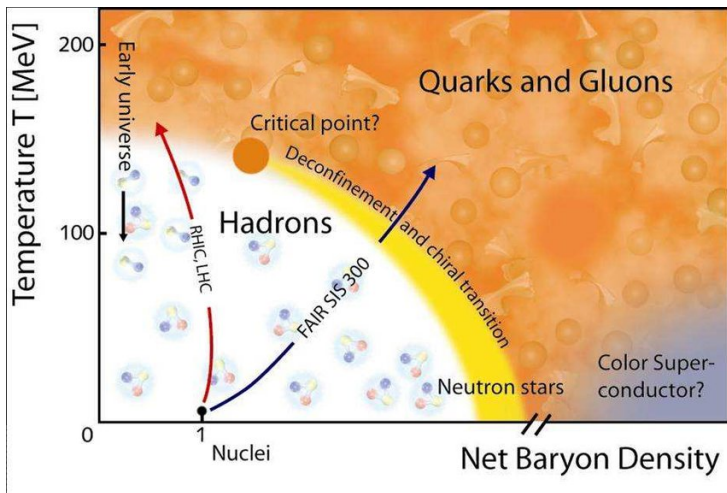
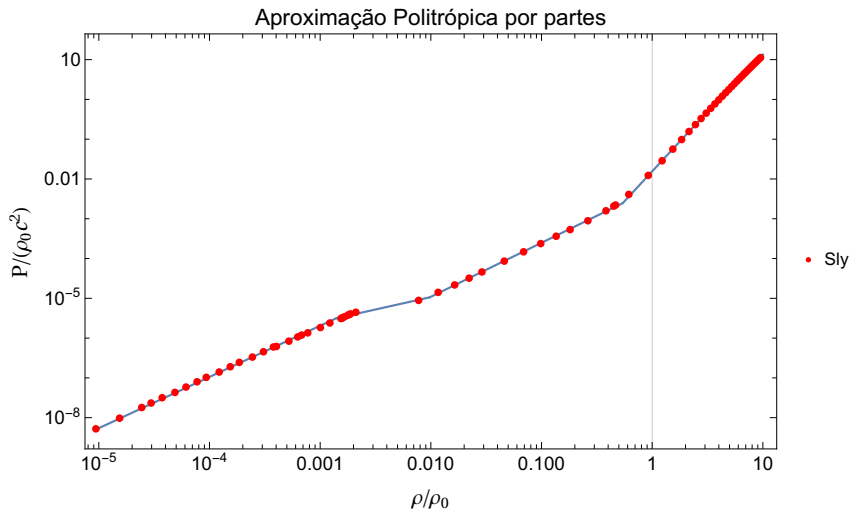


Figura 24: Fonte: Introductory lectures on lattice QCD at nonzero baryon number by Gert Aarts (Gert Aarts 2016 J. Phys.: Conf. Ser. 706 022004).

Equação de Estado

Uma forma de implementar uma equação de estado complexa é considerar uma aproximação politrópica por partes



A Estrutura de uma Estrela de Nêutrons

Estrela Relativística na área!

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM\rho}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dP}{dr} = -G \frac{(M + 4\pi r^3 P/c^2)(\rho + (\epsilon + P)/c^2)}{r^2(1 - 2GM/rc^2)}$$

Equilíbrio Newtoniano

Equilíbrio Relativístico (TOV)

- $\rho(r) \rightarrow \rho(r) + [\epsilon(r) + P(r)]/c^2$ onde $\epsilon(r)$ é a densidade de energia interna.
- $M(r) \rightarrow M(r) + 4\pi r^3 P(r)/c^2$ que pode ser entendida como a massa gravitacional ativa.
- $r^2 \rightarrow r^2(1 - 2Gm/rc^2)$, relacionado com a geometria curva.

O Teorema de Buchdahl

Supondo uma densidade constante ρ_* , podemos integrar a equação para a pressão

$$P(r) = \rho_* \frac{R\sqrt{R-2GM} - \sqrt{R^3-2GMr^2}}{\sqrt{R^3-2GMr^2} - 3R\sqrt{R-2GM}}, \quad (34)$$

A pressão central precisa ser infinita se

$$M_{MAX} = \frac{4R}{9G} \quad (C = 0.44) \quad (35)$$

O Diagrama Massa x Raio

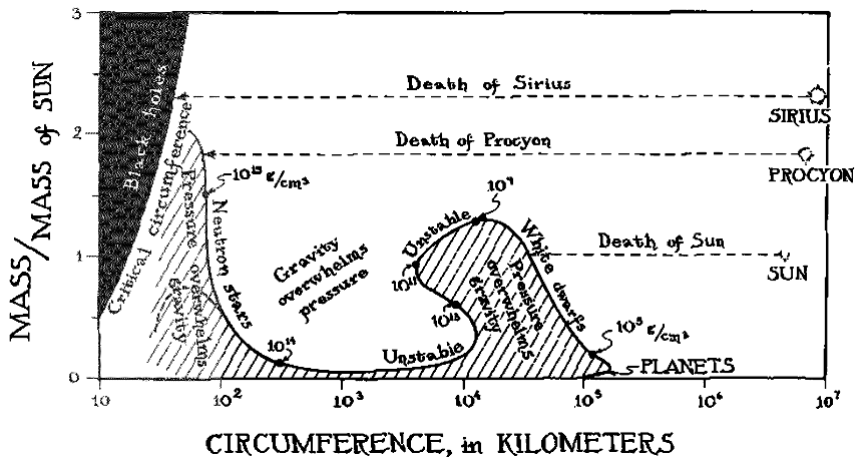


Figura 25: Fonte: Kip Thorne, "Black Holes and Time Warps"

O Diagrama Massa x Raio

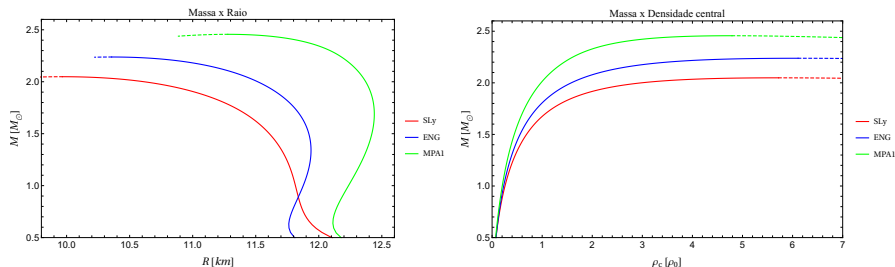


Figura 26: Estrutura da estrela. As soluções instáveis estão marcadas na parte pontilhada do gráfico.

O Diagrama Massa x Raio - Gravidade Modificada??

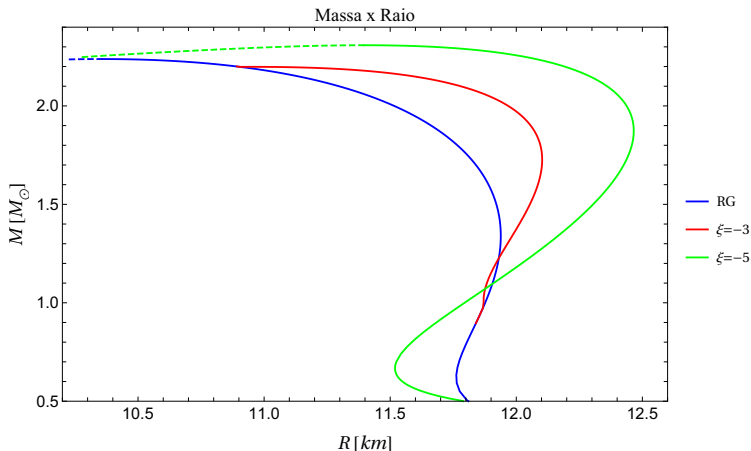


Figura 27: Teorias alternativas mudam a estrutura da estrela.

O Diagrama Massa x Raio

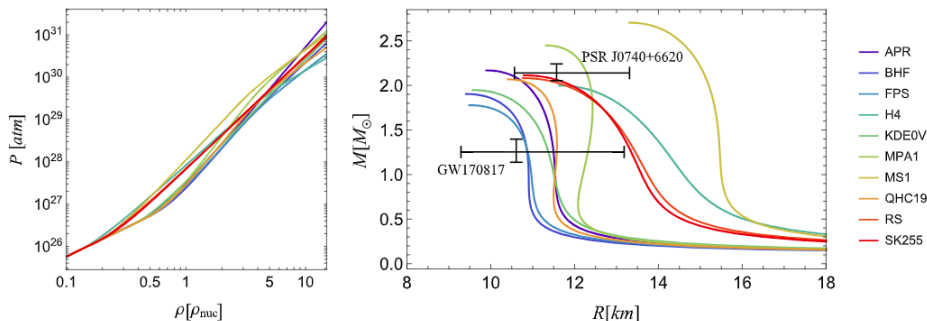


Figura 28: O diagrama massa x raio para vários modelos de equação de estado com dois vínculos observacionais. Fonte: Raissa F. P. Mendes, Estrelas de nêutrons e seus múltiplos mensageiros, Cadernos de Astronomia, Vol. 2, N. 2

Experimentos Importantes

- NICER

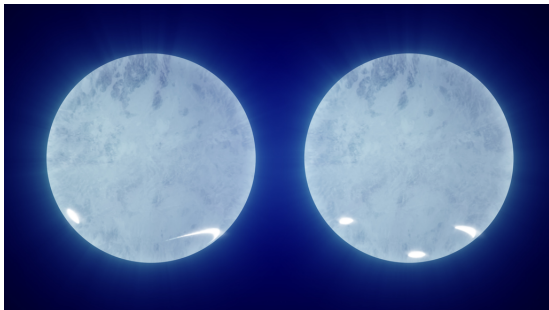
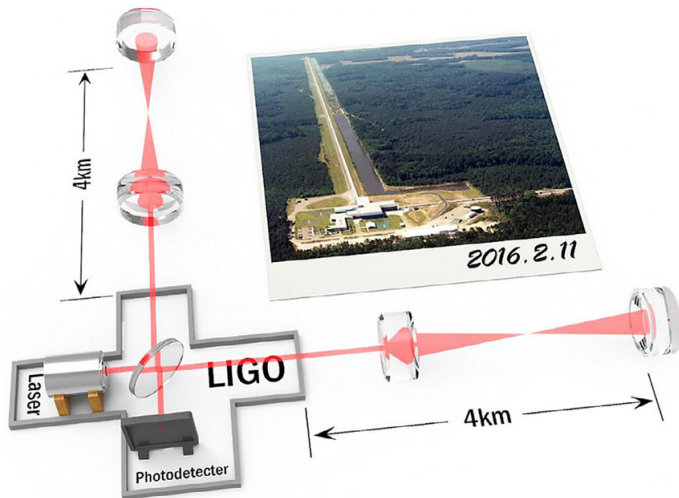


Figura 29: Neutron Star Interior Explorer. Créditos: NASA's Goddard Space Flight Center

Experimentos Importantes

- LIGO-VIRGO-KAGRA



Pulsares em sistemas binários

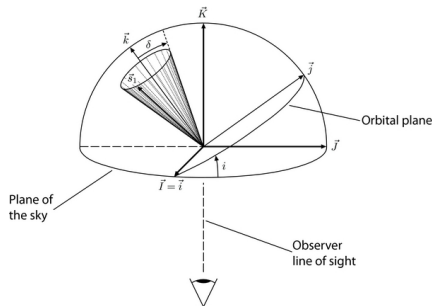


Figura 30: Fonte: R. D. Ferdman et al 2013 ApJ 767 85

Parâmetros Keplerianos:

- Período orbital P_b
- Projeção do semi-eixo maior $x = a \sin i$
- Excentricidade e
- Longitude do periastro ω
- Época de passagem do periastro T_0

No contexto relativístico, introduzimos parâmetros pós-keplerianos para caracterizar a órbita

- Atraso de Einstein γ
- Variação do Período Orbital $\dot{P}_b$
- Avanço do Periastro $\dot{\omega}$
- Intervalo e Forma do atraso de shapiro r e s .

A Massa dos Pulsares

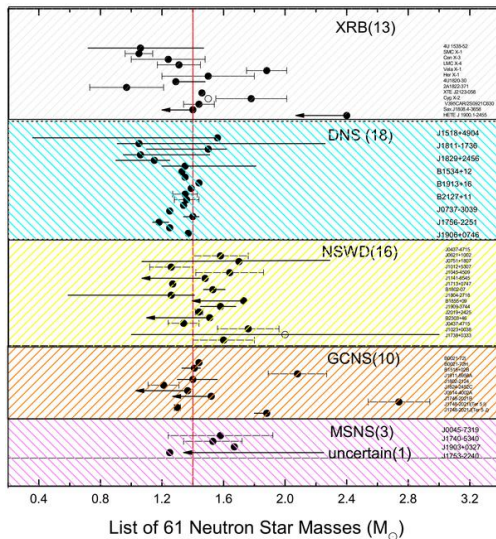


Figura 31: Fonte: AA 527, A83 (2011)

Testando a relatividade com Pulsares

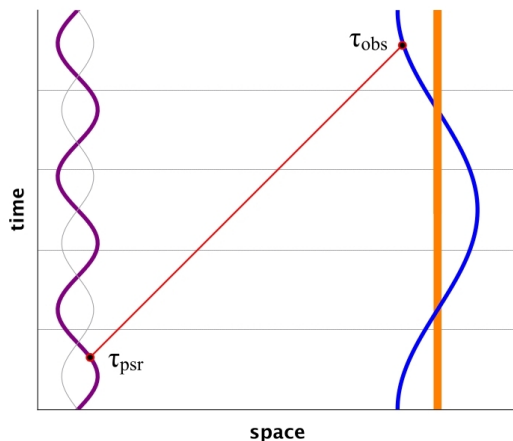


Figura 32: A ideia da cronometragem de pulsares é conectar o tempo observado com o tempo no referencial do Pulsar. Fonte: Norbert Wex, Testing Relativistic Gravity with Radio Pulsars. arXiv:1402.5594

Testando a relatividade com Pulsares

A Relatividade Geral tem previsões precisas para esses parâmetros.

$$\dot{P}_b^{RG} = -\frac{192\pi}{5} \frac{m_p m_c}{M^2} \frac{1 + 73e^2/24 + 37e^4/96}{(1 - e^2)^{7/2}} V_b^5, \quad (36)$$

$$\dot{\omega}^{RG} = \frac{3n_b V_b^2}{1 - e^2}, \quad (37)$$

$$\gamma^{RG} = \frac{e}{n_b} \left(1 + \frac{m_c}{M}\right) \frac{m_c V_b^2}{M}, \quad (38)$$

$$r^{RG} = Gm_c, \quad (39)$$

$$s^{RG} = xn_b \frac{M}{m_c V_b}, \quad (40)$$

onde $M = m_p + m_c$, $n_b = 2\pi/P_b$ e $V_b = (GMn_b)^{1/3}$.

Testando a Relatividade com Pulsares

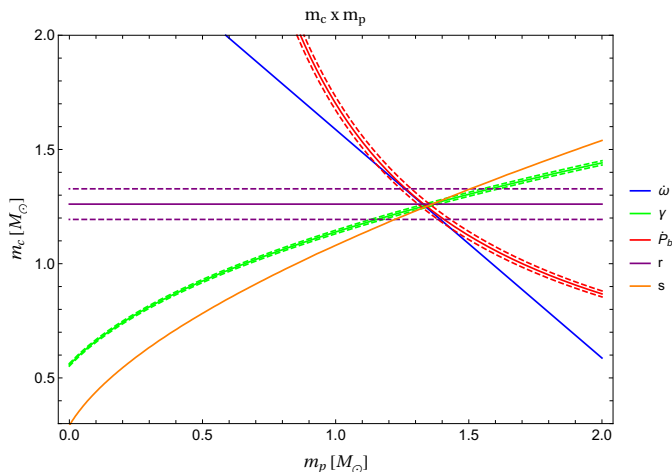


Figura 33: Parâmetros pós keplerianos medidos para o pulsar duplo. É possível obter as massas $m_p = 1.3381 \pm 0.0007 M_\odot$ e $m_c = 1.2489 \pm 0.0007 M_\odot$.

Testando a Relatividade com Pulsares

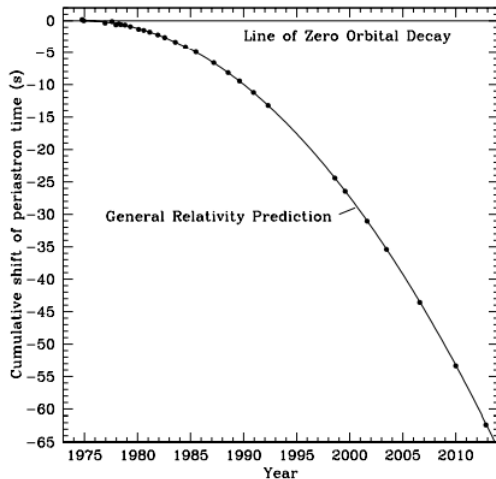


Figura 34: Decaimento do período observado ao longo dos anos para o pulsar Hulse-Taylor. A concordância com a Relatividade Geral é espetacular.
Fonte: J. M. Weisberg and Y. Huang 2016 ApJ 829 55

Exoplaneta de Pulsar

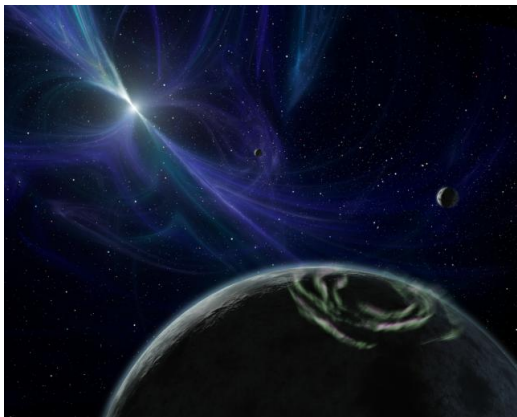


Figura 35: Planetas descobertos em 1992, por meio da cronometragem de pulsares, orbitando o pulsar PSR B1257+12. Créditos: NASA/JPL-Caltech

O Evento GW190814 - $2.6M_{\odot}$??

GW190814 Factsheet

Lowest mass ratio event to date
Strongest evidence of higher order modes

Observed by: LIGO Hanford,
LIGO Livingston and
Virgo detectors

Source type: BH and compact
object

Date: August 14th 2019

Time of merger: 21:10:39 UTC

Network SNR: 25

Distance: 196 – 282 Mpc

Redshift: 0.05

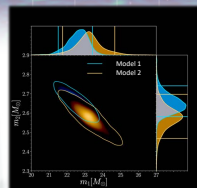
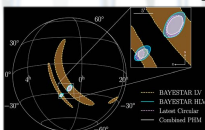
Chirp Mass: $6.1 M_{\odot}$

Primary Mass: $23.2 M_{\odot}$

Secondary Mass: $2.6 M_{\odot}$

Mass ratio: 0.11

Final Mass: $25.6 M_{\odot}$



Spin Perpendicular to
Orbital Plane: 0.0

Spin Parallel to
Orbital Plane: 0.0

Spin of Final BH: 0.28

SNR in Octupole Mode: 5.2 – 7.9

GW cycles (above 20Hz) 300 cycles

Sky Area: 18 deg²

Merger Rate: 1 – 23 Gpc⁻³
yr⁻¹

Initial Public Alert 20 min

Delay:

R. Ewing^{*}, R. Huxford^{*}, D. Singh^{*}
^{*}The Pennsylvania State University

Buracos Negros

História dos Buracos Negros

- Em 1783, John Mitchell combinando a gravitação Newtoniana com a teoria corpuscular da luz, especula sobre a possibilidade de estrelas negras, onde a luz não consegue escapar do campo gravitacional

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{R} \Rightarrow R = \frac{2GM}{c^2} \quad \left(R_S = \frac{2GM_{\odot}}{c^2} = 2.97 \text{ Km} \right)$$

Trajectories of light corpuscles

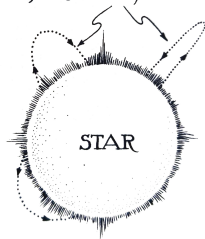


Figura 36: Estrelas Negras de John Mitchell, em que a luz não consegue escapar. Fonte: Kip Thorne, Black Holes and time warps.

História dos Buracos Negros

- Em 1915, Einstein publica o resultado de 10 anos de trabalho tentando conciliar as ideias da Relatividade Restrita com um teoria gravitacional. O artigo com as equações de campo sai em 25 de Novembro de 1915.
- Logo depois, Karl Schwarzschild, nas trincheiras da Grande Guerra, resolve exatamente as equações de Einstein para um objeto esférico.



Figura 37: Karl Schwarzschild. Créditos: Emilio Segrè Visual Archives

História dos Buracos Negros

- Depois de uma longa dormência, as pesquisas em Relatividade Geral e Gravitação voltam a tona na década de 50 e 60.
- Em 1963, Roy Kerr encontra a solução que descreve o campo de um objeto com rotação.
- Em 1964, John Wheeler usa o termo "Black Hole" para descrever as estrelas negras de John Mitchell.
- Na década de 70 Stephen Hawking estuda a natureza quântica dos Buracos Negros.
- A fonte de raios-X Cygnus X-1 é descoberta: O primeiro candidato a Buraco Negro Astrofísico.

Cygnus X-1

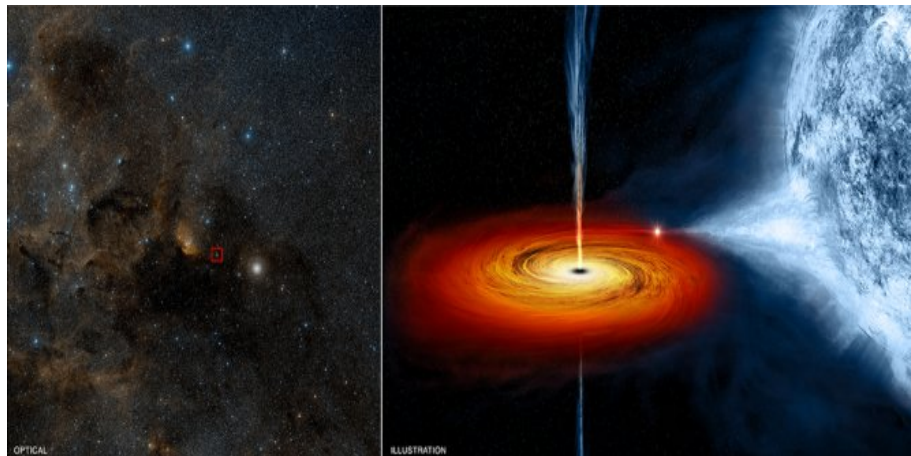


Figura 38: Cygnus X-1, o buraco negro mais próximo da Terra, localizado a 7.200 anos luz. Novos resultados indicam que sua massa é da ordem de $21M_{\odot}$ (Science, 05 Mar 2021: Vol. 371, Issue 6533, pp. 1046-1049).

Créditos: X-ray: NASA/CXC; Optical: Digitized Sky Survey

História dos Buracos Negros

- Em 2015, um século depois da publicação de Einstein, a humanidade deixa de ser surda para o Cosmos. A colaboração LIGO detecta ondas gravitacionais da coalescência de dois Buracos Negros.



Figura 39: Créditos: SXS (Simulating eXtreme Spacetimes) Project

- Prêmio Nobel de 2020 para pesquisas relacionadas com Buracos Negros.

A solução de Schwarzschild

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2).$$

- Assintoticamente plana

$$r \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

- Temos singularidades para $r = 0$ e $r = 2GM$

OBS: Pelo teorema No-Hair, os buracos negros são descritos somente pela Massa (M), Carga (Q) e Momento Angular J .

Geodésicas na geometria de Schwarzschild

Para entendermos o movimento no espaço-tempo do buraco negro, consideramos a Lagrangiana de uma partícula que possui somente o termo cinético

$$\epsilon = -g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}, \quad (41)$$

onde

- $\epsilon = 1$ para partículas massivas
- $\epsilon = 0$ para partículas sem massa

Assim,

$$-\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 = -\epsilon,$$

Por sorte, na física, onde existem simetrias existem leis de conservação !

- Simetria temporal $\Rightarrow$ Conservação da Energia

$$E = -K_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda} = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \frac{dt}{d\lambda}. \quad (42)$$

- Simetria de rotação $\Rightarrow$ Conservação do Momento Angular

$$L = R_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda} = r^2 \frac{d\varphi}{d\lambda}. \quad (43)$$

Logo, simplificando...

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + V(r) = \mathcal{E} \quad (44)$$

onde temos o potencial efetivo

$$V(r) = \frac{1}{2}\epsilon - \epsilon \frac{GM}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GML^2}{r^3}, \quad \mathcal{E} = \frac{1}{2}E^2. \quad (45)$$

Problema de mecânica básica de uma partícula em uma dimensão sujeita a um potencial !

Precisamos achar os máximos e mínimos do potencial...

Geodésicas na geometria de Schwarzschild

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dr} &= \epsilon \frac{GM}{r^2} - 2 \frac{L^2}{2r^3} + 3 \frac{GML^2}{r^4} = 0 \\ \epsilon GM r_c^2 - L^2 r_c + 3GML^2 &= 0\end{aligned}$$

- Para partículas sem massa $\epsilon = 0$

$$r_c = 3GM \quad \text{Órbita Instável}$$

- Para partículas massivas $\epsilon = 1$

$$r_c = \frac{L^2 \pm \sqrt{L^4 - 12G^2 M^2 L^2}}{2GM}$$

No limite $L \rightarrow \infty$, pela aproximação binomial

$$r_c = \frac{L^2 \pm L^2(1 - 6G^2 M^2 / L^2)}{2GM} = \left(\frac{L^2}{GM}, 3GM \right)$$

Quando L decresce esses dois valores vão se aproximando até que eles coincidem em $L = \sqrt{12GM}$, correspondendo ao raio

$$r_c = 6GM$$

Geodésicas na geometria de Schwarzschild

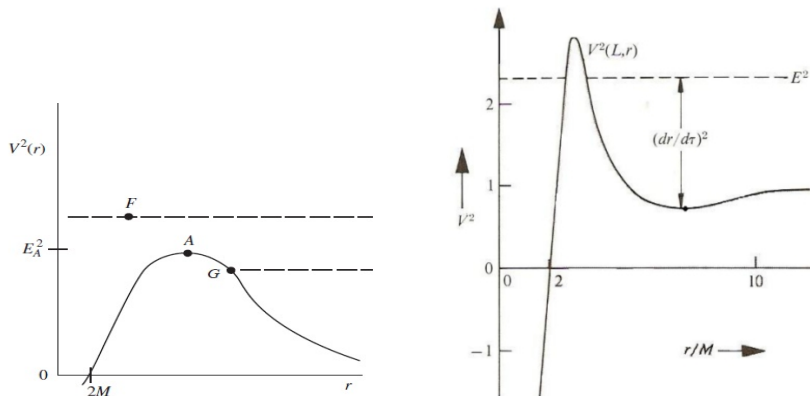


Figura 40: Na esquerda o potencial efetivo para os fótons. Na direita para partículas massivas. Fontes: Schutz, "A first course in general relativity". MTW, "Gravitation"

Solução das equações de Einstein no vácuo que possuem: simetria axial e estacionária (1963)

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GMr}{\rho^2} \right) dt^2 - \frac{2GMa r \sin^2 \theta}{\rho^2} (dt d\varphi + d\varphi dt) \\ + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} \left[(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta \right] d\varphi^2, \quad (46)$$

onde

$$\Delta(r) = r^2 - 2GMr + a^2, \quad (47)$$

e

$$\rho^2(r, \theta) = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad a = J/M. \quad (48)$$

Sagittarius A e a Estrela S2

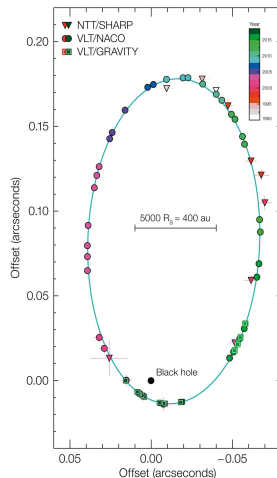
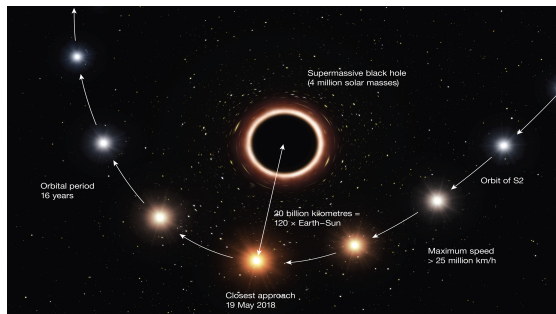


Figura 41: Na esquerda uma impressão artística e na direita a órbita da estrela S2. Créditos: ESO/M. Kornmesser e MPE/GRAVITY Collaboration

Apoio:



Realização:

