

Inverno Astrofísico 2018

# Energia escura e cosmologia observacional

Rodrigo von Marttens



Center for Astrophysics and Cosmology



Observatório  
Nacional

# Sobre o que é o curso...

1. Por que energia escura?
2. Como descrever energia escura?
3. Quais são os desafios e possibilidades da cosmologia observacional?
4. Quais ferramentas devem ser utilizadas para analisar dados observacionais?
5. Tem algum exemplo prático?

# Sobre o que NÃO é o curso!

O que é a energia escura?

# Programa

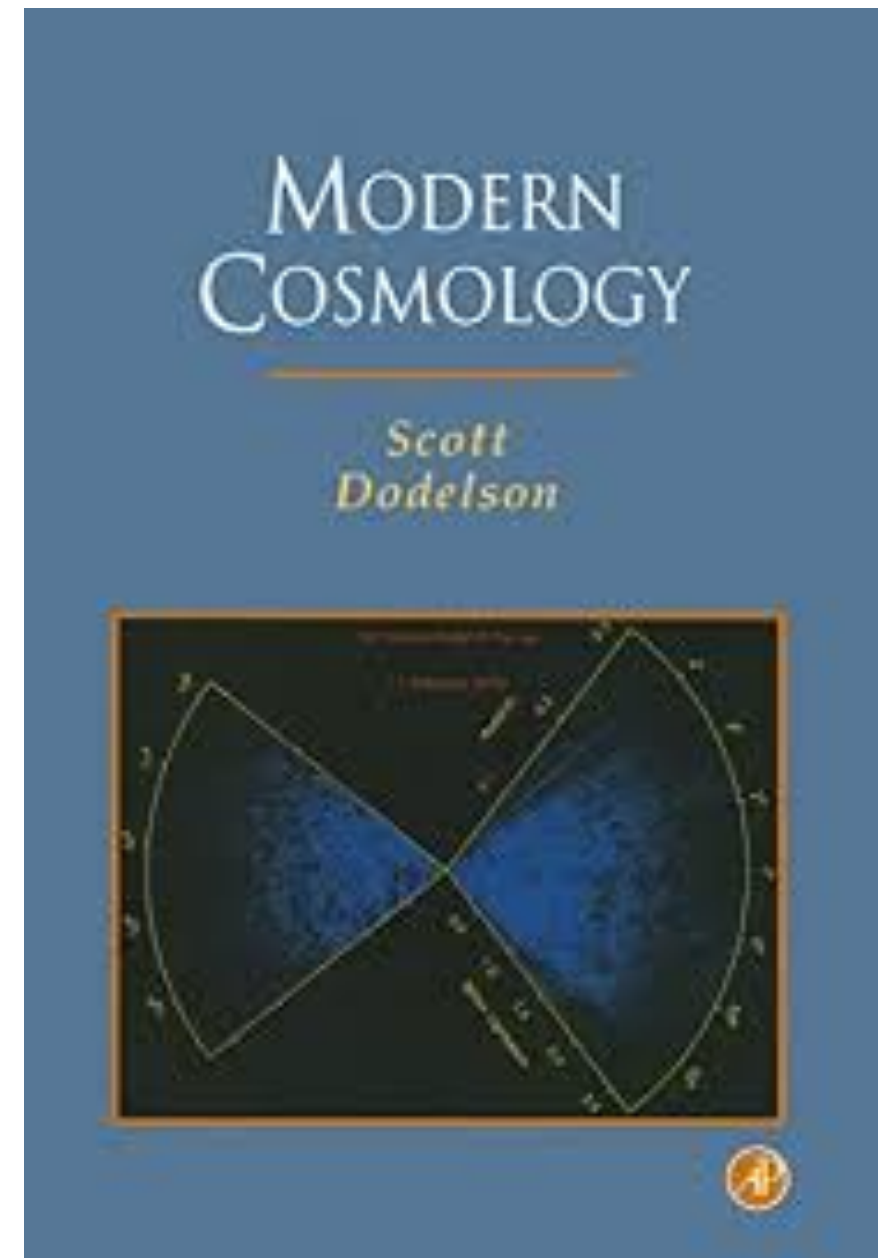
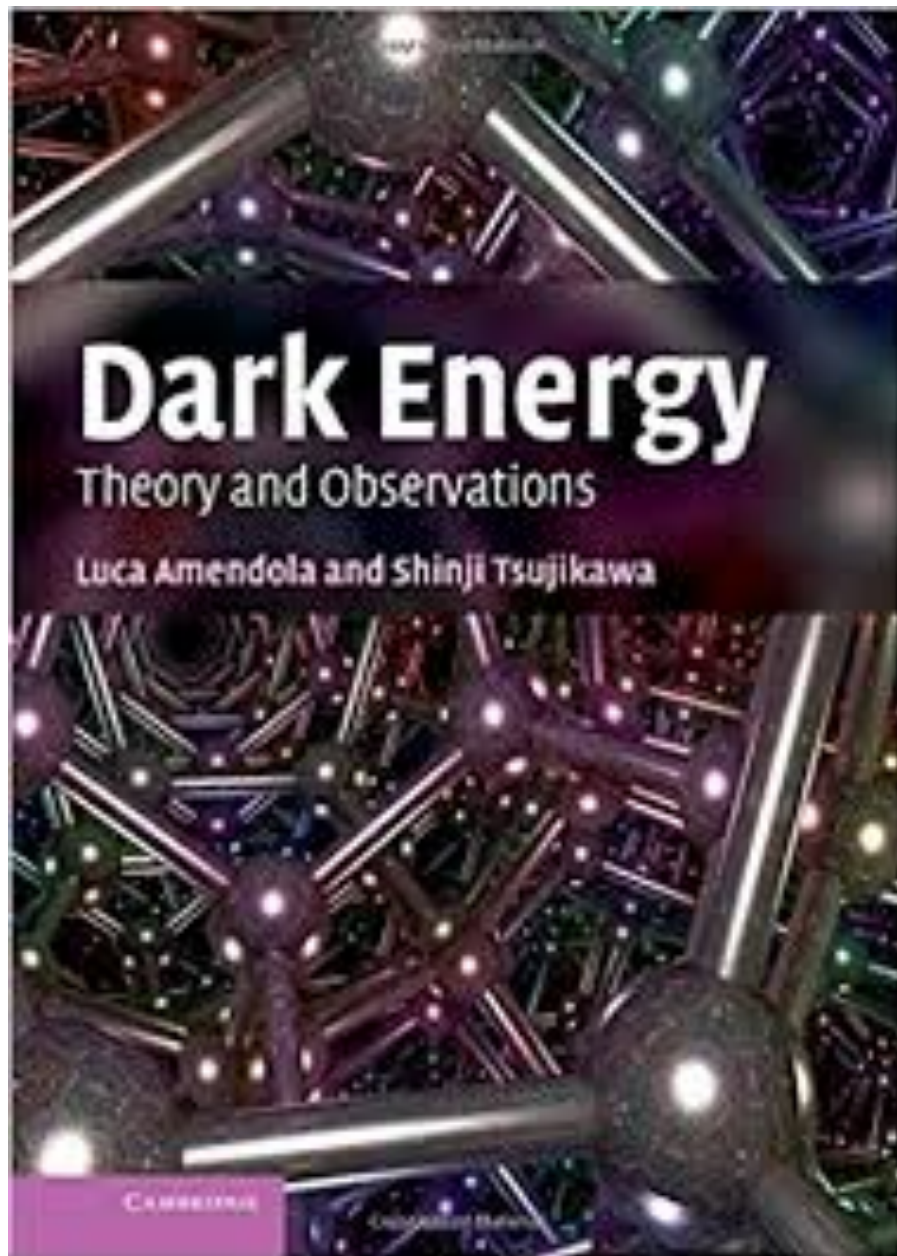
Tópico 1: Introdução e histórico;

Tópico 2: Dinâmica de um Universo em expansão acelerada;

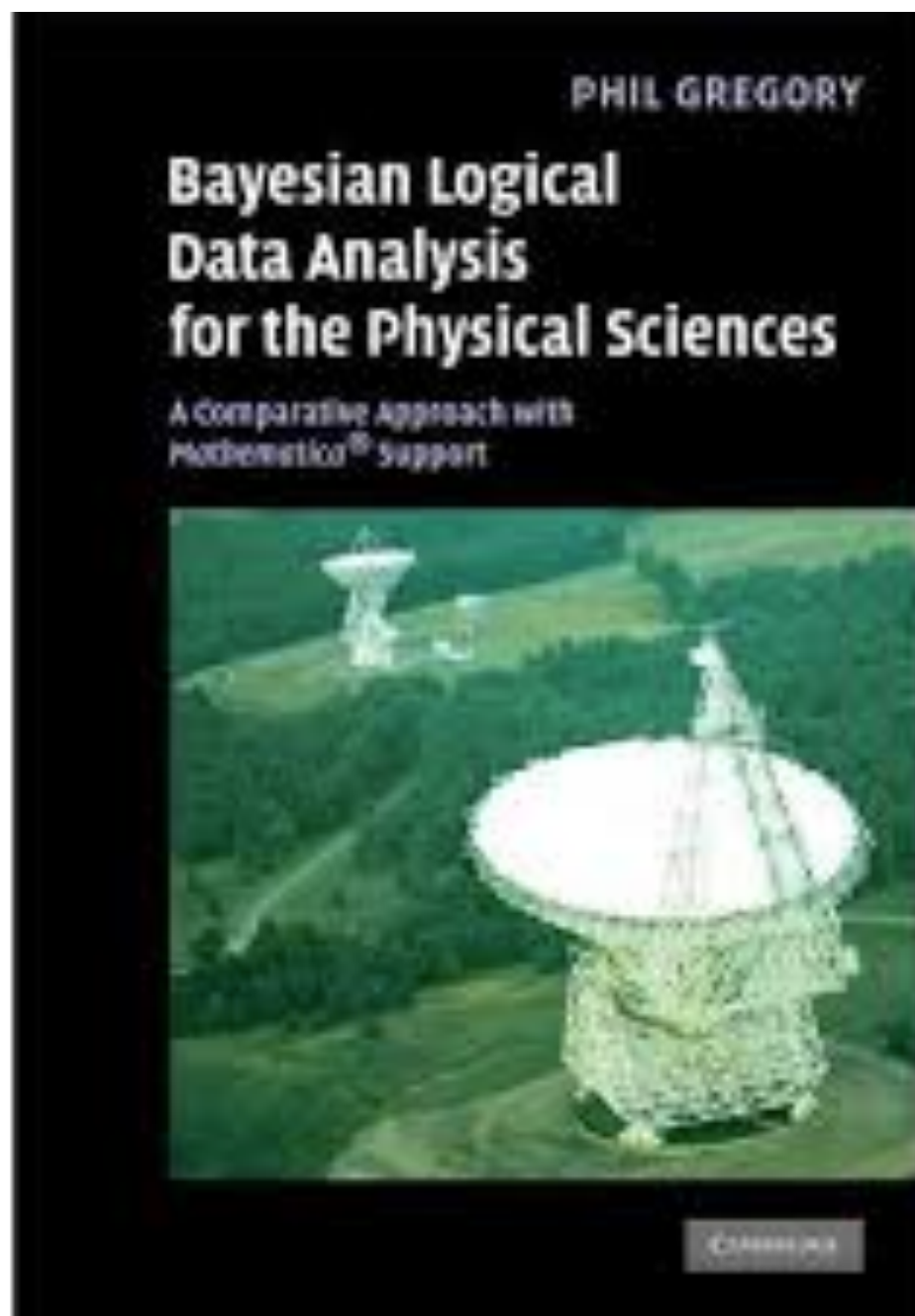
Tópico 3: Inferência Bayesiana;

Tópico 4: Análise de caso concreto -  
estimando parâmetros do modelo cosmológico  
padrão;

# Bibliografia



# Bibliografia



[arXiv.org](#) > [astro-ph](#) > [arXiv:1701.01467](#)

[Astrophysics](#) > [Cosmology and Nongalactic Astrophysics](#)

## **Bayesian Methods in Cosmology**

[Roberto Trotta](#) (Imperial)

*(Submitted on 5 Jan 2017)*

A person is sitting on a dark-colored couch in a room. The wall behind them is a vibrant green, and a bright yellow starburst light fixture is mounted on the wall above the couch. The person is wearing a dark, patterned top and is looking towards the camera. The floor appears to be a light-colored checkered tile. The overall scene is brightly lit, with the green wall and yellow light creating a high-contrast, cheerful atmosphere.

Senta que lá vem história...

# Linha do tempo

1917: Einstein introduz a constante cosmológica na teoria da relatividade para descrever o Universo estático;

1922: Alexander Friedmann descreve matematicamente uma solução das equações de Einstein com expansão;

1927: Georges Lemaître obtém resultados similares aos de Alexander Friedmann;

# Linha do tempo



**Alexsander Friedmann**  
1888 - 1925

**Georges Lemaître**  
1894 - 1966



A matemática  
está correta, mas a  
física é abominável!



**Albert Einstein**  
1879 - 1955

# Dica de leitura!



**Pedro G. Ferreira**  
**Universidade de Oxford**

# Linha do tempo

1924: Edwin Hubble, se utilizando da relação entre período de oscilação e a luminosidade de Cefeídas descoberta por Henrietta Leavitt, mostra que a Via Láctea é apenas uma de muitas galáxias;

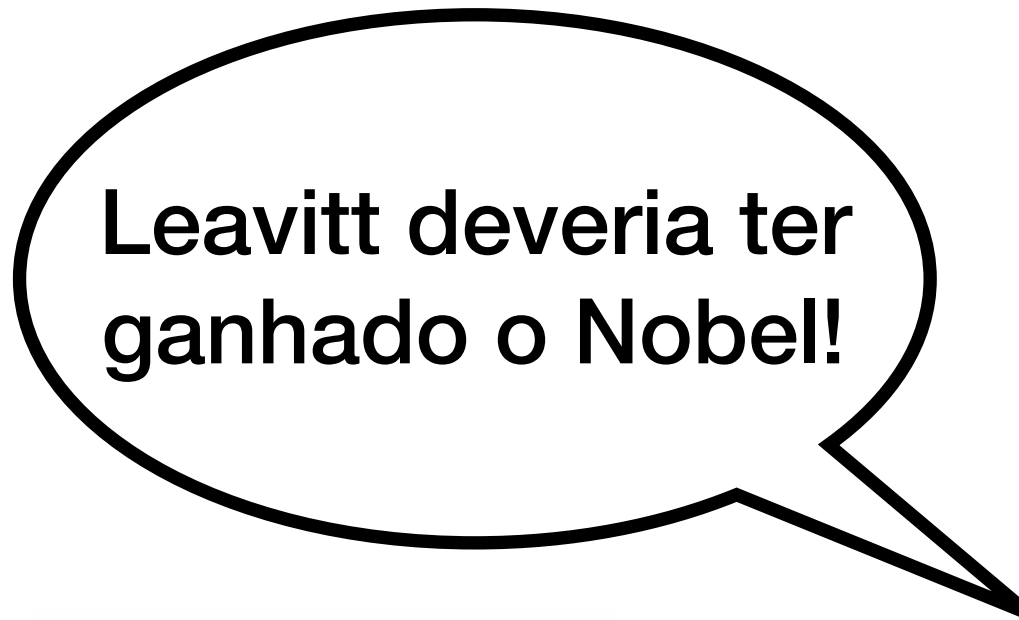
1929: Edwin Hubble publica resultados da lei de Hubble;

1931: Edwin Hubble e Milton Humason estendem a análise para galáxias mais distantes;

# Linha do tempo



**Milton Humason**  
1891 - 1972



**Henrietta Leavitt**  
1868 - 1921



**Edwin Hubble**  
1889 - 1953

# Lei de Hubble

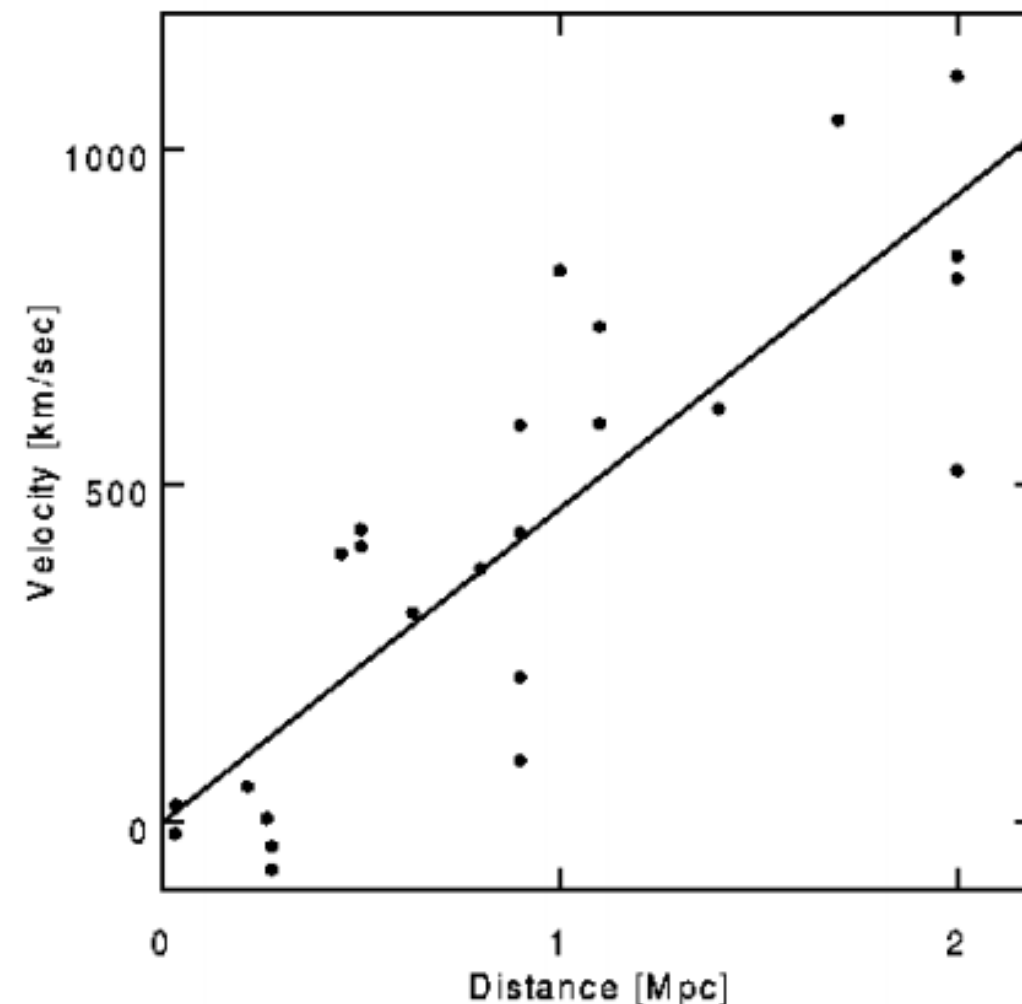
*A RELATION BETWEEN DISTANCE AND RADIAL VELOCITY  
AMONG EXTRA-GALACTIC NEBULAE*

BY EDWIN HUBBLE

MOUNT WILSON OBSERVATORY, CARNEGIE INSTITUTION OF WASHINGTON

Communicated January 17, 1929

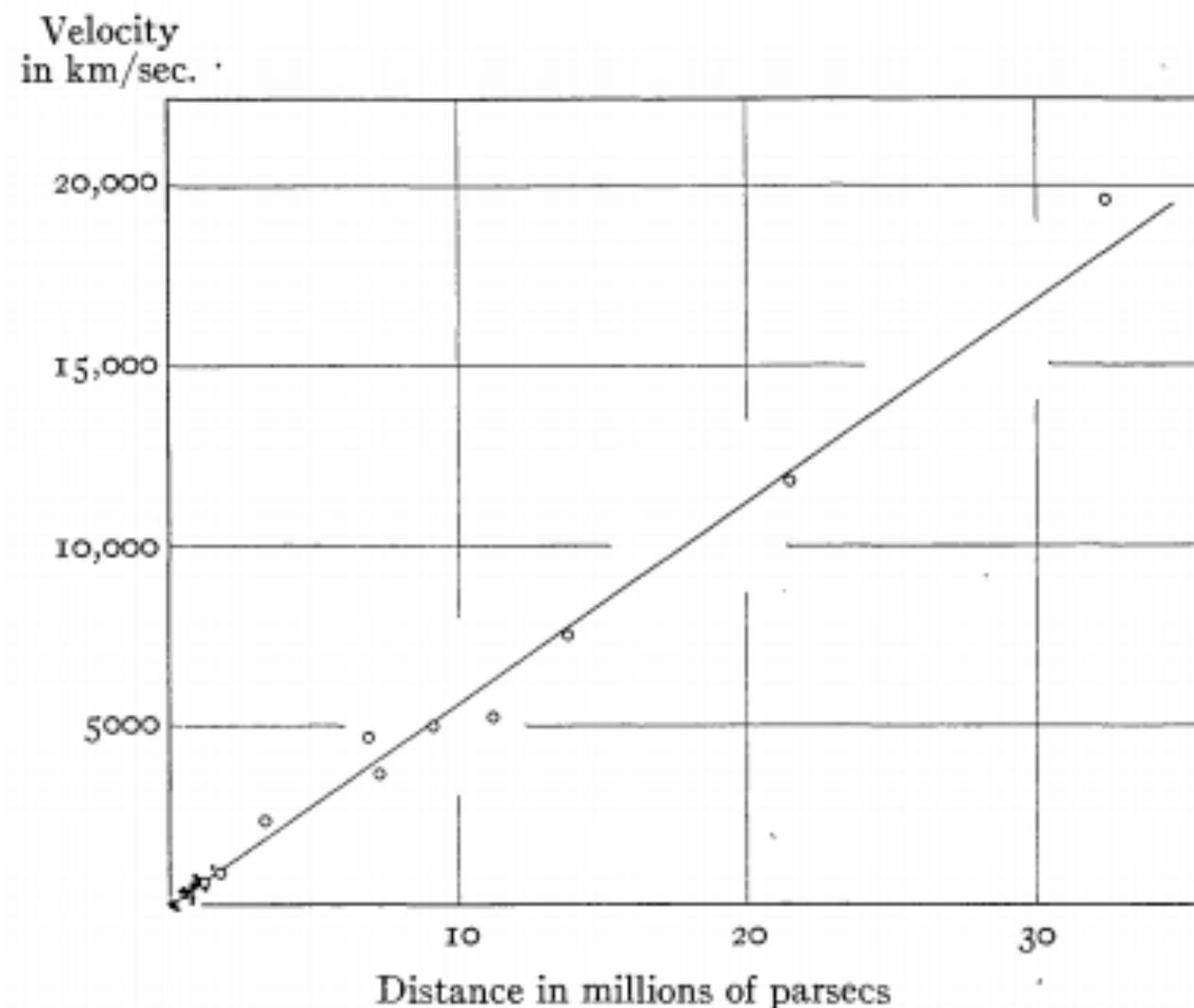
$$v = H_0 \times d$$



# Lei de Hubble

## THE VELOCITY-DISTANCE RELATION AMONG EXTRA-GALACTIC NEBULAE<sup>1</sup>

By EDWIN HUBBLE AND MILTON L. HUMASON



# Linha do tempo

1934: Fritz Zwicky propôs que supernovas eram fenômenos nos quais estrelas massivas se transformavam em estrelas de nêutrons e propôs que esses objetos poderiam ser usados como velas padrão;

1941: Rudolph Minkowski classificou em tipo I e II, baseado na presença de hidrogênio no espectro;

# Linha do tempo



**Rudolf Minkowski**  
1895 - 1976



**Fritz Zwicky**  
1898 - 1974

# Linha do tempo

1984: Luis Alvarez fundou o Berkeley Automatic Supernova Search (BASS);

1988: Saul Perlmutter, membro do BASS, propõe o Supernova Cosmology Project (SCP);

1992: O SCP descobriu uma supernova a uma distância de 4.7 bilhões de anos luz;

1992: SCP teve o artigo rejeitado por Robert Kirshner;

# Linha do tempo



**Luis Alvarez**  
**1911 - 1988**

# Linha do tempo

Eles  
ainda não haviam  
aprendido nada de  
cosmologia!



**Saul Perlmutter**  
1959 -



**Robert Kirshner**  
1949 -

# Linha do tempo

1994: Brian Schmidt cria a colaboração “High-z Supernova Search Team” (HzSST);

1996: O SCP e o HzSST aplicam projetos no telescópio Hubble;

1998: Perlmutter anuncia o resultado na AAS. HzSST publica seu artigo com Adam Riess como primeiro autor;

# Linha do tempo

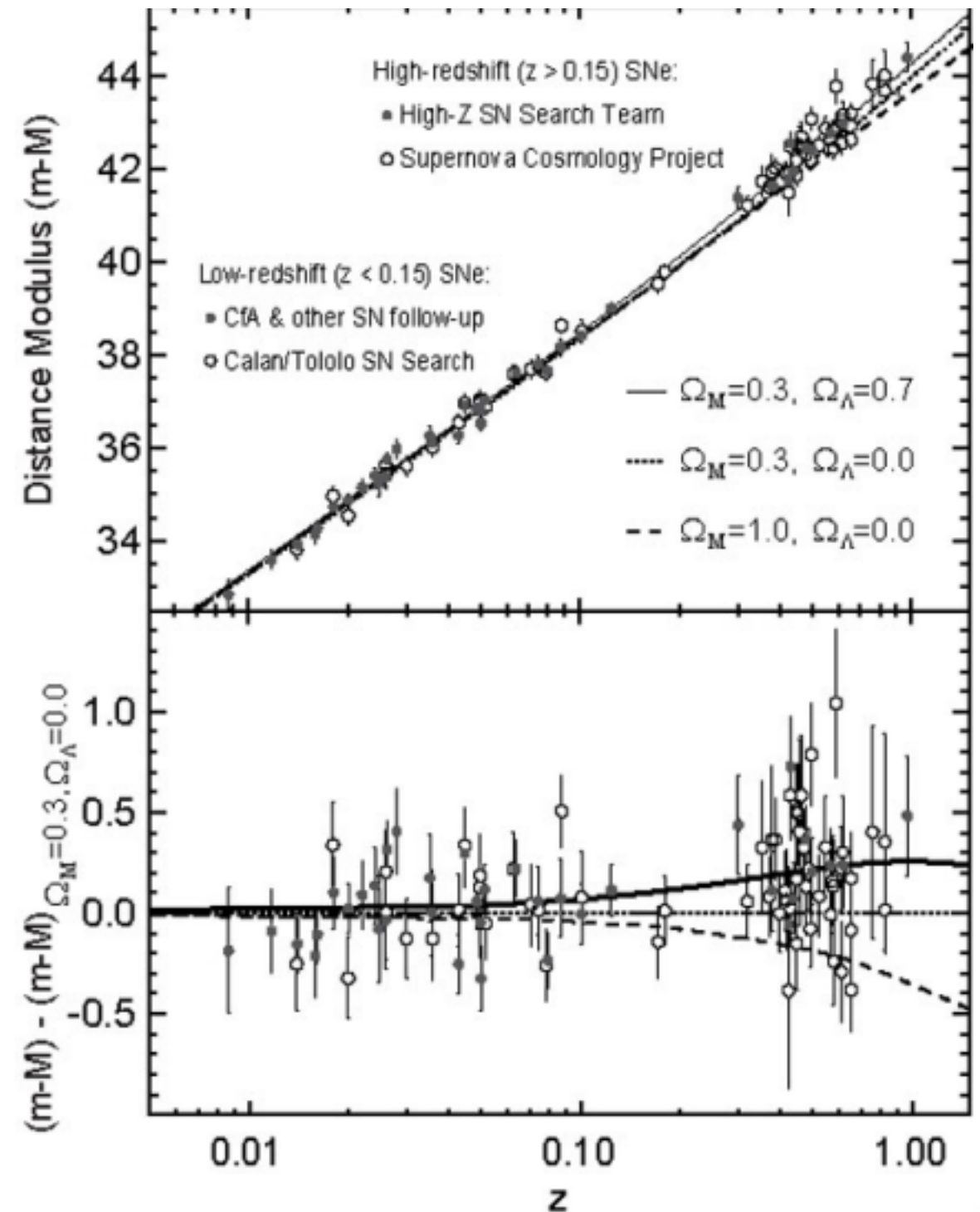
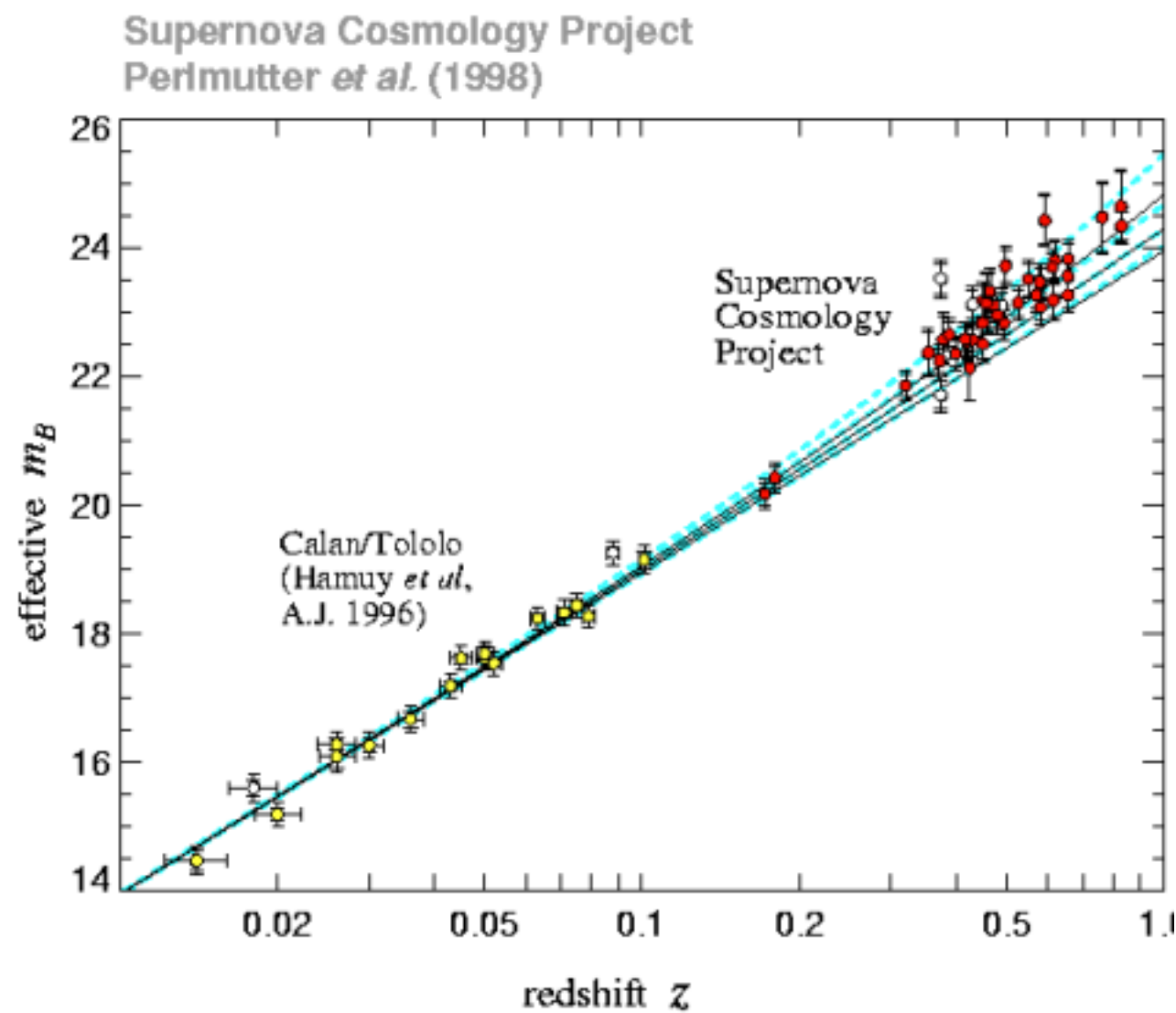


**Brian Schmidt**  
1967 -



**Adam Riess**  
1969 -

# Linha do tempo



# Nobel Prize in Physics 2011



Saul Perlmutter  
Supernova Cosmology Project  
Berkeley, USA



Brian P. Schmidt  
High-z Supernova Search Team  
Weston Creek, Australia



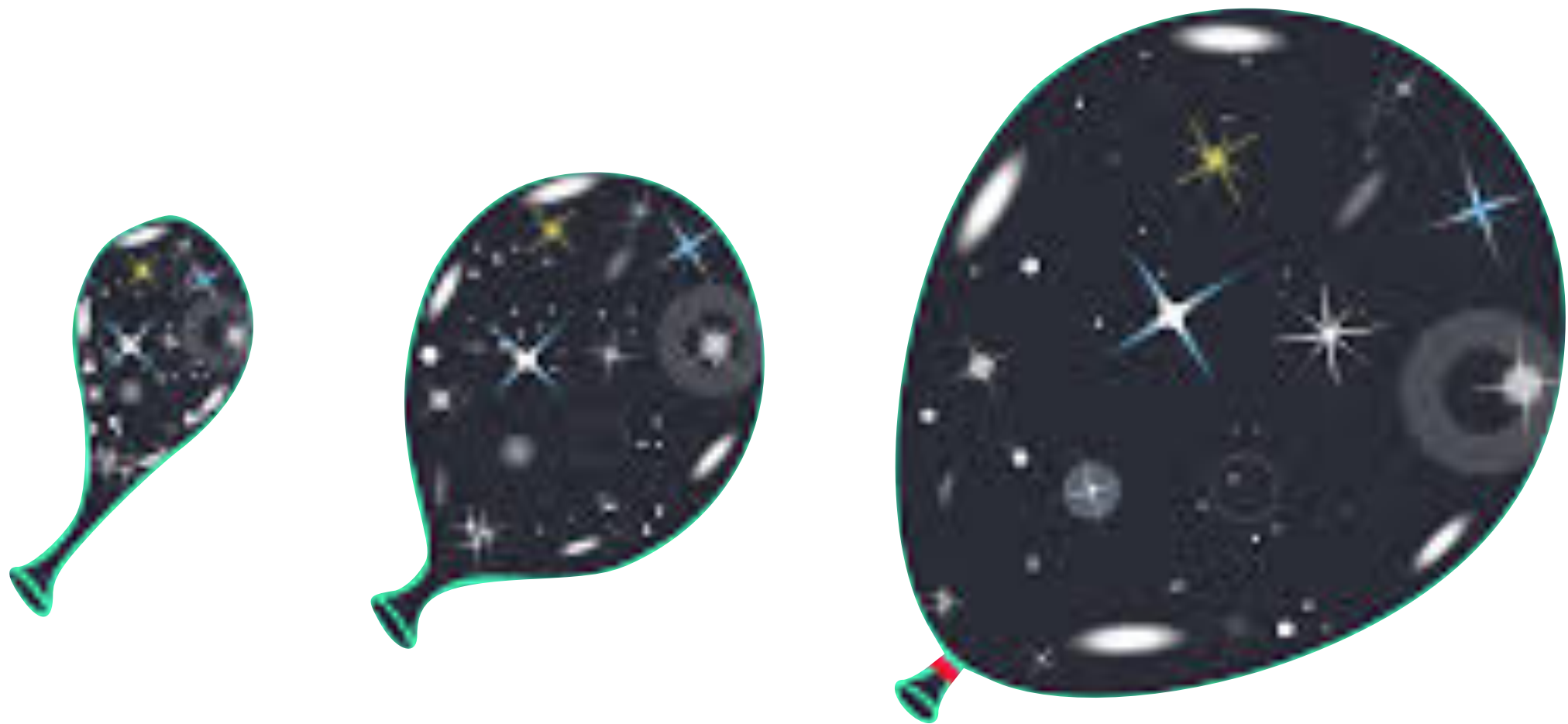
Adam G. Riess  
High-z Supernova Search Team  
Baltimore, USA

***“for the discovery of an  
accelerating expansion  
of the Universe through  
observations of distant  
supernovae”***



SN 1006 :  
Remnant of  
Supernova  
Type Ia

# Descrição matemática do Universo em expansão acelerada



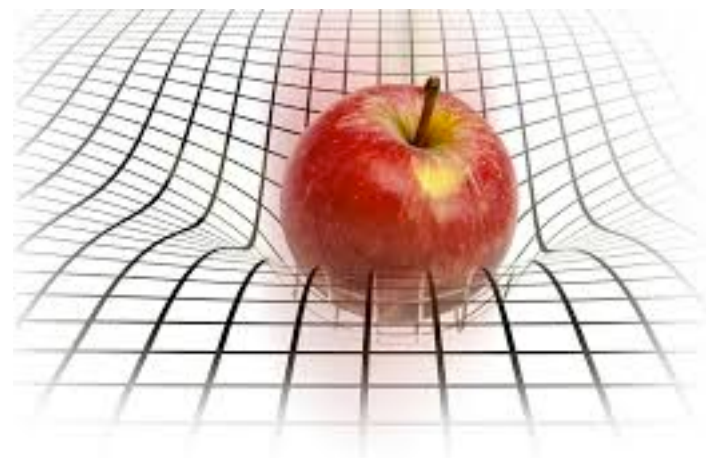
# Cosmologia moderna

Uma teoria cosmológica deve basear-se em três pilares



Teoria de gravidade

Métrica do espaço-tempo



Conteúdo material

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \left( \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_m \right)$$

# Teoria da gravidade

No contexto da RG as equações de Einstein descrevem a dinâmica do espaço-tempo

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R \quad \Rightarrow \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

Curso de Relatividade Geral (T. Caramês)

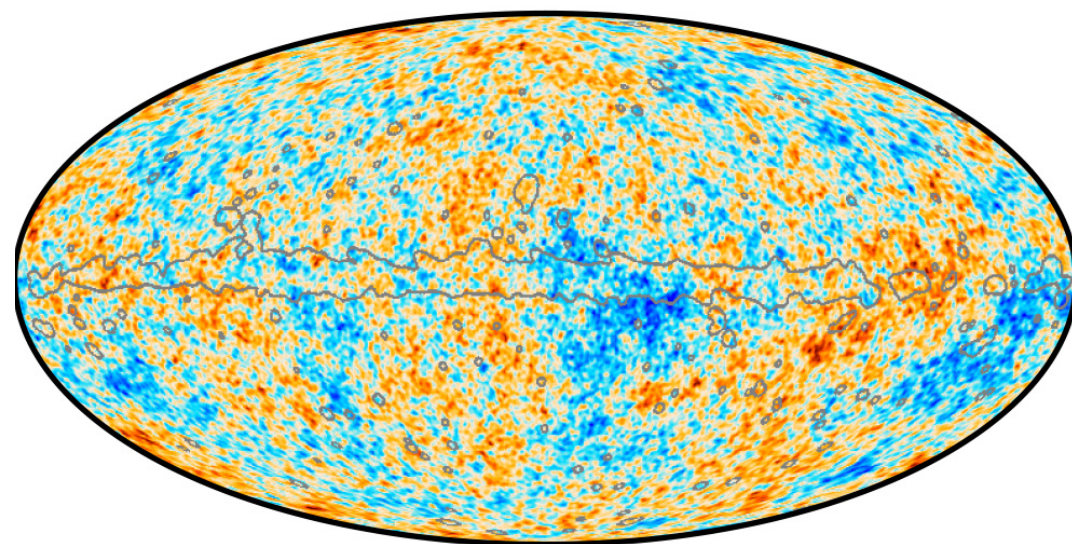
$$R_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^\alpha_{\mu\alpha,\nu} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \Gamma^\beta_{\alpha\beta} - \Gamma^\alpha_{\mu\beta} \Gamma^\beta_{\alpha\nu}$$

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} (g_{\alpha\nu,\lambda} + g_{\alpha\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\alpha})$$

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

# Métrica

Princípio cosmológico: Em largas escalas a matéria é distribuída de maneira homogênea e isotrópico



—250  $\mu K_{\text{cmb}}$  250



## Métrica de FLRW

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 \right)$$

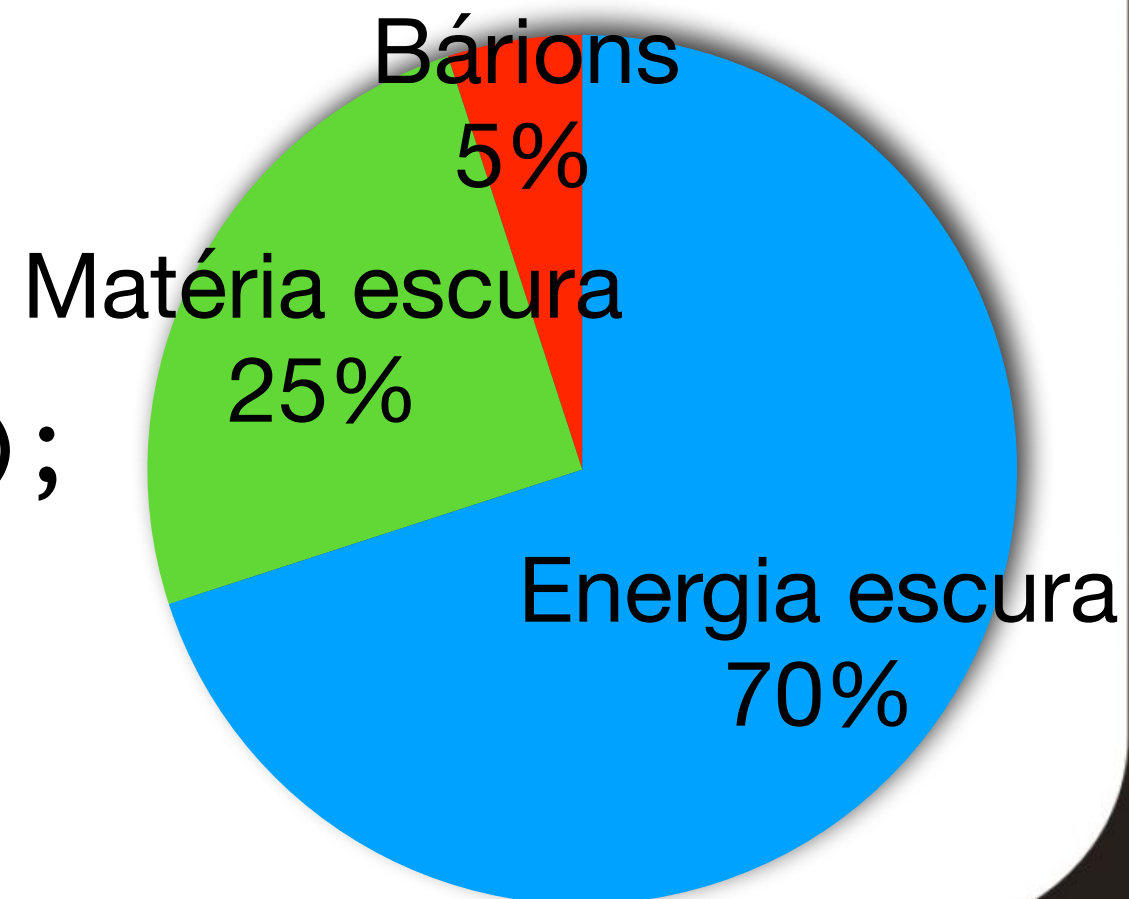
# Conteúdo material

O princípio cosmológico permite descrever o Universo como um fluido perfeito

$$T^\mu_\nu = (\rho + p) u^\mu u_\nu + p \delta^\mu_\nu$$

Todas as outras componentes também são fluidos perfeitos

1. Radiação (<0.1%);
2. Matéria bariônica (~5%);
3. Matéria escura (~25%);
4. Energia escura (~70%);



# Conteúdo material (2)

No modelo cosmológico padrão assume-se que as componentes materiais não interagem

$$T^{\mu\nu}_{;\mu} = (0, 0, 0, 0)$$

No contexto de fluidos perfeitos,

**Componente temporal:**  $\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0$

**Componente espacial:**  $\vec{0} = \vec{0}$

# Conteúdo material (3)

Assumindo uma equação de estado variável

$$p = w(a) \rho$$

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho = \rho_0 \exp \left[ \int_0^a \frac{3(1 + w(\bar{a}))}{\bar{a}} d\bar{a} \right]$$

Assumindo uma equação de estado constante

$$p = w\rho$$

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho = \rho_0 a^{-3(1+w)}$$

# Conteúdo material (4)

Curso de Cosmologia (W. Ricaldi)

**Radiação:**  $w_r = 1/3$   $\rho_r \propto a^{-4}$

**Matéria bariônica:**  $w_b = 0$   $\rho_b \propto a^{-3}$

**Matéria escura:**  $w_c = 0$   $\rho_c \propto a^{-3}$

**Energia escura em alguns slides...**

# Equações de Friedmann

Componente 0-0 das equações de Einstein:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}$$

Componente i-i das equações de Einstein:

$$3H^2 + 2\dot{H} = -8\pi Gp - \frac{k}{a^2}$$

Eliminando a curvatura nas equações anteriores

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)$$

# Condição para aceleração

Lembrando que a segunda derivada do fator de escala pode ser associada à aceleração

$$\text{Aceleração do Universo} \quad \Rightarrow \quad \ddot{a} > 0$$

$$\frac{-4\pi G a}{3} (\rho + 3p) > 0 \quad \Rightarrow \quad (\rho + 3p) < 0$$

Viola a condição de energia forte!  
(fluido perfeito)

$$p < -\rho/3$$

$$w < -1/3$$

# Fases do Universo

Equação de Friedmann para o caso plano

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} (\rho_r + \rho_b + \rho_c + \rho_x)$$

**Parâmetro de densidade:**  $\Omega_i \equiv \frac{8\pi G}{3H^2} \rho_i$

$$\Omega_r + \Omega_b + \Omega_c + \Omega_x = 1$$

O parâmetro de densidade pode ser interpretado como o percentual de cada espécie no Universo!

# Fases do Universo (2)

Soluções das equações de continuidade

**Radiação:**

$$\dot{\rho}_r + 4H\rho_r = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho_r = 3H_0^2\Omega_{r0}a^{-4}}$$

**Matéria escura:**

$$\dot{\rho}_c + 3H\rho_c = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho_c = 3H_0^2\Omega_{c0}a^{-3}}$$

**Bárions:**

$$\dot{\rho}_b + 3H\rho_b = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho_b = 3H_0^2\Omega_{b0}a^{-3}}$$

**Energia escura:**

$$\dot{\rho}_x + 3H(1 + w_x)\rho_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho_x = 3H_0^2\Omega_{x0}a^{-3(1 + w_x)}}$$

# Fases do Universo (4)

Escala temporal importante no Universo

**Igualdade Radiação-Matéria:**  $z_{eq} = \frac{\Omega_{r0}}{\Omega_{m0}} - 1$

$$z_{eq} = 3387$$

**Igualdade Matéria-Energia escura:**  $z_x = \left( \frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{x0}} \right)^{\frac{1}{3w_x}} - 1$

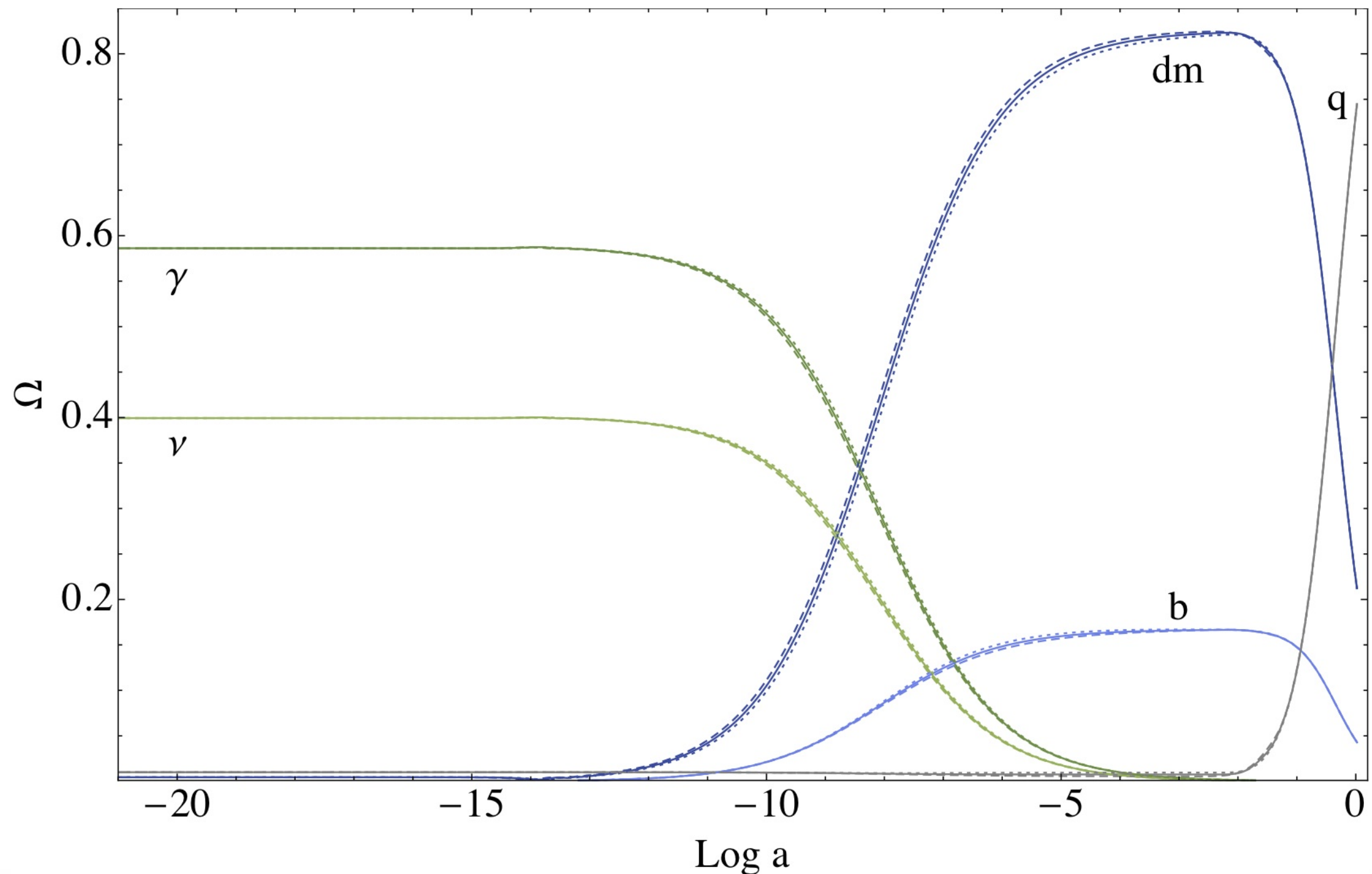
$$z_x = 0.3034$$

**Início da aceleração:**  $z_{ac} = \left( \frac{\Omega_{m0}}{2\Omega_{x0}} \right)^{\frac{1}{3w_x}} - 1$

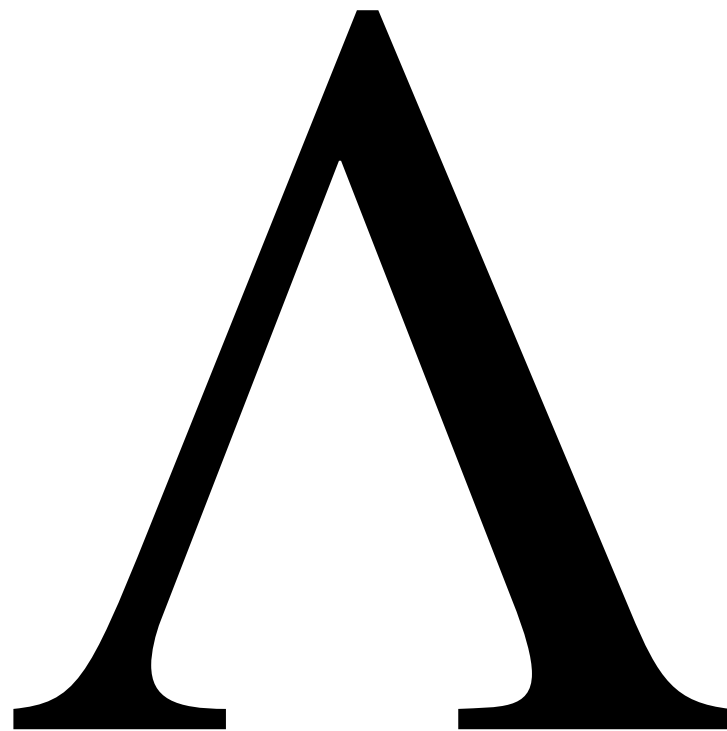
$$z_{ac} = 0.6422$$

# Fases do Universo (3)

Evolução temporal das componentes do Universo



Descrição padrão  
da energia escura



# Constante cosmológica

Mais simples descrição da energia escura

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) \quad \Rightarrow \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

Equação de Friedmann:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

Equação de aceleração:

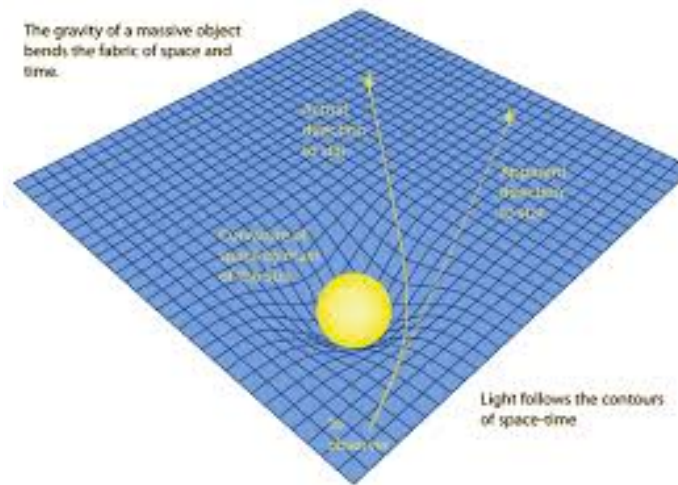
$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \text{ Termo positivo!}$$

# Modelo cosmológico padrão

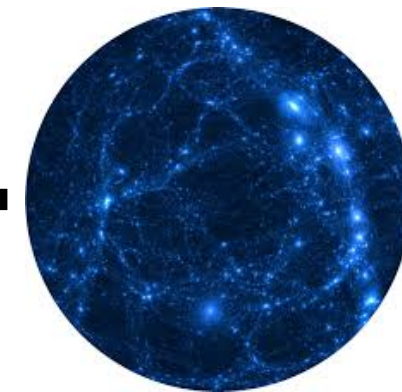
Inflação e BBN



RG e métrica de FLRW



CDM



Constante cosmológica

$\Lambda$

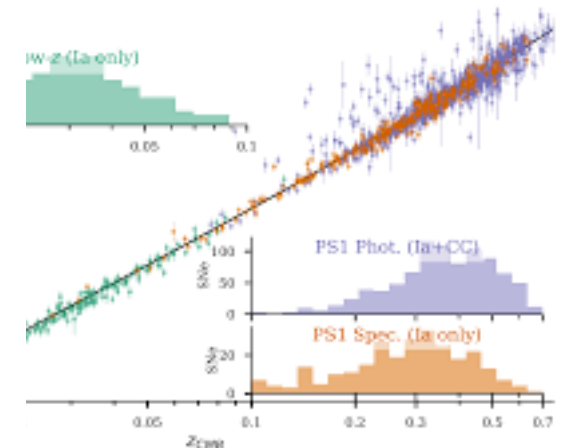
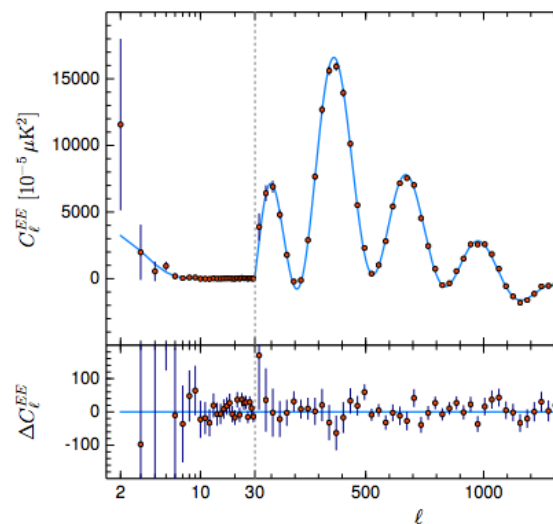
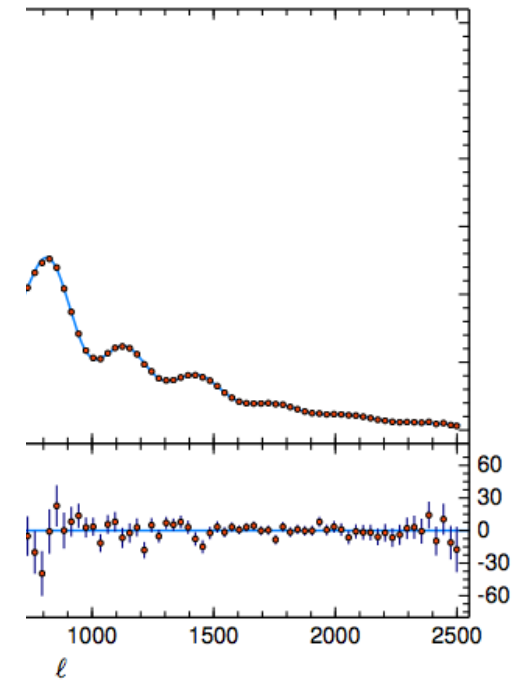
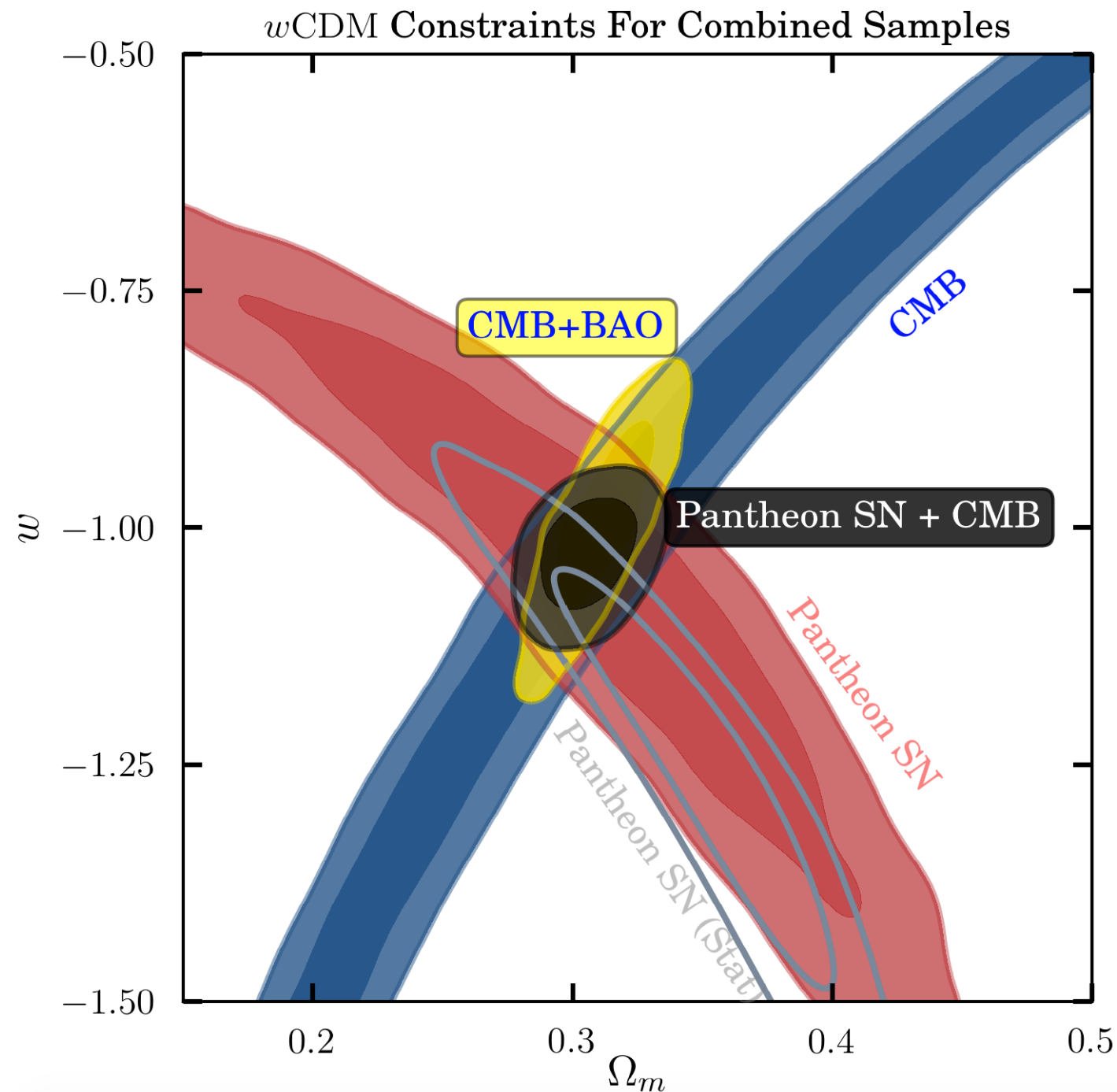
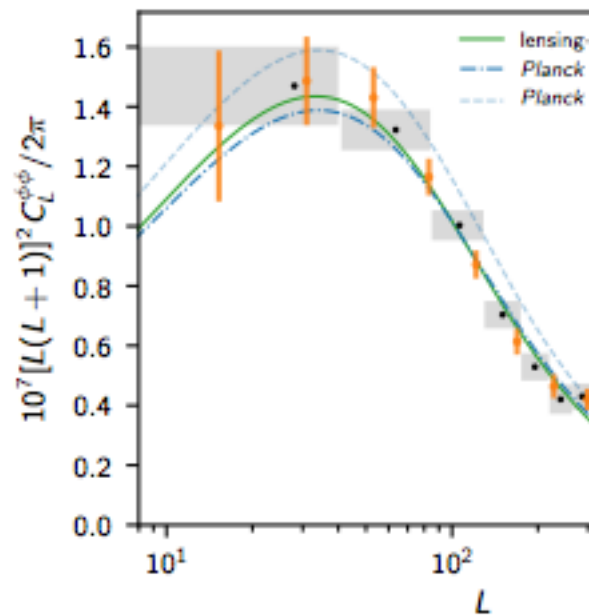
## Modelo $\Lambda$ CDM

A constante cosmológica é equivalente a um fluido com EoS  $w = -1$

$$\rho_{\Lambda} = \frac{\Lambda}{8\pi G}$$

# Sucesso observacional

## Modelo de concordância!



# Problemas do modelo cosmológico padrão

Problema da constante cosmológica:

Associação da constante cosmológica ao vácuo

$$T_{\mu\nu}^{(vac)} = -\Lambda^{(vac)} g_{\mu\nu}$$

Expansão acelerada observada

$$\Lambda \approx (2.1332 \, h \times 10^{-42} \, GeV)^2 \quad \Rightarrow \quad \rho_{\Lambda} \approx 10^{-47} GeV^4$$

Previsão da TQC

$$\rho_{vac} = \frac{1}{2} \int_0^k \frac{4\pi \bar{k}^2 d\bar{k}}{(2\pi)^3} \sqrt{\bar{k}^2 + m^2} \approx 10^{74} GeV^4$$

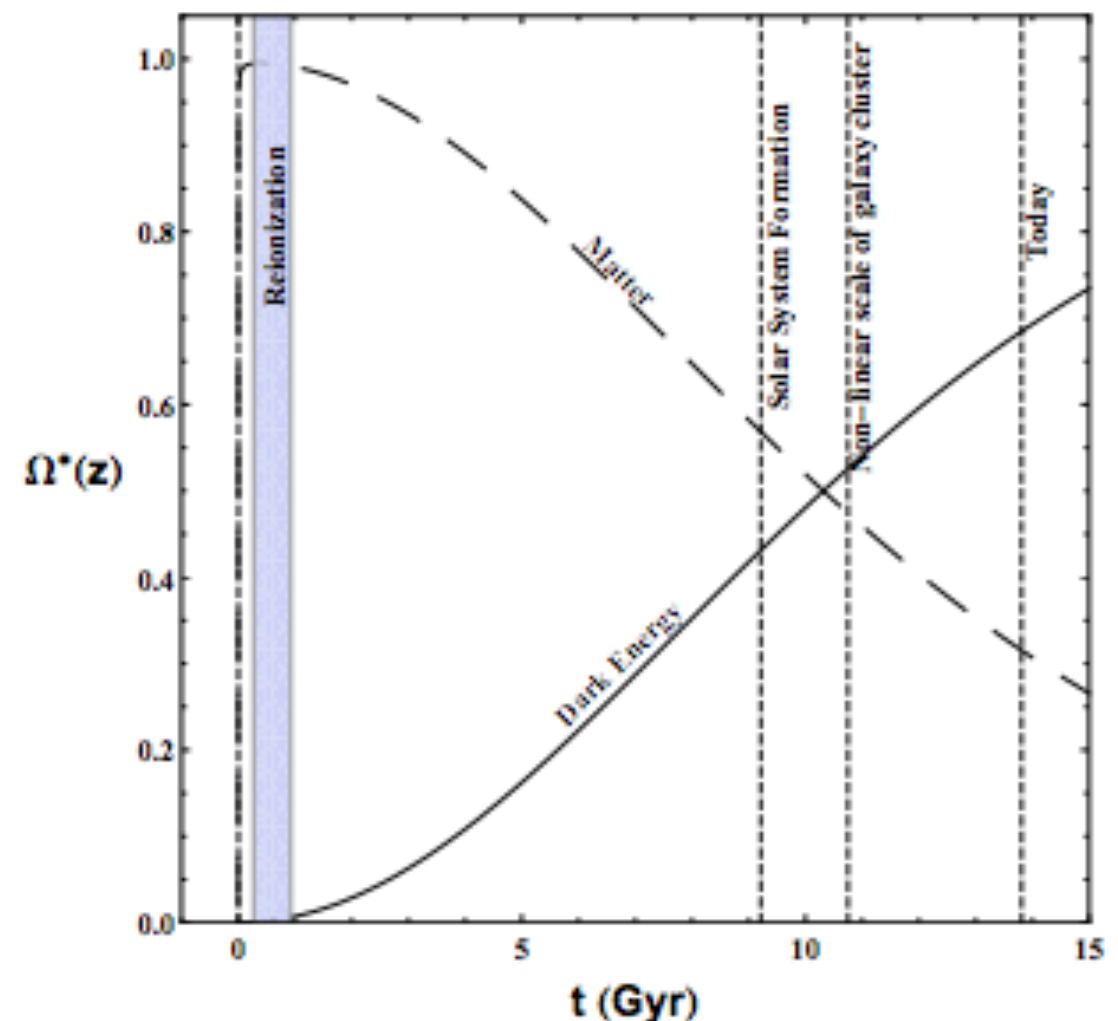
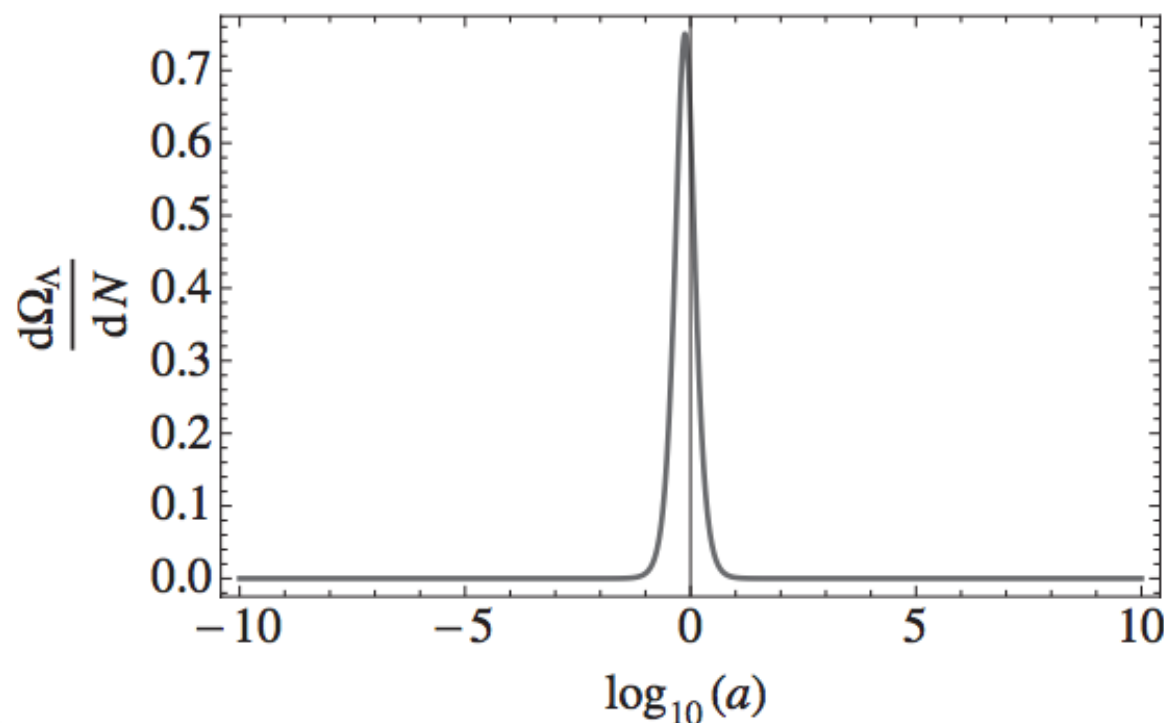
121 ordens de diferença!!!

# Problemas do modelo cosmológico padrão

Problema da coincidência cósmica:

As componentes escuras se tornam comparáveis apenas recentemente

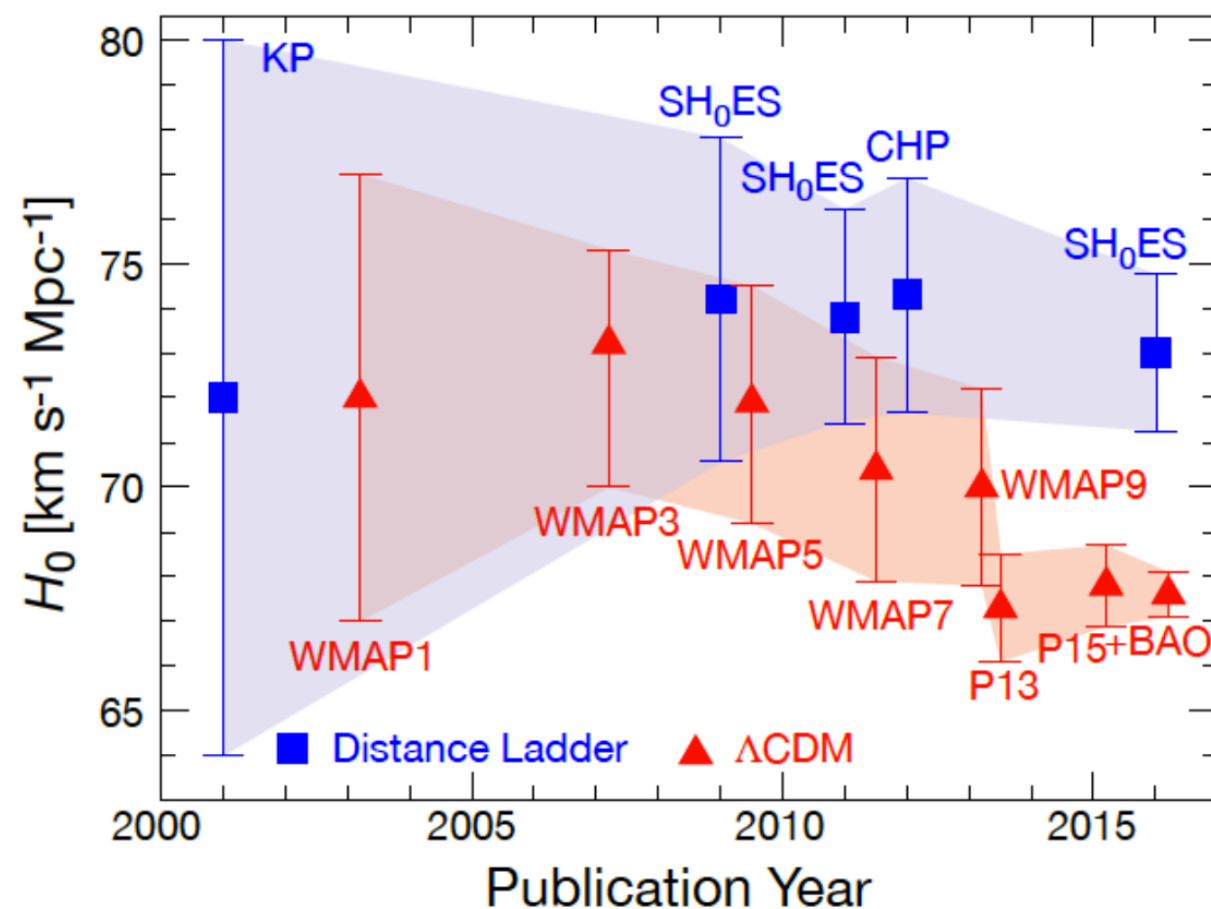
$$z_x = \left( \frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{x0}} \right)^{\frac{1}{3w_x}} - 1$$



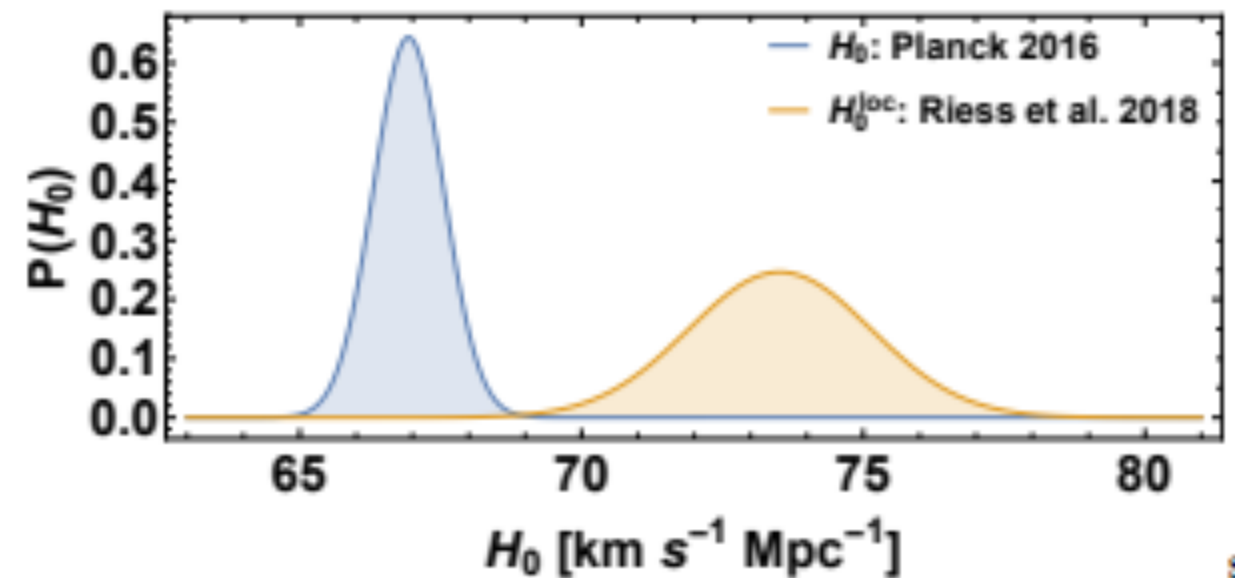
# Problemas do modelo cosmológico padrão

Medidas do valor atual do parâmetro de Hubble:

Histórico de medidas de  $H_0$



Tensão de  $3.8\sigma$



R18:  $73.52 \pm 1.62$

Planck 2018:  $67.66 \pm 0.42$

# Previously on “DE and observational cosmology”...

1. Observações indicam aceleração do universo
2. Modelo cosmológico padrão

$$\text{RG} + \text{FLRW} + \text{CDM} + \Lambda$$

3. Condição de aceleração

$$\ddot{a} > 0$$

4. Sucesso observacional
5. Problemas do modelo  $\Lambda$ CDM

# Descrições alternativas para a energia escura



# Fluido com EoS diferente de -1

Equação de conservação para a energia escura

$$\dot{\rho}_x + 3H(1 + w_x(a))\rho_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_x = \rho_{x0} \exp \left[ \int_0^a \frac{3(1 + w_x(\bar{a}))}{\bar{a}} d\bar{a} \right]$$

Parâmetro de Hubble

$$H(z) = H_0 \left[ \Omega_{r0} (1+z)^4 + (\Omega_{b0} + \Omega_{c0}) (1+z)^3 + \Omega_{k0} (1+z)^2 + \Omega_x f(z) \right]$$

$$f(z) = \exp \left[ 3 \int_0^z \frac{(1 + w(\tilde{z}))}{1 + \tilde{z}} d\tilde{z} \right]$$

Diferentes parametrizações da energia escuras podem ser propostas através de EoS variáveis

# Fluido com EoS diferente de -1

Exemplos de parametrizações da energia escura

| Label | $\omega(z)$                                                                   | $f(z)$                                                                                                           |
|-------|-------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| CPL   | $\omega_0 + \omega_a \frac{z}{1+z}$                                           | $(1+z)^{3(1+\omega_0+\omega_a)} \exp\left(\frac{-3\omega_a z}{1+z}\right)$                                       |
| JBP   | $\omega_0 + \omega_a \frac{z}{(1+z)^2}$                                       | $(1+z)^{3(1+\omega_0)} \exp\left(\frac{3\omega_a z^2}{2(1+z)^2}\right)$                                          |
| BA    | $\omega_0 + \omega_a \frac{z(1+z)}{1+z^2}$                                    | $(1+z)^{3(1+\omega_0)} (1+z^2)^{1.5\omega_a}$                                                                    |
| FSLI  | $\omega_0 + \omega_a \frac{z}{1+z^2}$                                         | $(1+z)^{3(1+\omega_0-0.5\omega_a)} (1+z^2)^{0.75\omega_a} \exp(1.5\omega_a \arctan z)$                           |
| FSLII | $\omega_0 + \omega_a \frac{z}{1+z^2}$                                         | $(1+z)^{3(1+\omega_0+0.5\omega_a)} (1+z^2)^{0.75\omega_a} \exp(-1.5\omega_a \arctan z)$                          |
| MZ    | $\omega_0 + \omega_a \left(\frac{\log(2+z)}{1+z} - \log(2)\right)$            | $(1+z)^{3(1+\omega_0+\omega_a-\omega_a \log(2))} 4^{3\omega_a} (2+z)^{\frac{-3\omega_a(2+z)}{(1+z)}}$            |
| Wang  | $\omega_0 \frac{1-2z}{1+z} + \omega_a \frac{3z}{1+z}$                         | $(1+z)^{3(1-2\omega_0+3\omega_a)} \exp\left(\frac{9(\omega_0-\omega_a)z}{1+z}\right)$                            |
| SL    | $c_1 \left(\frac{1+2z}{1+z}\right) + c_2 \left(\frac{1+2z}{1+z}\right)^2 - 1$ | $(1+z)^{1.5(1-8\omega_0+9\omega_a)} \exp\left(\frac{3z(4+7z-9\omega_a(4+5z)+\omega_0(40+52z))}{8(1+z)^2}\right)$ |

IMPORTANTE:

1. Há aglomeração da energia escura;
2. Aproximação PPF;

# Campo escalar (quintessência)

Ação de quintessência

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left( R + \mathcal{L}_\phi \right)$$

Lagrangiana do campo escalar

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - V(\phi)$$

Tensor de energia-momento do campo escalar

$$T_{\mu\nu}^{(\phi)} = \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - g_{\mu\nu} \left[ \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} + V(\phi) \right]$$

Densidade de energia e pressão

$$\rho_\phi = -T_0^{0(\phi)} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad p_\phi = \frac{1}{3} T_i^{i(\phi)} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi)$$

# Campo escalar (quintessência)

Equação de estado

$$w_{\phi} = \frac{p_{\phi}}{\rho_{\phi}} = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)}$$

Condição de aceleração

$$w_{\phi} < -1/3 \quad , \quad \left( \dot{\phi}^2 < V(\phi) \right)$$

Equações de movimento

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left[ \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) + \rho \right]$$

$$\dot{H} = -4\pi G \left( \dot{\phi}^2 + \rho + p \right)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{,\phi} = 0$$

# Campo escalar (quintessência)

Exemplos de potenciais de quintessência

1. Lei de potência

$$V(\phi) = \beta M^2 \left( \frac{\phi}{M} \right)^\alpha$$

2. Freezing models

$$V(\phi) = M^{4+n} \phi^{-n} \quad (n > 0)$$

$$V(\phi) = M^{4+n} \phi^{-n} \exp \left( \alpha \phi^2 / m_{pl}^2 \right)$$

3. Thawing models

$$V(\phi) = V_0 + M^{4-n} \phi^n \quad (n > 0)$$

$$V(\phi) = M^4 \cos^2 (\phi/f)$$

# Campo escalar (k-essência)

Ação de k-essência

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ R + \mathcal{F}(\phi, X) \right]$$

$\mathcal{F}(\phi, X)$  é uma função do termo cinético  $X = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu}$

Tensor de energia-momento de k-essência

$$T_{\mu\nu}^{(\phi)} = \mathcal{F}_{,X}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} + g_{\mu\nu}\mathcal{F}$$

Densidade de energia e pressão

$$\rho_\phi = 2X\mathcal{F}_{,X} - \mathcal{F} \quad , \quad p_\phi = \mathcal{F} \quad , \quad u_\mu = \frac{\phi_{,\mu}}{\sqrt{2X}}$$

Tensor de energia-momento tipo fluido perfeito

# Campo escalar (k-essência)

Equação de estado

$$w_\phi = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\mathcal{F}}{2X\mathcal{F}_{,X} - \mathcal{F}}$$

Condição de aceleração

$$w_\phi \rightarrow -1 \quad , \quad |2X\mathcal{F}_{,X}| \ll |\mathcal{F}|$$

Equações de movimento

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} (\rho_\phi + \rho)$$

$$\dot{H} = -4\pi G (2X\mathcal{F}_{,X} + \rho + p)$$

$$\dot{\rho}_\phi + 3H (\rho_\phi + p_\phi) = 0$$

# Campo escalar (k-essência)

Exemplos de lagrangianas de k-essência

## 1. Teorias DBI (Dirac-Born-Infeld)

$$\mathcal{F} = f(\phi)^{-1} \sqrt{1 - 2f(\phi) X} + f(\phi)^{-1} - V(\phi)$$

## 2. Campos taquiônicos

$$\mathcal{F} = -V(\phi) \sqrt{-\det(g_{\mu\nu} + \phi_{,\mu}\phi_{,\nu})}$$

## 3. Ghost condensate model

$$\mathcal{F} = -X + \frac{X^2}{M^4}$$

# Gravidade modificada

Modificação no termo gravitacional da ação

## 1. Teorias $f(R)$

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} f(R)$$

### Formalismo métrico:

Variação da ação com respeito à métrica

$$F(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu F(R) + g_{\mu\nu} \square F(R) = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

Traço da equação anterior

$$3 \square F(R) + F(R) R - 2f(R) = 8\pi G T$$

**Definições:**  $\square \equiv \partial^\mu \partial_\mu$  ,  $F(R) \equiv f_{,R}$

# Gravidade modificada

Modificação no termo gravitacional da ação

## 1. Teorias $f(R)$

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} f(R)$$

### Formalismo métrico:

Assumindo a métrica de FLRW

$$R = 6 (2H^2 + \dot{H})$$

Equações de movimento

$$3FH^2 = 8\pi G\rho + \frac{FR - f}{2} - 3H\dot{F}$$
$$-2F\dot{H} = 8\pi G(\rho + p) + \ddot{F} - H\dot{F}$$

# Gravidade modificada

Modificação no termo gravitacional da ação

## 2. Teorias escalares-tensoriais

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} f(\phi, R) - \frac{1}{2} \zeta(\phi) (\nabla \phi)^2 \right]$$

### Exemplo 1: Teoria de Brans-Dicke

$$f(R, \phi) = \phi R \quad , \quad \zeta = \frac{w_{BD}}{\phi}$$

### Exemplo 2: $f(R, \phi) = F(\phi) R - 2U(\phi)$

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} F(\phi) R - \frac{1}{2} \zeta(\phi) (\nabla \phi)^2 - U(\phi) \right]$$
$$Q = -\frac{F_{,\phi}}{2F} \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{F_{,\phi}}{F} \right)^2 + \frac{\zeta}{F} \right]^{-1/2}$$

# Gravidade modificada

Modificação no termo gravitacional da ação

## 2. Teorias escalares-tensoriais

Exemplo 2:  $f(R, \phi) = F(\phi) R - 2U(\phi)$

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} f(\phi, R) - \frac{1}{2} \zeta(\phi) (\nabla \phi)^2 \right]$$

Mudança de variável

$$\psi = \int d\phi \sqrt{\frac{3}{2} \left( \frac{F_{,\phi}}{F} \right)^2 + \frac{\zeta}{F}}$$

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} F(\psi) R - \frac{1}{2} (1 - 6Q^2) F(\psi) (\nabla \psi)^2 - U(\psi) \right]$$

# Gravidade modificada

Modificação no termo gravitacional da ação

## 2. Teorias escalares-tensoriais

Exemplo 2:  $f(R, \phi) = F(\phi) R - 2U(\phi)$

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} f(\phi, R) - \frac{1}{2} \zeta(\phi) (\nabla \phi)^2 \right]$$

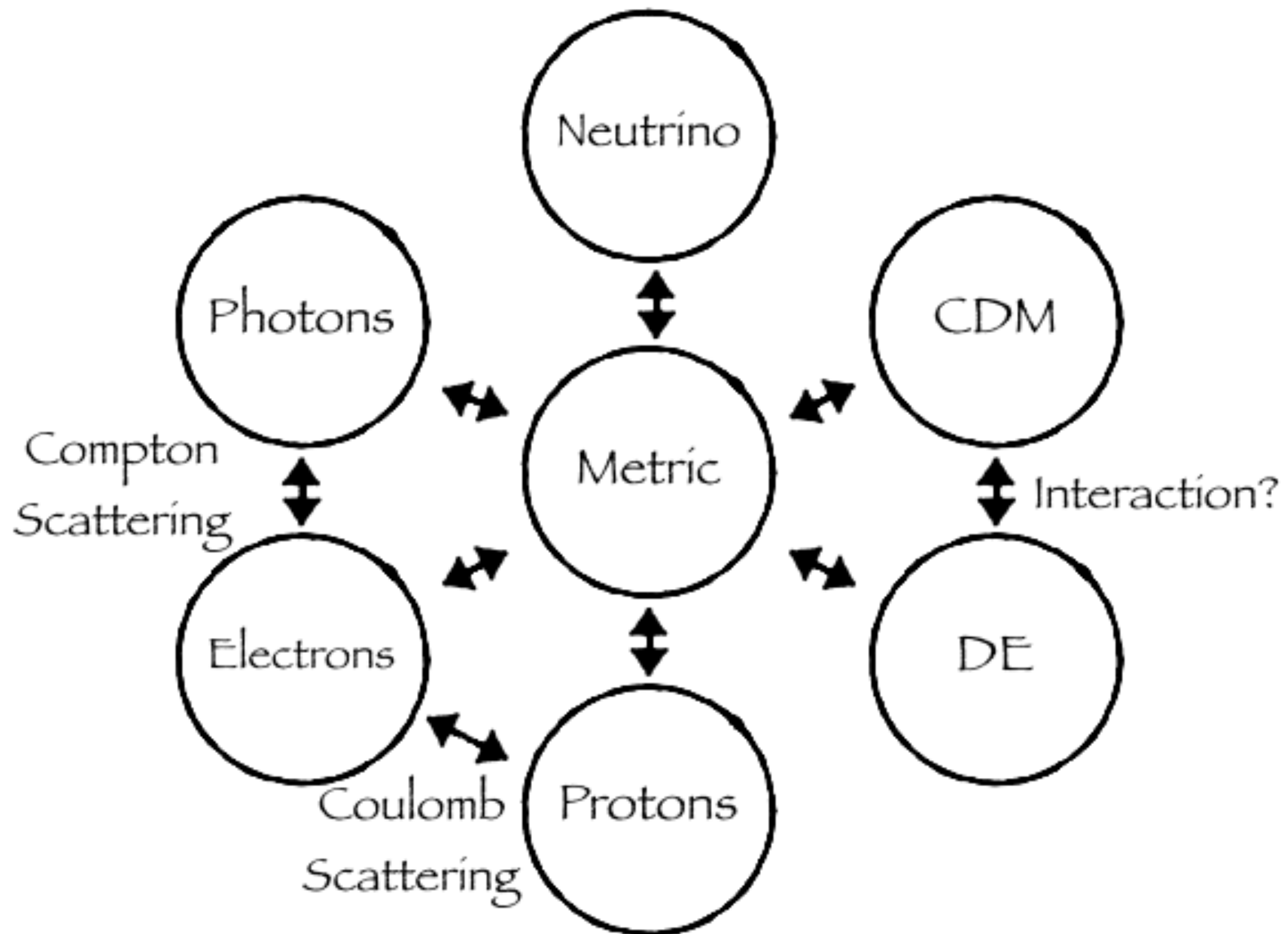
Equações de movimento

$$3FH^2 = \frac{1}{2} (1 - 6Q^2) F\dot{\psi} + U - 3H\dot{F} + \rho$$

$$2F\dot{H} = - (1 - 6Q^2) F\dot{\psi}^2 - \ddot{F} + H\dot{F} - (\rho + p)$$

$$(1 - 6Q^2) F \left[ \ddot{\psi} + 3H\dot{\psi} + \frac{\dot{F}}{2F} \dot{\psi} + U_{,\psi} + QFR \right] = 0$$

# Interação no setor escuro



# Interação no setor escuro

Como descrever uma interação física?

## 1. Equação de Boltzmann

$$\frac{df}{dt} = C[f] \text{ Termo de colisão!}$$

Requer uma descrição microscópica da interação

## 2. Descrição hidrodinâmica

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = Q^{\mu} \text{ Termo de interação!}$$

**Fluido perfeito**

$$\Rightarrow Q^{\mu} = (Q, \vec{0})$$

# Interação no setor escuro

O Universo é um sistema conservativo

$$\cancel{T^{\mu\nu}_{; \nu}} = \cancel{T^{\mu\nu}_{(r); \nu}} + \cancel{T^{\mu\nu}_{(b); \nu}} + T^{\mu\nu}_{(c); \nu} + T^{\mu\nu}_{(x); \nu} = (0, \vec{0}) \Rightarrow \begin{cases} T^{0\nu}_{(c); \nu} = Q \\ T^{0\nu}_{(x); \nu} = -Q \end{cases}$$

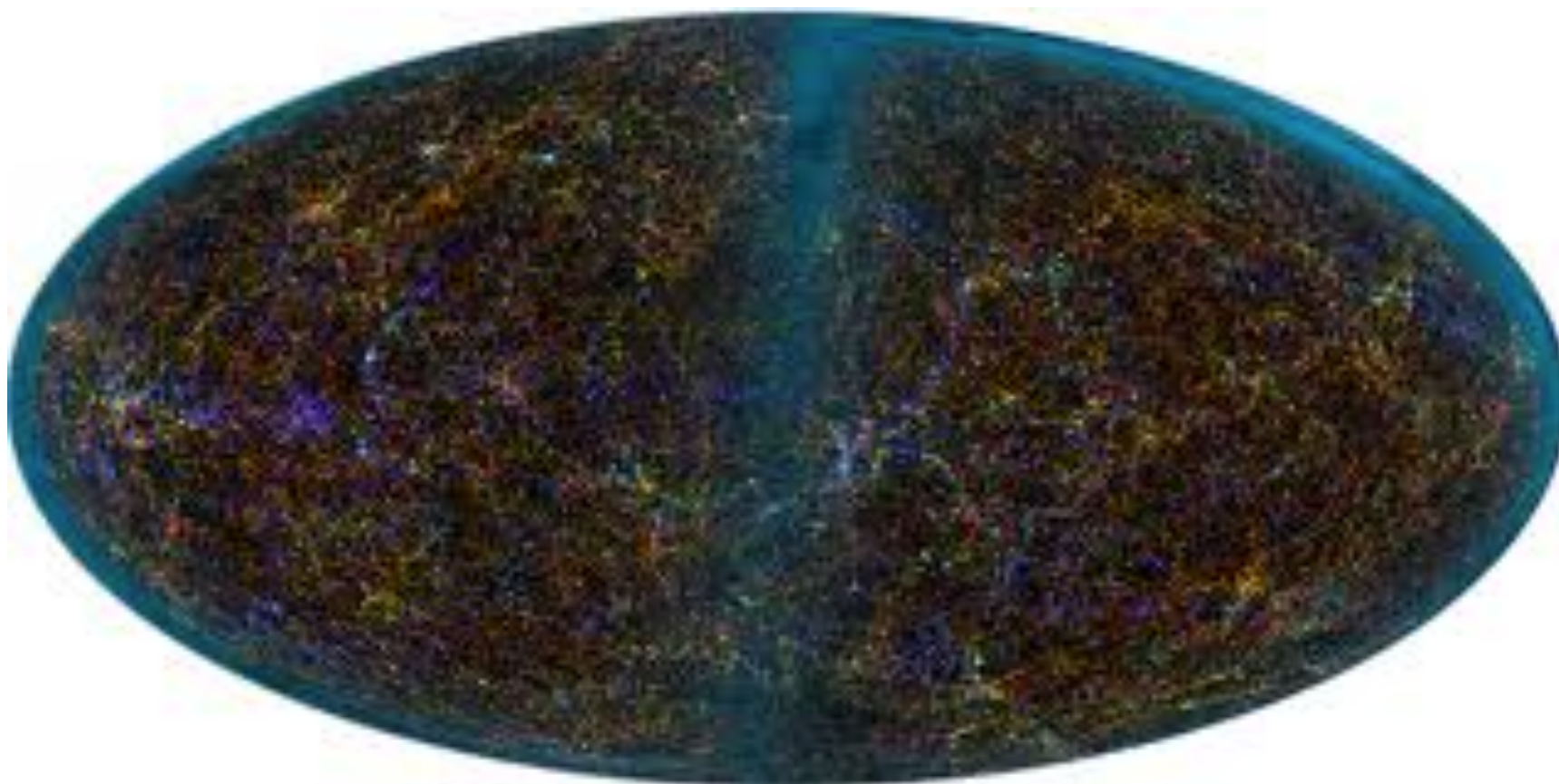
Bárions e radiação se conservam separadamente

Conservação da energia

$$\begin{cases} \dot{\rho}_c + 3H\rho_c = -Q \\ \dot{\rho}_x + 3H(1 + w_x)\rho_x = Q \end{cases}$$

A interação no setor escuro é definida pela determinação explícita da função escalar  $Q$ !

# Cosmología observacional



# Panorama atual

[Home](#) [SCIENCE MISSIONS](#) [EUROPEAN SPACE AGENCY](#) [SCIENCE & TECHNOLOGY](#) [SIGN IN](#)



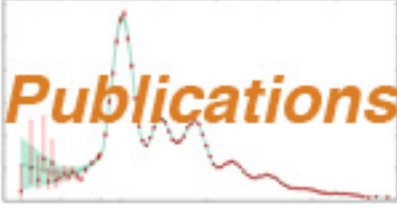
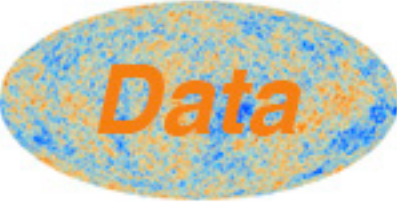
[Planck » Home](#)

[Home](#)  
[Mission Overview](#)  
[Mission History](#)  
[Planck Legacy Archive](#)  
[Publications](#)  
[Picture Gallery](#)  
[Conferences](#)  
[Planck Teams](#)  
[Restricted Planck Items](#)  
[Lessons Learned](#)

## PLANCK SCIENCE TEAM HOME

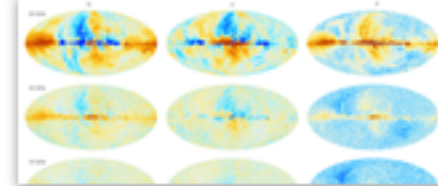
On 17 July 2018 ESA and the Planck Collaboration have released to the public a new and improved version of the data acquired by the Planck satellite, which constitutes the final official release from Planck. See the related [article](#). The data and related papers can be accessed via the links below.

Go directly to Planck



### PLANCK STATUS

Mission status: Planck stopped operations on 23 October 2013.

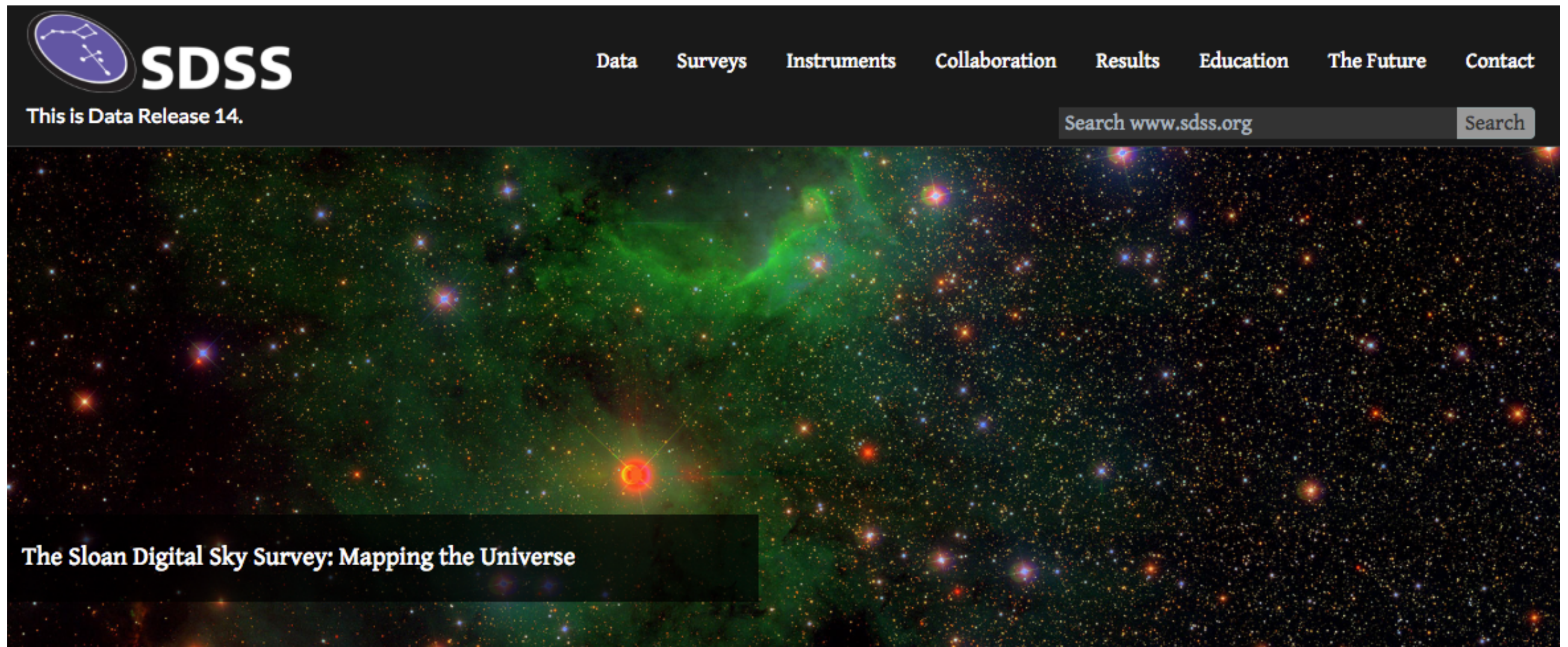


### LATEST NEWS

- On 2 July 2018, the 2018 Marcel Grossman Institutional Award goes to the **Planck Scientific Collaboration (ESA)**, and is presented to Jean-Loup Puget, Principal Investigator of Planck/HFI).

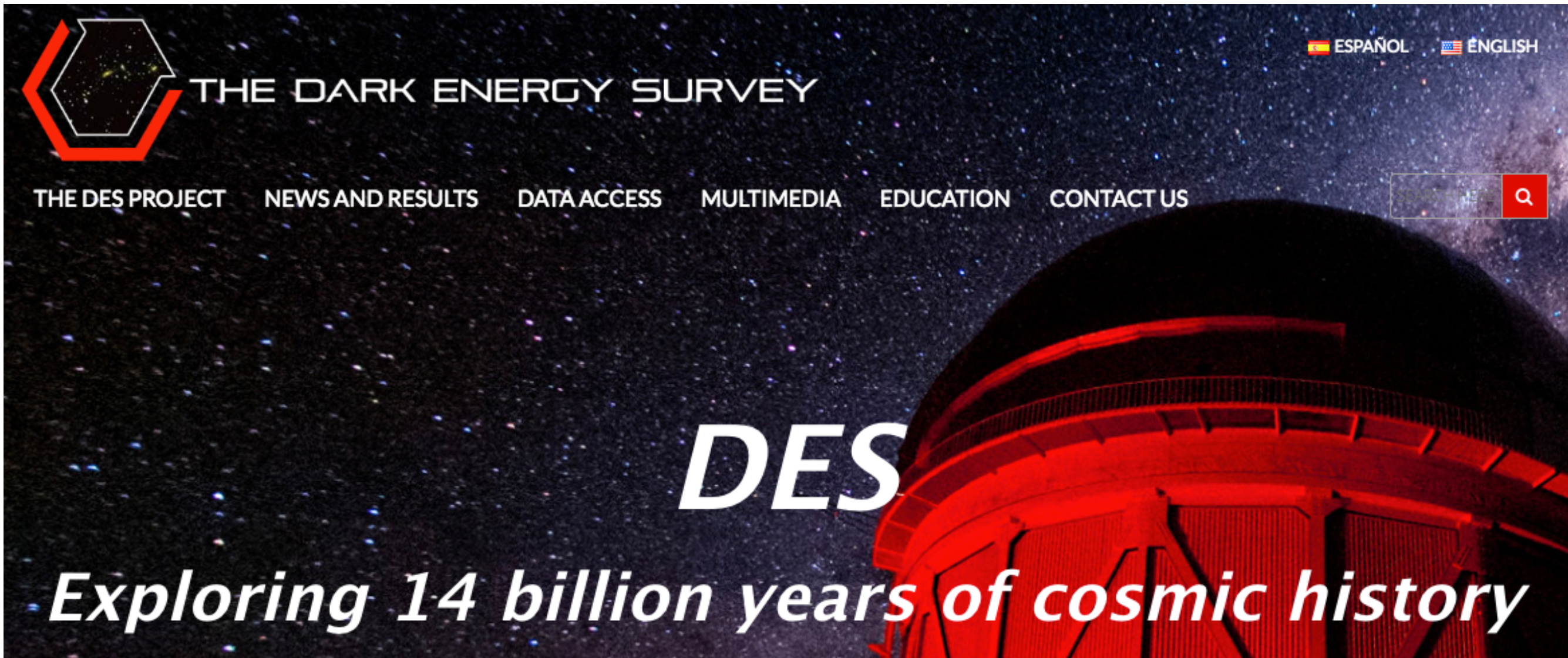
Flutuações da CMB e Lenteamento gravitacional fraco

# Panorama atual



Oscilações acústicas bariônicas

# Panorama atual



Oscilações acústicas bariônicas e lenteamento gravitacional fraco

# Perspectivas futuras

## Euclid Consortium

A space mission to map the Dark Universe

[The Mission](#)

[Euclid Consortium](#)

[News](#)

[Publications](#)

[Outreach Articles](#)

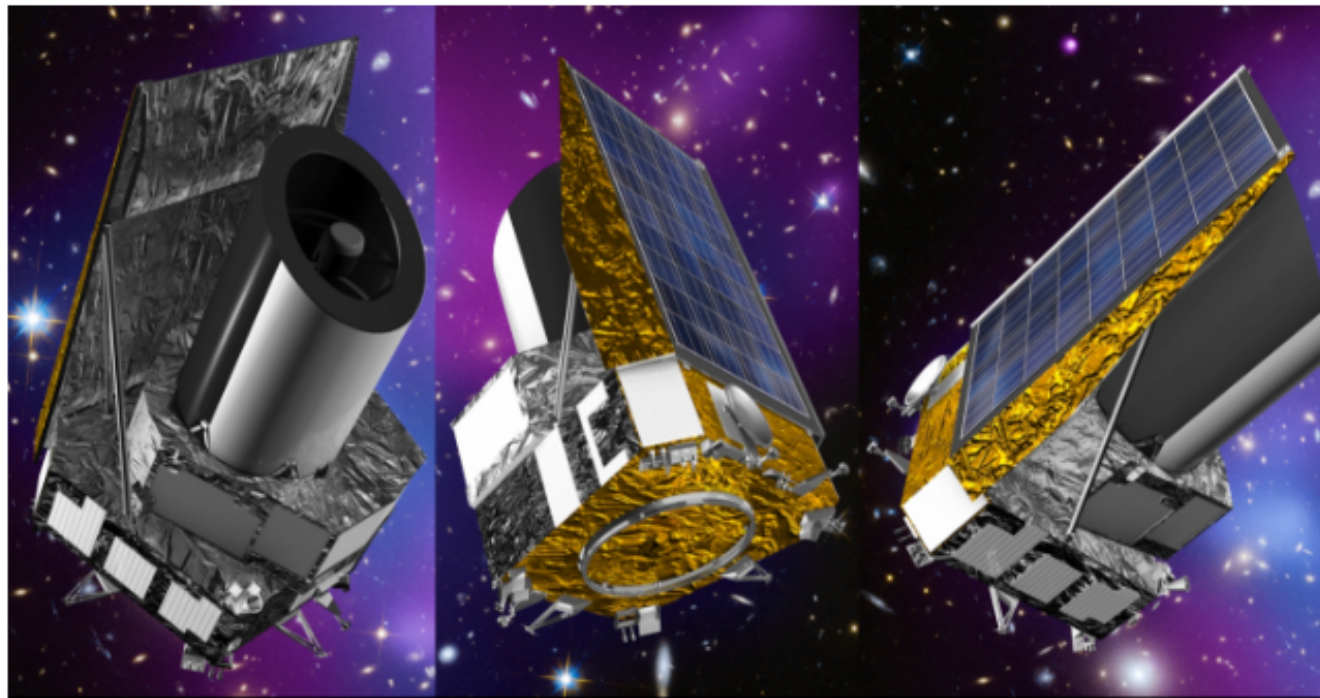
[Careers](#)

[Contacts](#)

[Internal EC](#)



## Euclid and the origin of the accelerating universe



Artist views of the Euclid Satellite – © ESA



Oscilações acústicas bariônicas, lenteamento gravitacional fraco e RSD

# Perspectivas futuras

[GALLERY](#) [PUBLIC & SCIENTISTS](#) [PROJECT TEAM](#) [LSST CORPORATION](#)



**Large Synoptic Survey Telescope**  
Opening a Window of Discovery on the Dynamic Universe

[SEARCH](#)

[ABOUT](#) [SCIENCE GOALS](#) [PARTICIPATE](#) [GALLERY](#) [NEWS](#) [FOR SCIENTISTS](#)

[Home](#) / [cosmology](#)

### Tweets

**Guillaume Doyen**   
[@AstroGuigeeek](#)

Hello [@LSST](#) 😊 Happy to see you for real!  
  
Apparently, the construction is going well  
  
07/26/2018  
As seen from [#SOAR](#)[#LSST](#) [#NSFScience](#)  
[#AURA](#) [#Astronomy](#) [#Observatory](#) [#Chile](#)  
[#AstroChile](#) [#CerroPachon](#) [#GEMINI](#) [#CTIO](#)  
[#SOAR](#) [#Astrophysics](#)

## cosmology

### Masked areas in shear peak statistics: a forward modeling approach

**Lead Author:** Bard, Deborah et al.  
**Other Authors/Credits:** Kratochvil, Jan M.; Dawson, William  
**Publication Date:** Tuesday, September 16, 2014  
Journal Articles  
[cosmology](#)  
<http://adsabs.harvard.edu/abs/2014arXiv1410.5446B>

## Supernovas

# Perspectivas futuras

J-PAS CEFGA OAJ J-PLUS

**J-PAS**  
Javalambre Physics of the Accelerating  
Universe Astrophysical Survey

**NEWS**  
News  
Survey

**SURVEY**  
Data Releases  
Collaboration

**DATA RELEASES**  
Outreach

**COLLABORATION**

## J-PAS: Javalambre Physics of the Accelerating Universe Astrophysical Survey

Javalambre Physics of the Accelerating Universe Astrophysical Survey, J-PAS, is an unprecedented photometric sky survey of 8500 deg<sup>2</sup> visible from Javalambre in 59 colors, using a set of broad, intermediate and narrow band filters. J-PAS will discover an unprecedented number of stars, galaxies, supernovas, quasars and solar system objects, which will be mapped with exquisite accuracy. The innovative designs of the J-PAS camera and filter system will allow, for the first time, to map not only the positions of hundreds of millions of galaxies in the sky, but their individual distances to us as well, providing the first complete 3D map of the Universe.

Oscilações acústicas bariônicas

# Medidas de distância

(Métrica de FLRW plana)

## 1. Distância comóvel

Trajetória radial da luz satisfaz a condição

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) dr^2 = 0$$

$$\mathcal{D} \equiv r = \int_0^r dr'$$

$$\mathcal{D} = \int_t^{t_0} \frac{d\tilde{t}}{a(\tilde{t})} = \int_a^1 \frac{d\tilde{a}}{H(\tilde{a}) \tilde{a}^2} = \int_0^z \frac{d\tilde{z}}{H(\tilde{z})}$$

# Medidas de distância

## 2. Distância de luminosidade

$$d_L^2 \equiv \frac{L_f}{4\pi\mathcal{F}_0}$$

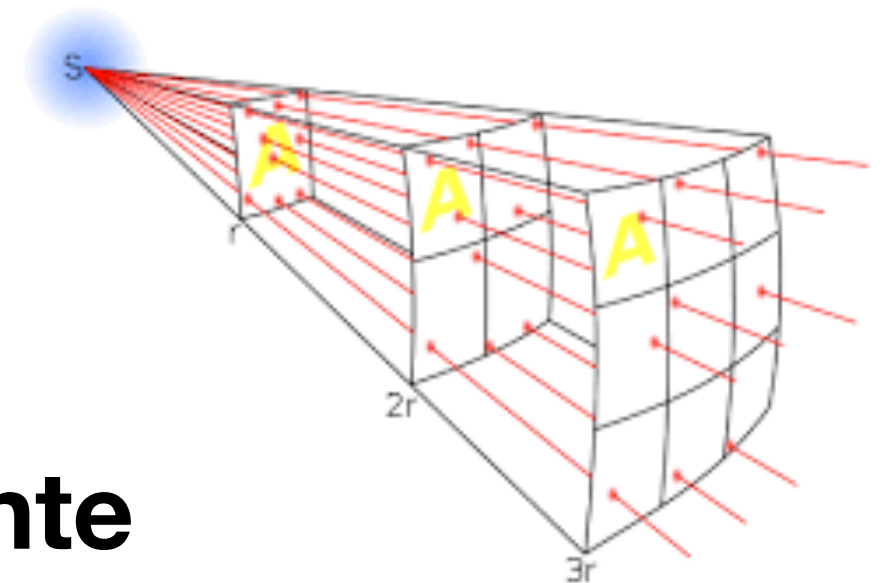
$L$  : **Luminosidade absoluta da fonte**

$\mathcal{F}$  : **Fluxo observado**

Fluxo = Luminosidade / Área

$$\mathcal{F}_0 = \frac{L_0}{4\pi\mathcal{D}^2}$$

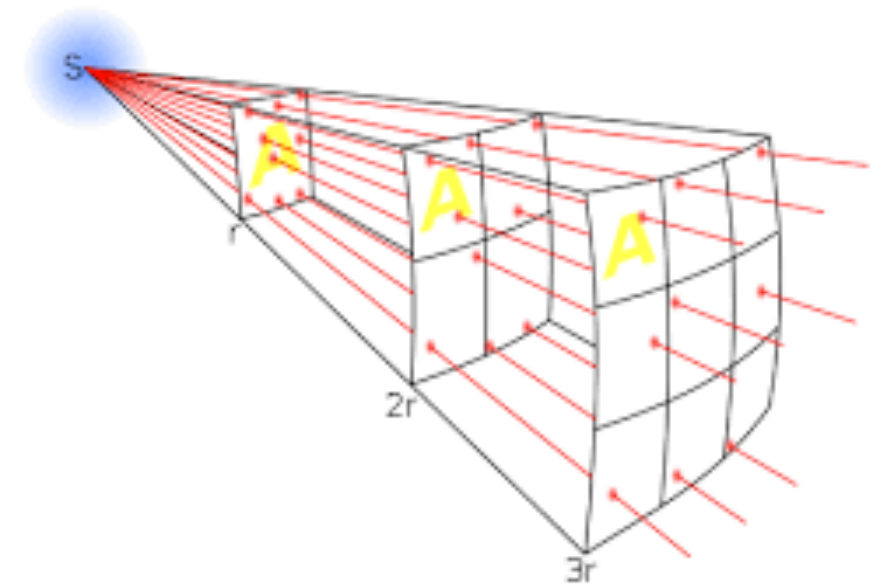
$$d_L^2 = \mathcal{D}^2 \frac{L_f}{L_0}$$



# Medidas de distância

## 2. Distância de luminosidade

$$d_L^2 = \mathcal{D}^2 \frac{L_f}{L_0}$$



Fluxo = Energia / Tempo

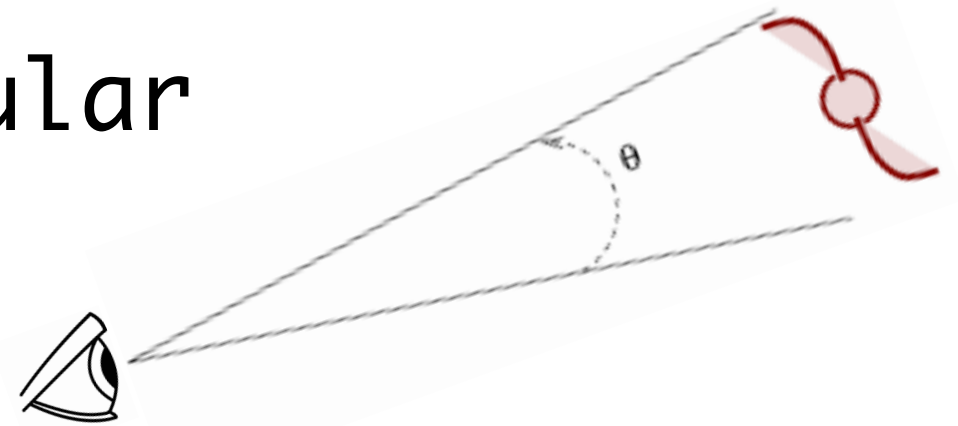
$$\frac{L_f}{L_0} = \frac{\Delta E_f}{\Delta E_0} \times \frac{\Delta t_0}{\Delta t_f} \quad \Rightarrow \quad \frac{L_f}{L_0} = (1 + z)^2$$

$$d_L = \mathcal{D} (1 + z)$$

# Medidas de distância

## 3. Distância de diâmetro angular

$$d_A \equiv \frac{\Delta x}{\Delta \theta}$$



Para  $d_A \gg 1$ , em um tempo  $t$  associado a um fator de escala  $a$ , o tamanho  $\Delta x$  pode ser calculado como

$$\Delta x = a \mathcal{D} \Delta \theta$$

$$d_A = \frac{\mathcal{D}}{(1+z)}$$

# Cosmografia

$$q \equiv -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2}$$

Expansão do fator de escala

$$a(t) = a(t_0) + \left. \frac{da}{dt} \right|_{t=t_0} (t - t_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2a}{dt^2} \right|_{t=t_0} (t - t_0)^2 + \dots$$

$$a(t) = a(t_0) \left[ 1 + H_0 (t - t_0) - \frac{1}{2} q_0 H_0^2 (t - t_0)^2 + \dots \right]$$

Independente de modelo cosmológico!

Mudança de variável para o redshift

$$z(t) = H_0 (t - t_0) + \frac{1}{2} (q_0 + 2) H_0^2 (t - t_0)^2 + \dots$$

# Cosmografia

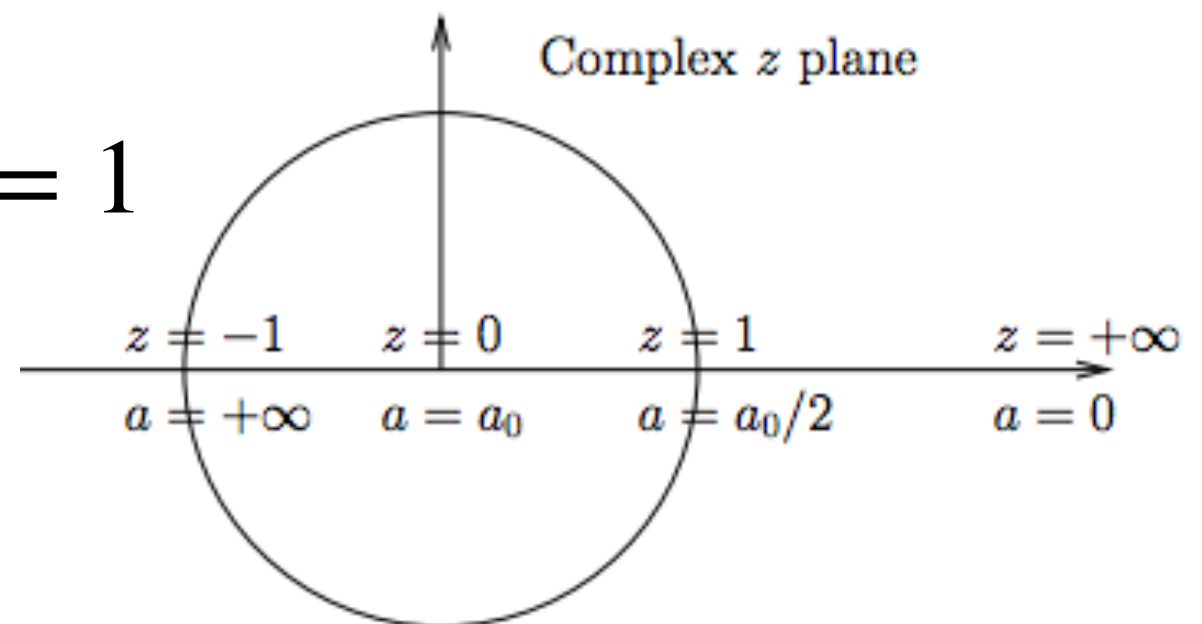
## 1. Distância de luminosidade

$$d_L = d_H z \left[ 1 - \frac{1}{2} (q_0 - 1) z + \frac{1}{6} (q_0 + 3q_0^2 - j_0 - \Omega_0) z^2 + \dots \right]$$

## 2. Distância de diâmetro angular

$$d_A = d_H z \left[ 1 - \frac{1}{2} (3 + q_0) z + \frac{1}{6} (12 + 7q_0 + 3q_0^2 - j_0 - \Omega_0) z^2 + \dots \right]$$

**Raio de convergência:  $|z| = 1$**



# Cosmografia ( $y$ -redshift)

Mudança de variável

$$1 - y = \frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{a}{a_0} = \frac{1}{1 + z} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{z}{1 + z}$$

**Passado:**  $z \in (0, \infty) \quad \Rightarrow \quad y \in (0, 1)$

**Futuro:**  $z \in (-1, 0) \quad \Rightarrow \quad y \in (-\infty, 0)$

$$1 - y = 1 + H_0 (t - t_0) - \frac{1}{2} q_0 H_0^2 (t - t_0)^2 + \dots$$

# Cosmografia ( $y$ -redshift)

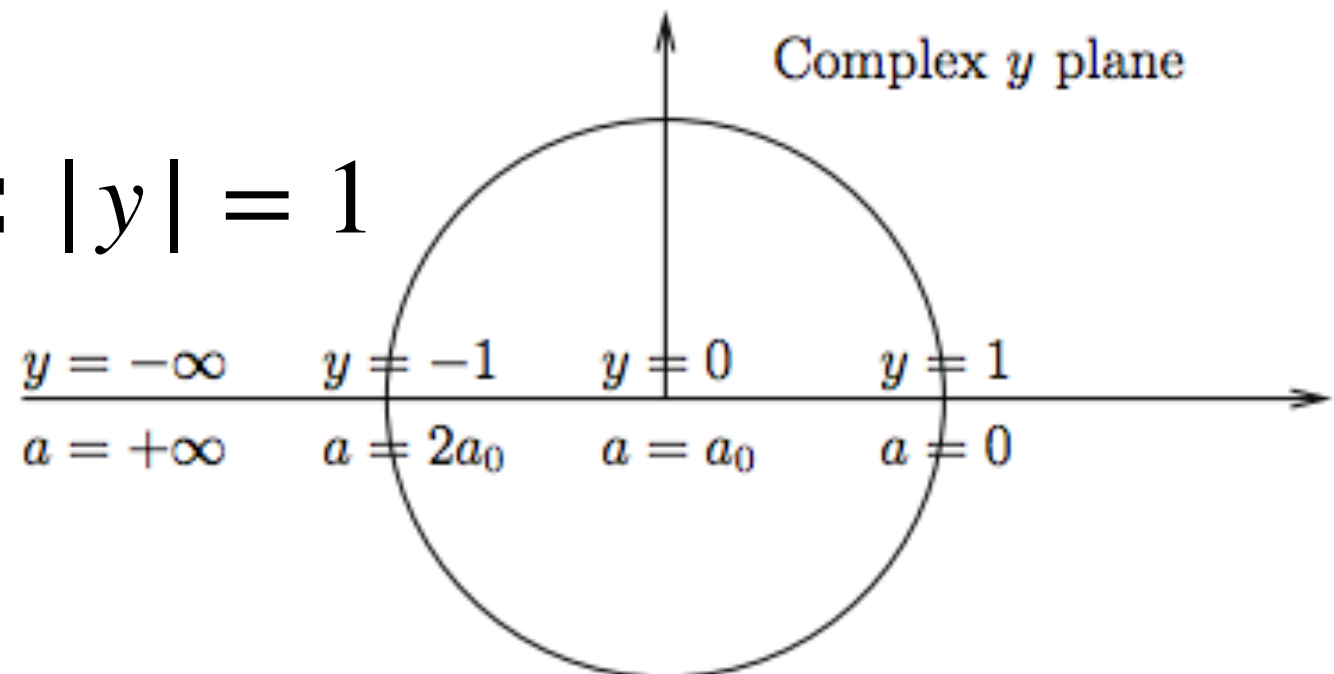
## 1. Distância de luminosidade

$$d_L = d_H y \left[ 1 - \frac{1}{2} (q_0 - 3) y + \frac{1}{6} (12 - 5q_0 + 3q_0^2 - j_0 - \Omega_0) y^2 + \dots \right]$$

## 2. Distância de diâmetro angular

$$d_A = d_H z \left[ 1 - \frac{1}{2} (1 + q_0) z + \frac{1}{6} (q_0 + 3q_0^2 - j_0 - \Omega_0) y^2 + \dots \right]$$

**Raio de convergência:**  $|y| = 1$



# Dados observacionais

## 1. Medida local de $H_0$

Medidas locais independente de modelo

**A. G. Riess et al. (2011):**  $H_0 = 73.8 \pm 2.4$

**A. G. Riess et al. (2016):**  $H_0 = 73.24 \pm 1.74$

**A. G. Riess et al. (2018):**  $H_0 = 73.52 \pm 1.62$

## 2. Cronômetros cósmicos

Medidas independente de modelo da idade diferencial de galáxias velhas

$$H(z) = -\frac{1}{1+z} \frac{dz}{dt}$$

Fornece dados do parâmetro de Hubble!

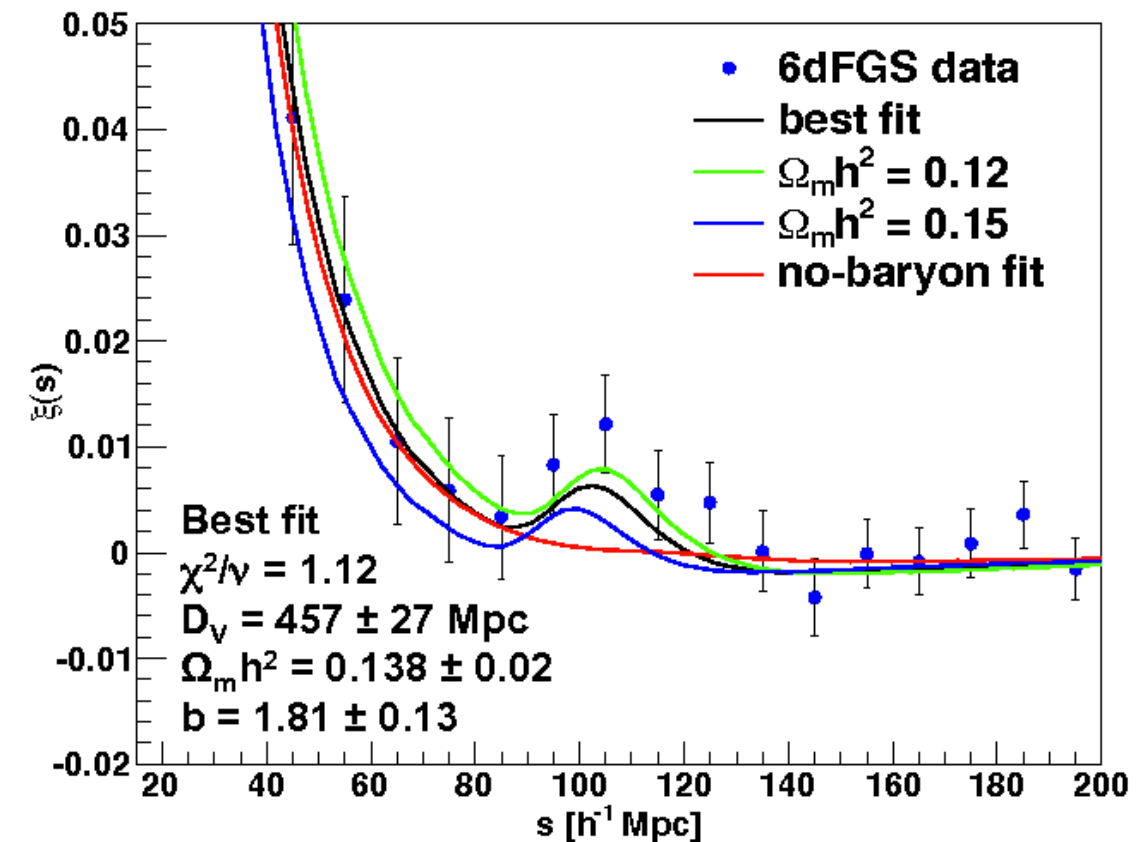
# Dados observacionais

| $z$    | $H(z)$ | $\sigma_{H(z)}$ | Ref. | $z$    | $H(z)$ | $\sigma_{H(z)}$ | Ref. | $z$   | $H(z)$ | $\sigma_{H(z)}$ | Ref. |
|--------|--------|-----------------|------|--------|--------|-----------------|------|-------|--------|-----------------|------|
| 0.07   | 69.0   | 19.6            | [73] | 0.4    | 95.0   | 17.0            | [74] | 0.875 | 125.0  | 17.0            | [75] |
| 0.09   | 69.0   | 12.0            | [74] | 0.4004 | 77.0   | 10.2            | [76] | 0.88  | 90.0   | 40.0            | [77] |
| 0.12   | 68.6   | 26.2            | [73] | 0.4247 | 87.1   | 11.2            | [76] | 0.9   | 117.0  | 23.0            | [74] |
| 0.17   | 83.0   | 8.0             | [74] | 0.4497 | 92.8   | 12.9            | [76] | 1.037 | 154.0  | 20.0            | [75] |
| 0.179  | 75.0   | 4.0             | [75] | 0.47   | 89.0   | 49.6            | [78] | 1.3   | 168.0  | 17.0            | [74] |
| 0.199  | 75.0   | 5.0             | [75] | 0.4783 | 80.9   | 9.0             | [76] | 1.363 | 160.0  | 33.6            | [79] |
| 0.2    | 72.9   | 29.6            | [73] | 0.48   | 97.0   | 62.0            | [77] | 1.43  | 177.0  | 18.0            | [74] |
| 0.27   | 77.0   | 14.0            | [74] | 0.593  | 104.0  | 13.0            | [75] | 1.53  | 140.0  | 14.0            | [74] |
| 0.28   | 88.8   | 36.6            | [73] | 0.68   | 92.0   | 8.0             | [75] | 1.53  | 202.0  | 40.0            | [74] |
| 0.352  | 83.0   | 14.0            | [75] | 0.781  | 105.0  | 12.0            | [75] | 1.75  | 186.0  | 50.4            | [79] |
| 0.3802 | 83.0   | 13.5            | [76] |        |        |                 |      |       |        |                 |      |

# Dados observacionais

## 3. Oscilações acústicas bariônicas

Imprint na distribuição de galáxias devido a perturbações no plasma primordial



**Horizonte do som:**  $r_s = \int_0^{a_{\text{drag}}} \frac{c_s(a)}{H a^2} da$

**Spherically-averaged distance:**  $D_V = \left[ (1+z)^2 d_A^2 \frac{z}{H} \right]^{1/3}$

# Dados observacionais

| Catalog      | $z$   | BAO variable                                                   | BAO measurement    | $\sigma_{BAO}$  | $r_s^{fid}$ | Ref. |
|--------------|-------|----------------------------------------------------------------|--------------------|-----------------|-------------|------|
| 6dFGS        | 0.106 | $\frac{r_s}{D_V}$                                              | 0.327              | 0.015           | *           | [47] |
| SDSS DR7 MGS | 0.15  | $D_V \frac{r_s^{fid}}{r_s}$                                    | 4.47               | 0.16            | 148.69      | [48] |
| BOSS-LOWZ    | 0.32  | $D_V \frac{r_s^{fid}}{r_s}$                                    | 8.47               | 0.17            | 149.28      | [49] |
| BOSS-DR12    | 0.38  | $D_A (1+z) \frac{r_s^{fid}}{r_s}$                              | 1512.39            | 25.00           | 147.78      | [50] |
|              |       | $H \frac{r_s^{fid}}{r_s}$                                      | 81.2087            | 2.3683          |             |      |
|              | 0.51  | $D_A (1+z) \frac{r_s^{fid}}{r_s}$<br>$H \frac{r_s^{fid}}{r_s}$ | 1975.22<br>90.9029 | 30.10<br>2.3288 |             |      |
| WiggleZ      | 0.61  | $D_A (1+z) \frac{r_s^{fid}}{r_s}$<br>$H \frac{r_s^{fid}}{r_s}$ | 2306.68<br>98.9647 | 37.08<br>2.5019 | 148.6       | [51] |
|              | 0.44  | $D_V \frac{r_s^{fid}}{r_s}$                                    | 1716               | 83              |             |      |
|              | 0.60  |                                                                | 2221               | 101             |             |      |
| BOSS-CMASS   | 0.73  |                                                                | 2516               | 86              | 149.28      | [49] |
|              | 0.57  | $D_V \frac{r_s^{fid}}{r_s}$                                    | 13.77              | 0.13            |             |      |

# Dados observacionais

## 4. Supernovas do tipo Ia

Magnitude aparente

$$m_1 - m_2 = -\frac{5}{2} \log_{10} \left( \frac{\mathcal{F}_1}{\mathcal{F}_2} \right)$$

Magnitude absoluta

**Módulo de distância**  $m - M = 5 \log_{10} \left( \frac{d_L}{10pc} \right)$

Módulo de distância teórico em Mpc

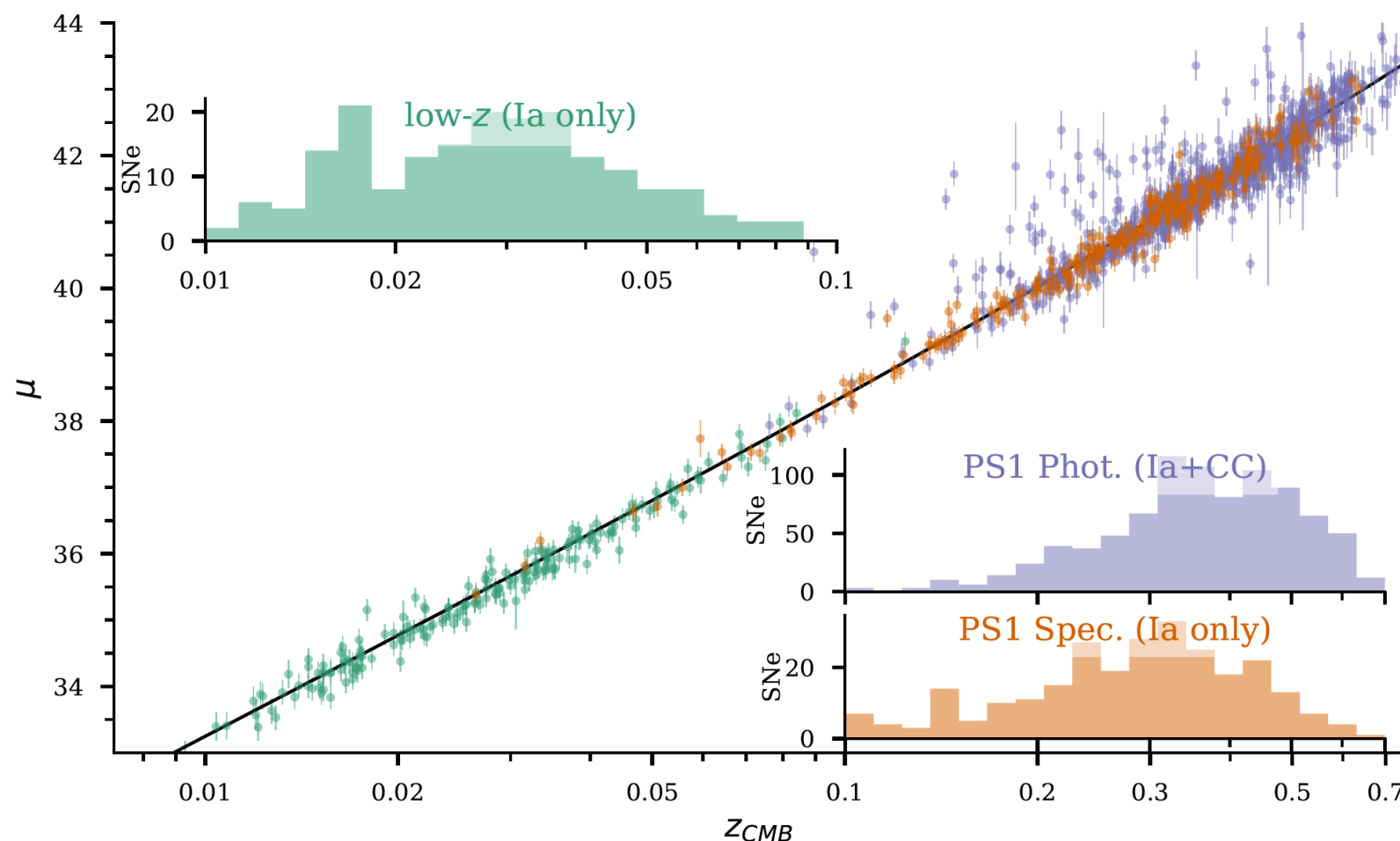
$$\mu^{th.} = 5 \log_{10} \left[ (1+z) \int_0^z \frac{d\tilde{z}}{H(\tilde{z})} \right] + 25$$

# Dados observacionais

## 4. Supernovas do tipo Ia

Módulo de distância observacional

$$\mu^{obs.} = m_B - M_B$$



# Dados observacionais

## 4. Radiação cósmica de fundo

Como as flutuações da CMB são da ordem de  $10^{-5}$ , sua descrição deve ser feita com análise perturbativa de primeira ordem

Métrica de FLRW com perturbações

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[ - (1 + 2\phi) d\eta^2 + (1 - 2\psi) dx^i dx_i \right]$$

Gauge newtoniano

# Dados observacionais

## 4. Radiação cósmica de fundo

### Espectro de potência das anisotropias da CMB

$$C_l = \frac{1}{2\pi} \int \frac{1}{k} \Theta_l^2(\eta_0, k) \mathcal{P}_R(k) dk$$

$$\Theta_l(\eta_0, k) \approx \underbrace{\left[ \Theta_0(\eta_{dec}, k) + \psi(\eta_{dec}, k) \right] j_l \left[ k(\eta_0 - \eta_{dec}) \right]}_{\text{Efeito Sachs-Wolfe}} + \underbrace{\frac{1}{k} \theta_b j'_l \left[ k(\eta_0 - \eta_{dec}) \right] + \int_{\eta_{dec}}^{\eta_0} \left[ \phi'(\eta, k) + \psi'(\eta, k) \right] j_l \left[ k(\eta_0 - \eta) \right] d\eta}_{\text{Efeito Doppler}}$$

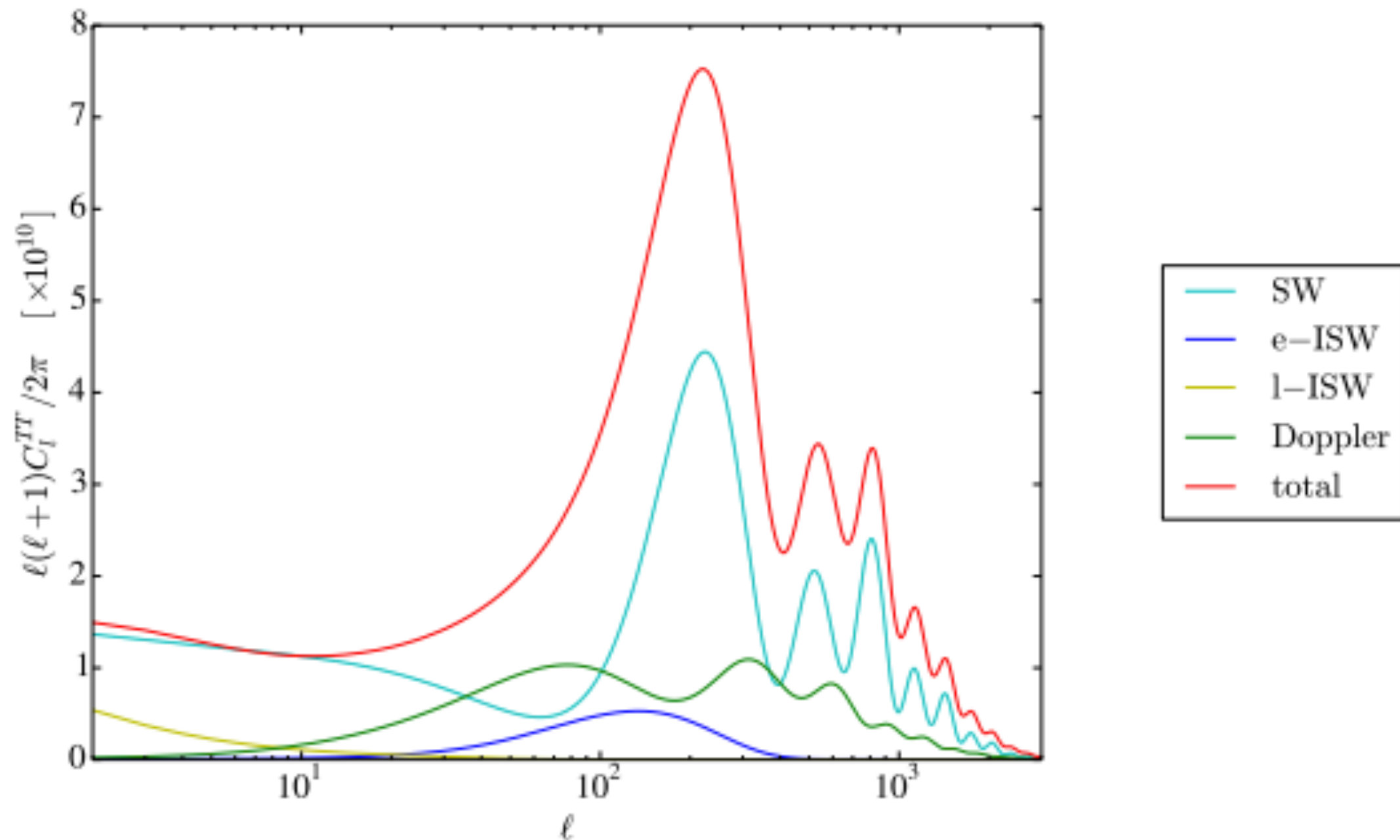
**Efeito Sachs-Wolfe**

**Efeito Doppler**

**Efeito Sachs-Wolfe Integrado**

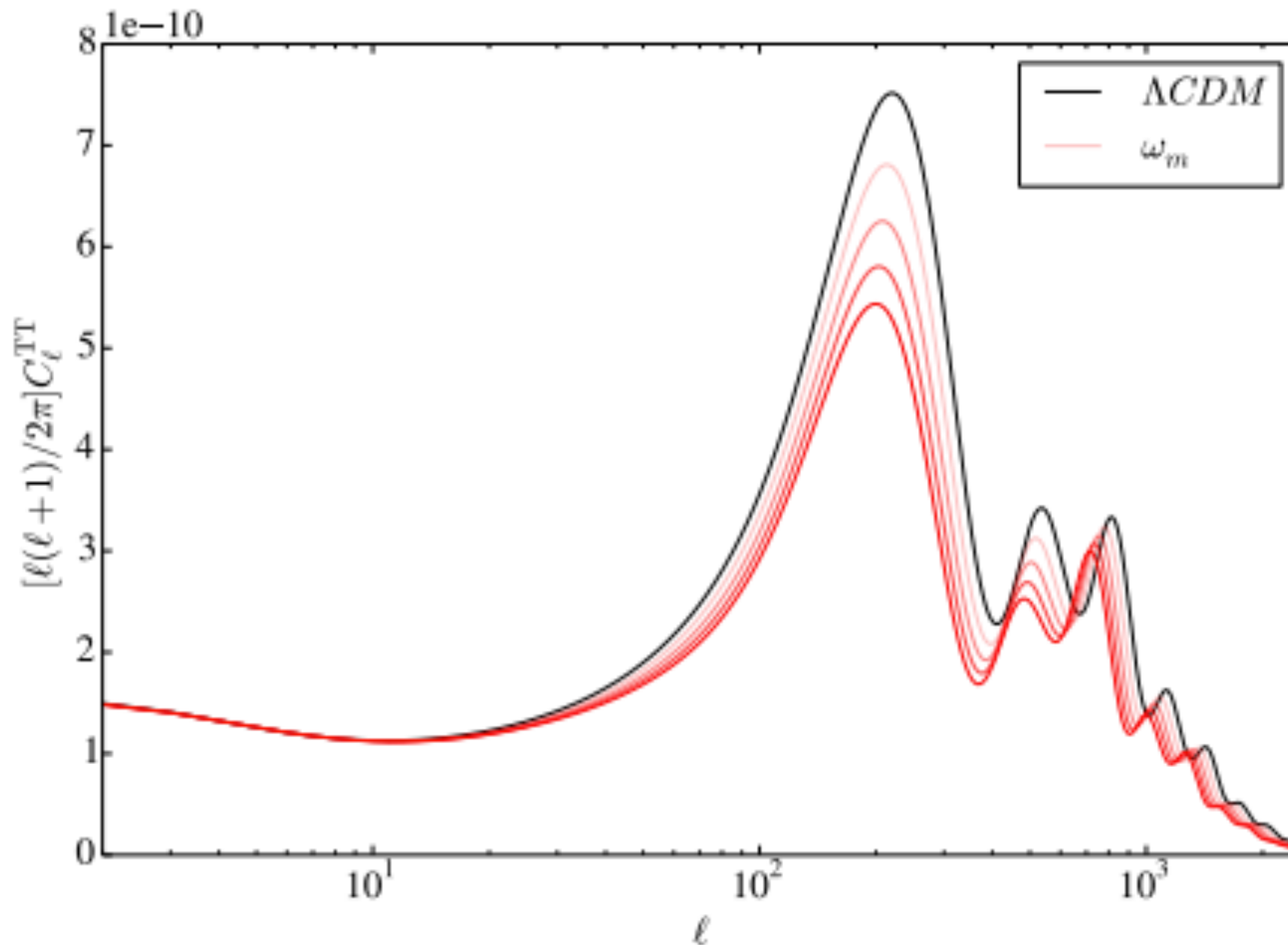
# Dados observacionais

## 4. Radiação cósmica de fundo



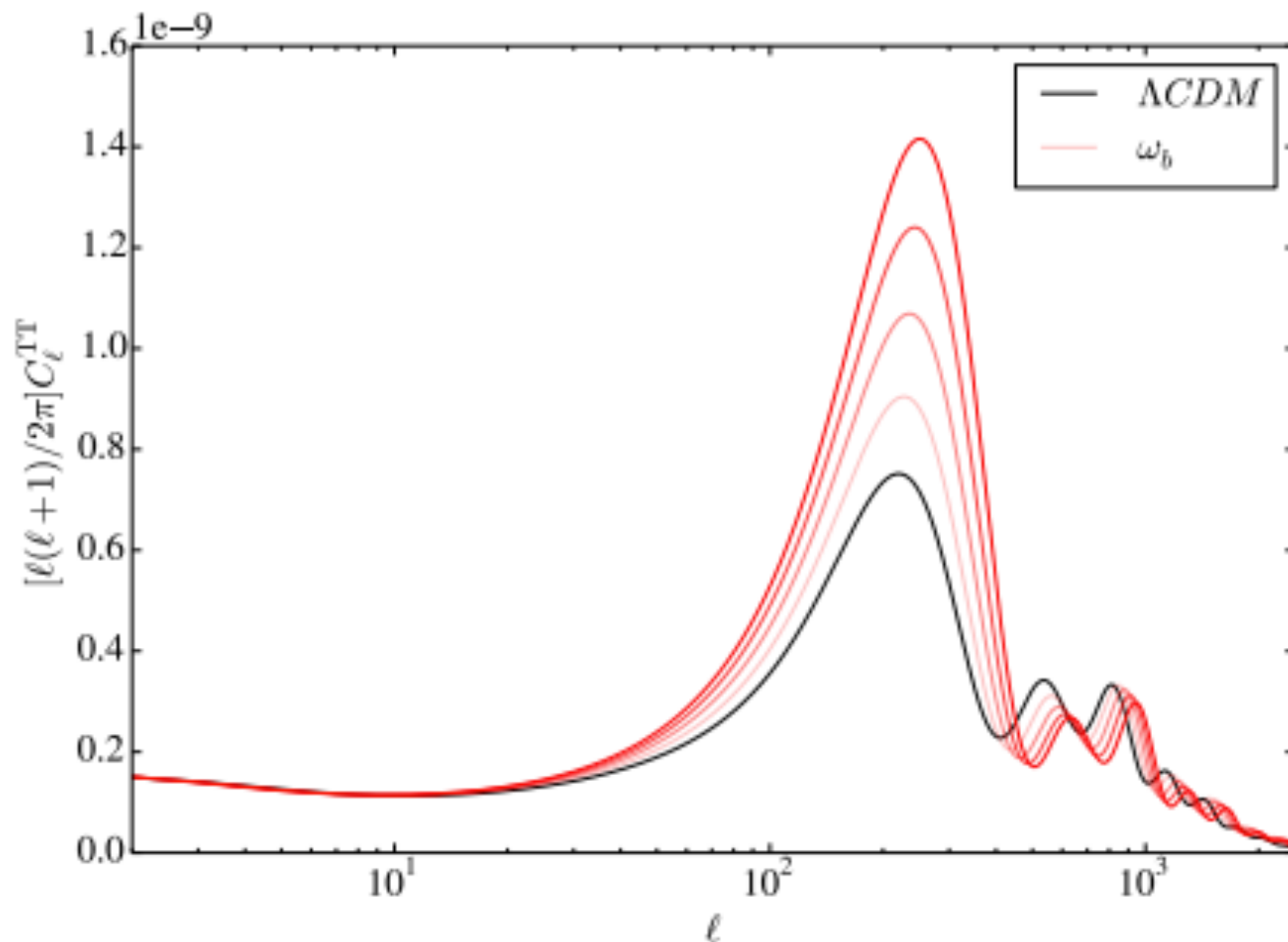
# Influência dos parâmetros cosmológicos na CMB

## 1. Matéria escura



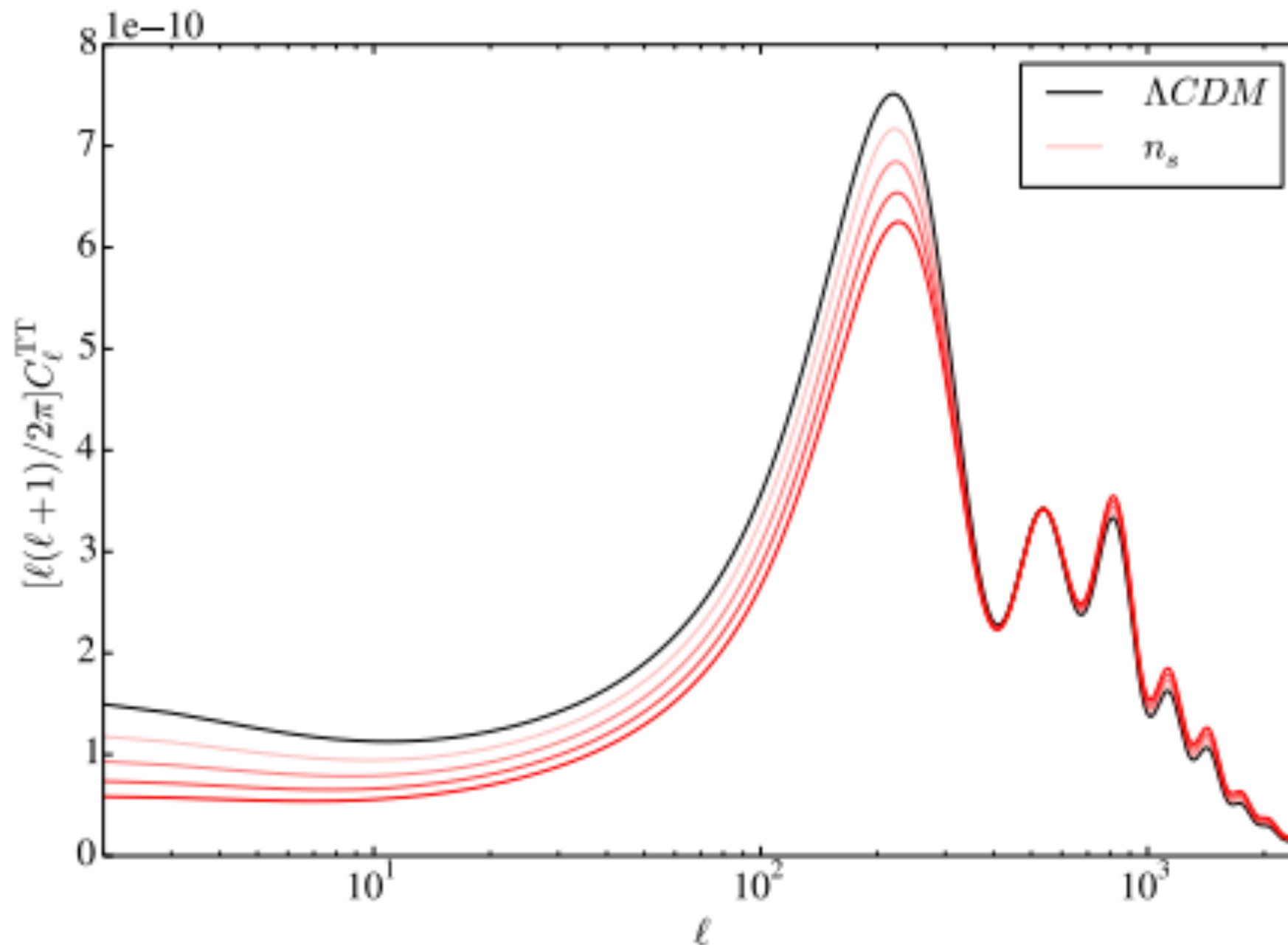
# Influência dos parâmetros cosmológicos na CMB

## 2. Matéria bariônica



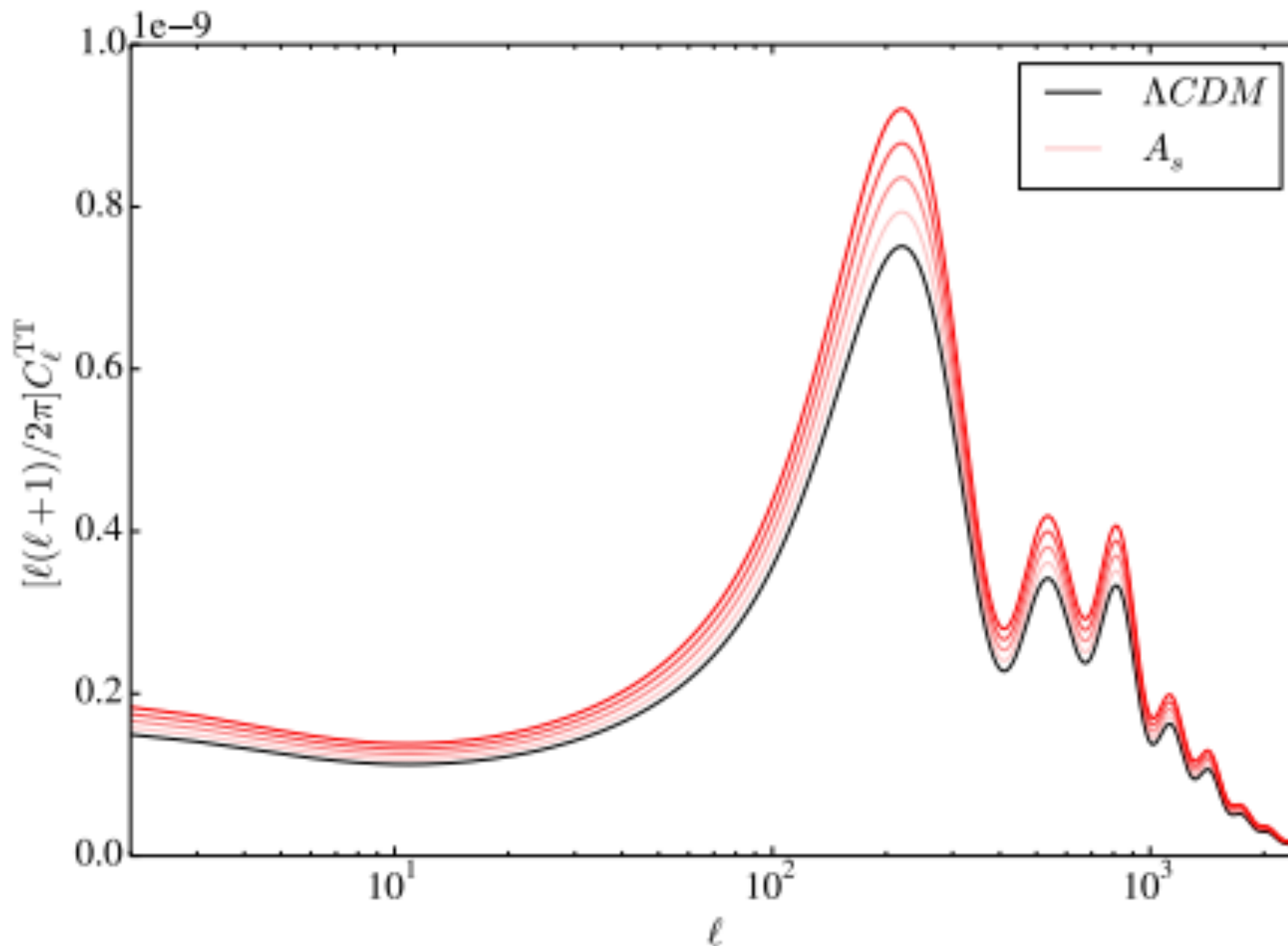
# Influência dos parâmetros cosmológicos na CMB

## 3. Índice espectral



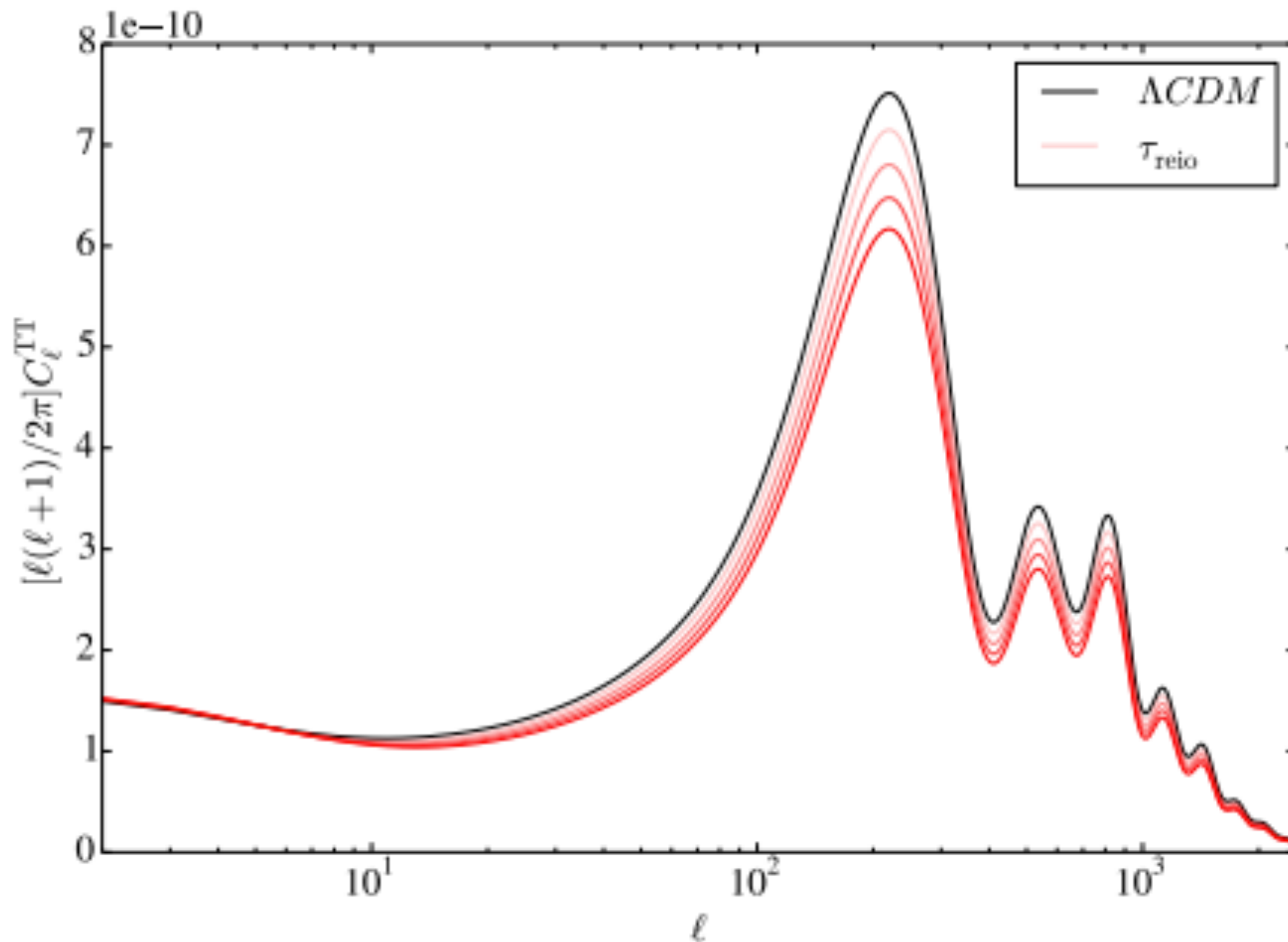
# Influência dos parâmetros cosmológicos na CMB

## 4. Amplitude das perturbações primordiais



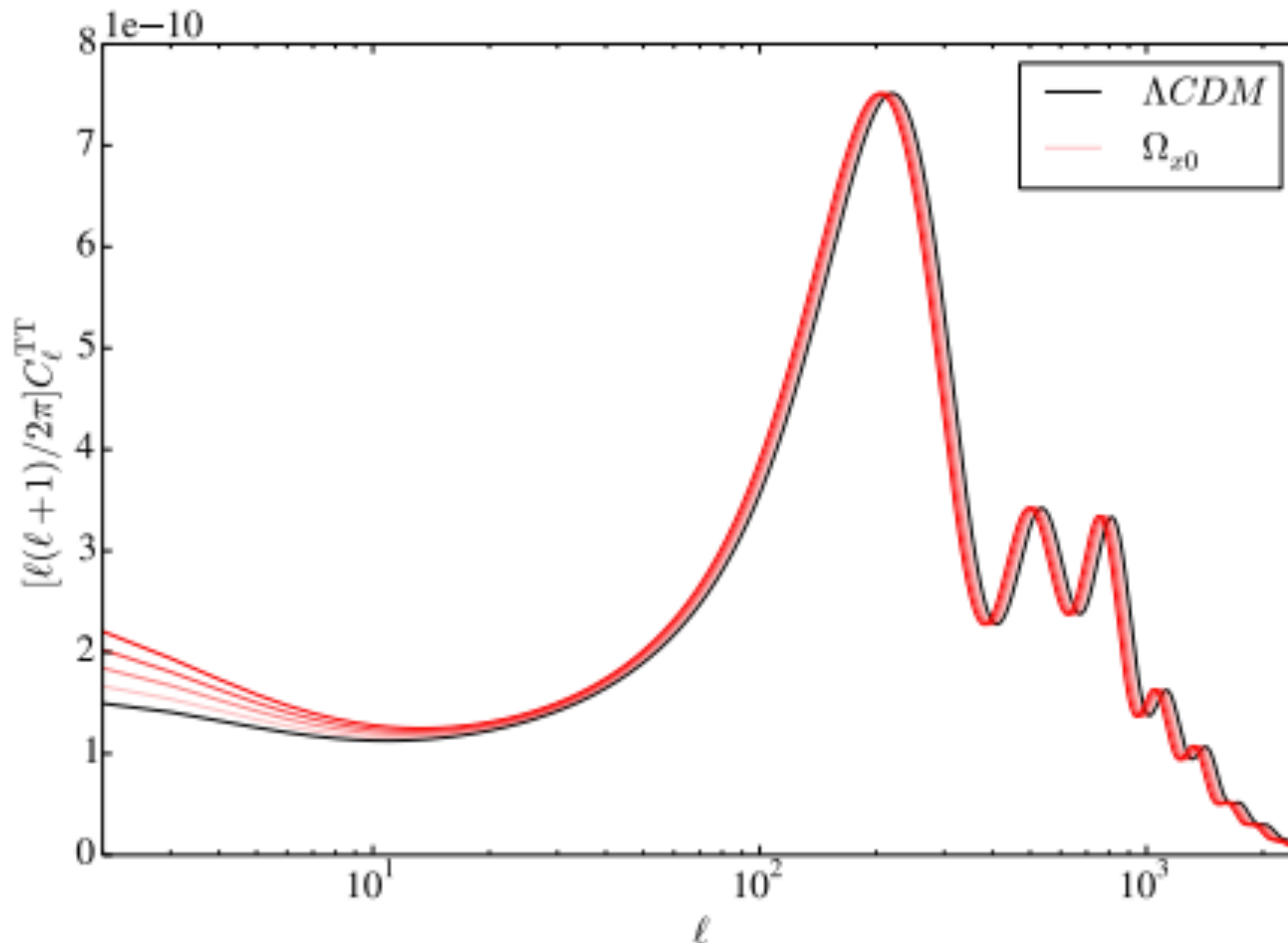
# Influência dos parâmetros cosmológicos na CMB

## 5. Tempo da reionização

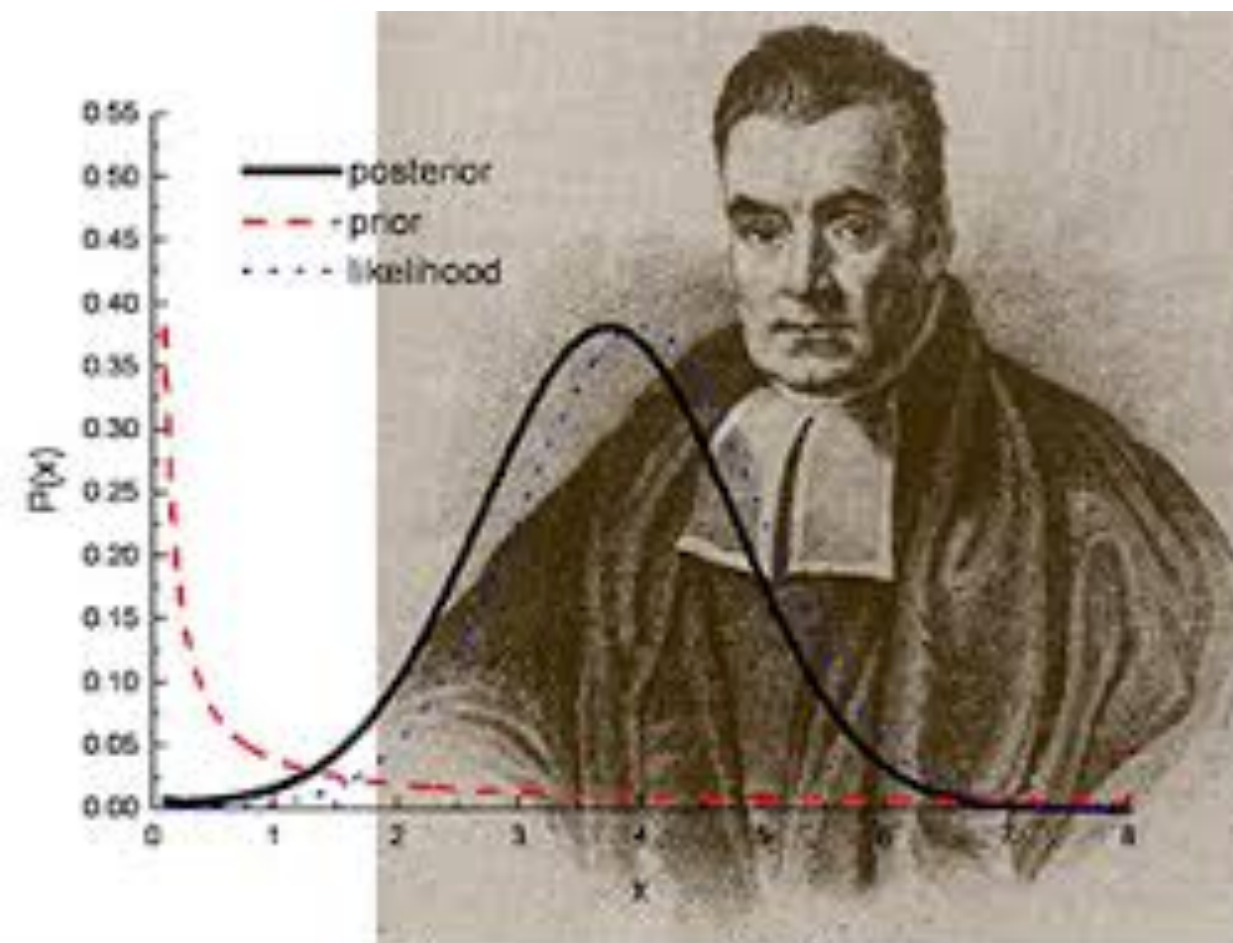


# Influência dos parâmetros cosmológicos na CMB

## 6. Energia escura (Parâmetro de Hubble)



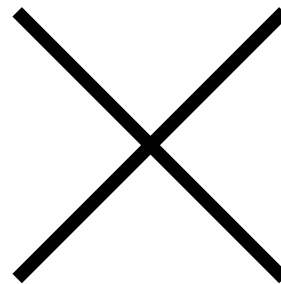
# Inferência Bayesiana



# Paradigma estatístico

## Frequentista

1. Parâmetros desconhecidos são considerados fixos;
2. Análise estatística baseada na informação contida nos dados observacionais;
3. Viabilidade de um experimento caso ele seja repetido, sobre as mesmas condições, várias vezes;
4. Maximização da Likelihood;



## Bayesiano

1. Abordagem subjetiva que se utiliza de probabilidades para quantificar a incerteza de uma quantidade;
2. Combina informações subjetivas a priori com informação dos dados observacionais;
3. Inferência é feita através das distribuições a posteriori das quantidades de interesse;
4. Teorema de Bayes;

# Probabilidade condicional

A e B são eventos correlacionados distintos com probabilidades não nulas

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A|B) \times \mathcal{P}(B)$$

Equivalentemente,

$$\mathcal{P}(B \cap A) = \mathcal{P}(B|A) \times \mathcal{P}(A)$$

Combinando as equações anteriores

$$\mathcal{P}(A|B) = \frac{\mathcal{P}(B|A) \times \mathcal{P}(A)}{\mathcal{P}(B)}$$

Teorema de Bayes

# Teorema de Bayes

Problema: Como explicar um conjunto de dados  $D$  com um modelo  $M$  que é descrito através de um conjunto de parâmetros  $\theta$ ?

## Teorema de Bayes

$$\mathcal{P}(\theta | D, M) = \frac{\mathcal{P}(D | \theta, M) \times \mathcal{P}(\theta | M)}{\mathcal{P}(D | M)}$$

$\mathcal{P}(\theta | D, M) \rightarrow$  **Posterior**

$\mathcal{P}(D | \theta, M) \rightarrow$  **Likelihood**

$\mathcal{P}(\theta | M) \rightarrow$  **Prior**

$\mathcal{P}(D | M) \rightarrow$  **Evidência**

# Análise estatística

Seleção de parâmetros:

$$\mathcal{P}(\theta|D, M) \propto \mathcal{P}(D|\theta, M) \times \mathcal{P}(\theta|M)$$

Seleção de modelos:

Fator de Bayes

$$BF = \frac{\mathcal{P}(D|M_1)}{\mathcal{P}(D|M_2)}$$

Comparação da  
evidência  
dos dados  $\theta$  para os  
modelos  $M_1$  x  $M_2$

|                                |                   |
|--------------------------------|-------------------|
| $0 < \text{Log } B_{10} < 1$   | No evidence       |
| $1 < \text{Log } B_{10} < 2.5$ | Weak evidence     |
| $2.5 < \text{Log } B_{10} < 5$ | Strong evidence   |
| $\text{Log } B_{10} > 5$       | Decisive evidence |

# Markov Chain Monte Carlo

Método(s) para obter distribuição de probabilidades

1. Ideal para problemas com muitos parâmetros livres;
2. Distribuições a serem simuladas não precisam estar normalizadas (não é necessário computar a evidência!)

# Metropolis-Hasting

## Características:

1. Pontos satisfazem uma cadeia de Markov: o ponto  $x_{i+1}$  depende exclusivamente de  $x_i$ ;

Neste caso é possível mostrar que, para uma sequência infinita, cada ponto do conjunto de parâmetros é visitado com sua probabilidade

2. Função  $q(x_{i+1}|x_i)$  que, dado um ponto  $x_i$ , retorna um ponto  $x_{i+1}$ ;

## Princípio do balanceamento detalhado

$$\mathcal{P}(x') q(x|x') = \mathcal{P}(x) q(x'|x)$$

# Metropolis-Hasting

## Algoritmo

1. Inicialização em um ponto escolhido  $\theta_0$ ;
2. Obtenção de uma proposta  $\theta'$  para  $\theta_i$ ;
3. Obtenção de um número aleatório  $0 < \lambda < 1$  através de uma distribuição normal;

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Se} & \frac{\mathcal{P}(\theta' | D, M)}{\mathcal{P}(\theta_i | D, M)} > \lambda \quad \Rightarrow \quad \theta' = \theta_{i+1} \\ \text{Se não} & \Rightarrow \quad \theta_{i+1} = \theta_i \end{array} \right.$$

# Cálculo da evidência

## Nested sampling

A evidência pode ser escrita como

$$\mathcal{E} = \int \mathcal{L}(\theta) \pi(\theta) d\theta$$

## Mudança de variável

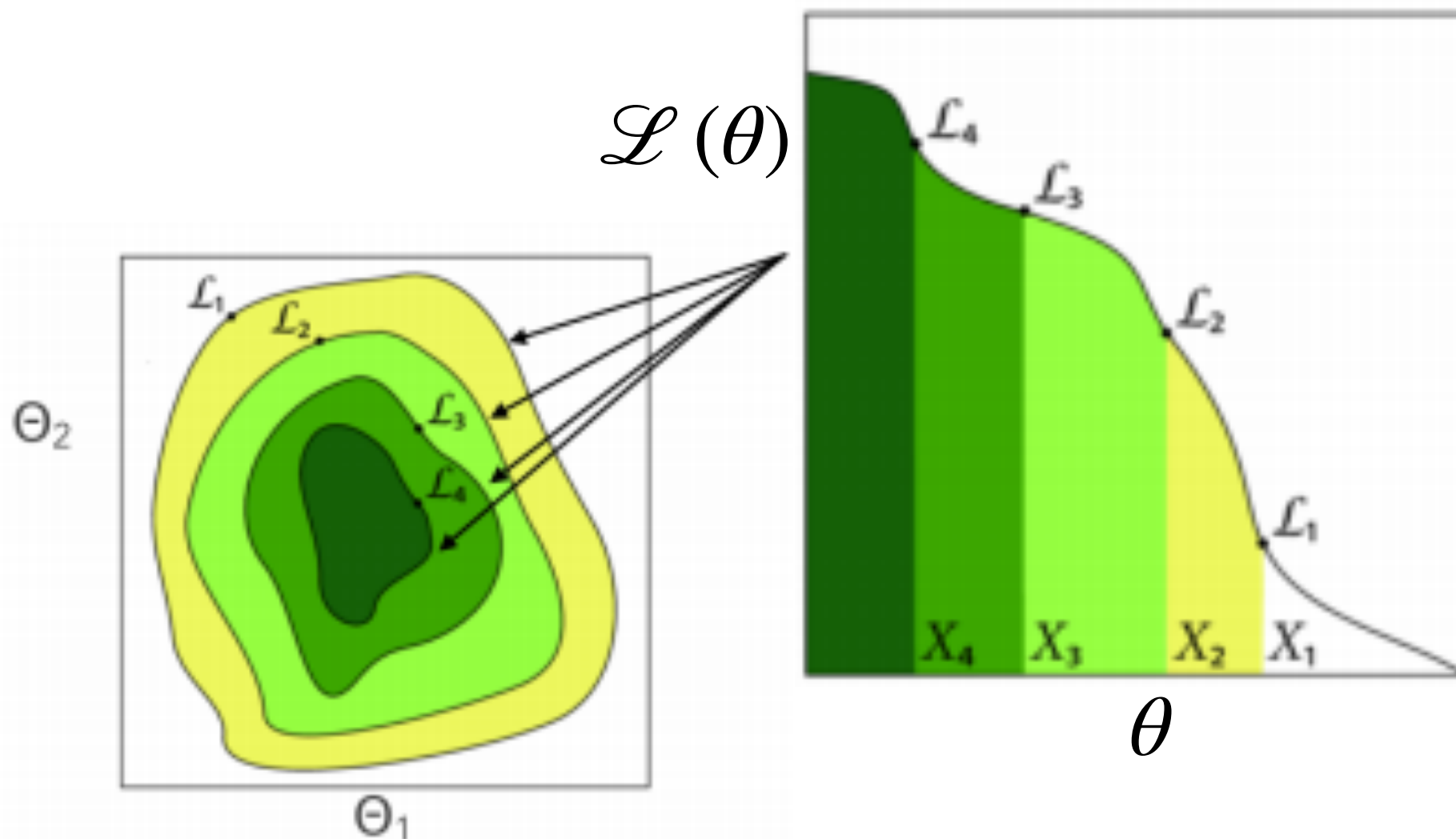
$$dX = \pi(\theta) d\theta \quad \mathbf{e} \quad X(\Theta) = \int_{\mathcal{L}(\theta) > \Theta} \pi(\theta) d\theta$$

A evidência pode ser reescrita como

$$\mathcal{E} = \int_0^1 \mathcal{L}(X) dX$$

# Cálculo da evidência

A evidência é computada para diferentes “pontos”  $X_i$ . A cada iteração procura-se um “ponto” com maior likelihood.





Muito obrigado!