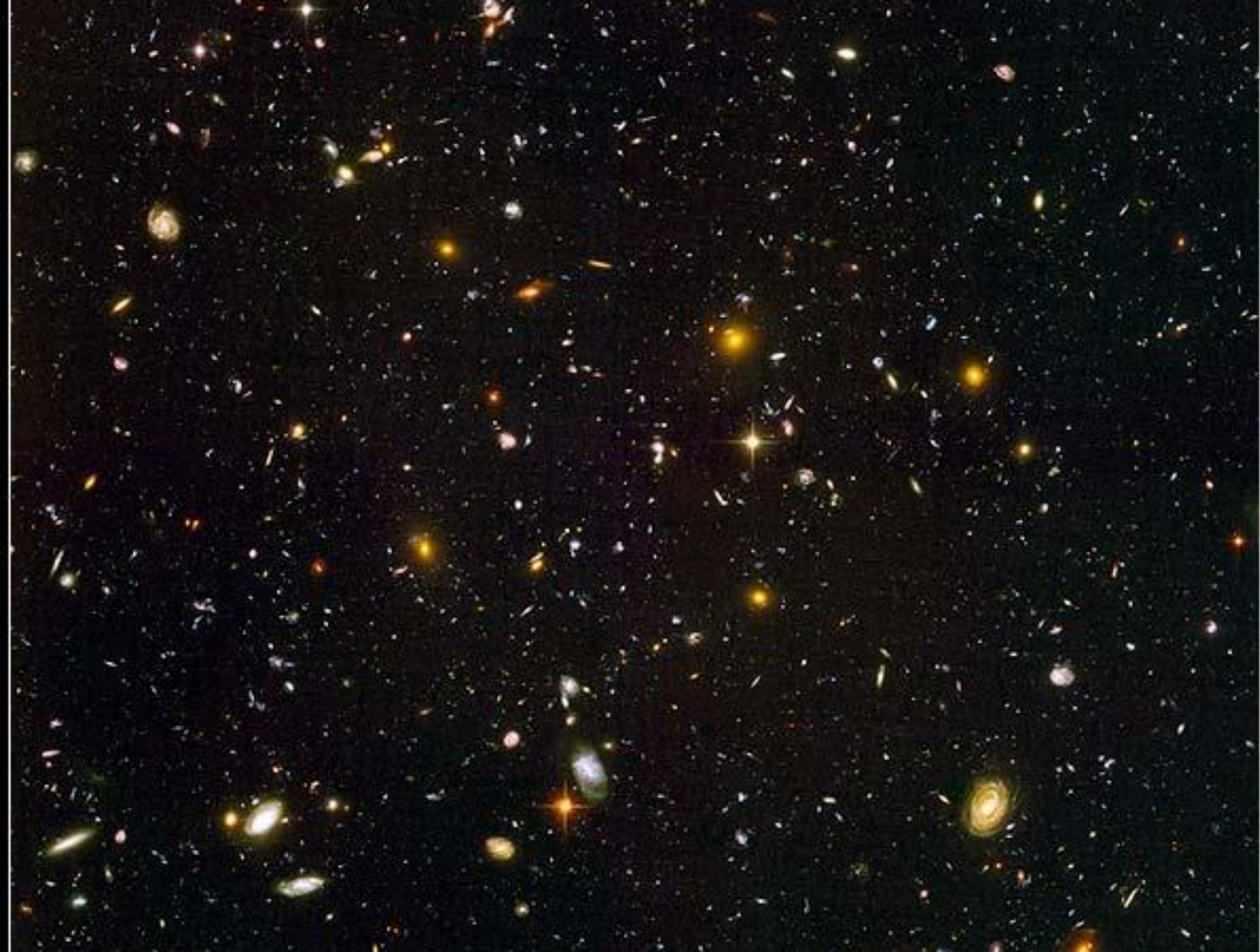




III Inverno Astrofísico, ES-2021

Gravitação e Cosmologia Quânticas

Nelson Pinto Neto

*Coordenação de Cosmologia, Astrofísica
e Interações Fundamentais
do*

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Luz e suas estranhas propriedades:

Relatividade Restrita - 1905

Velocidade da luz é a mesma para qualquer observador!!

$$c = 300.000 \text{ km/s}$$

Exemplos :

$$V = 50 \text{ Km/h}$$



$$V = 30 \text{ Km/h}$$



$$V_{rel} = 50 - 30 = 20 \text{ Km/h}$$

$$V = 50 \text{ Km/h}$$



$$V = 30 \text{ Km/h}$$



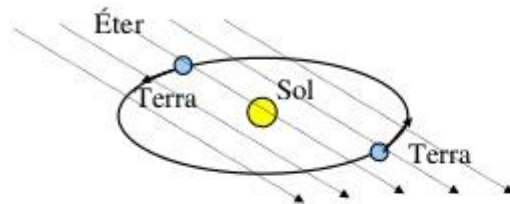
$$V_{rel} = 50 - (-30) = 80 \text{ Km/h}$$

Luz e a Relatividade Restrita: 1905

Velocidade da luz é a mesma em qualquer referencial!!

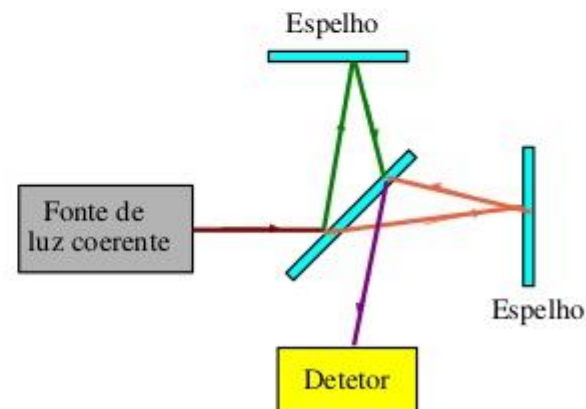
$$c = 300.000 \text{ km/s}$$

A experiência de Michelson-Morley



O propósito das experiências de Michelson (1881) e de Michelson e Morley (1887) foi de medir a variação da velocidade de luz devido a movimento relativo ao éter.

As experiências procuraram medir a interferência entre duas partes de um feixe de luz coerente que tinham propagadas ao longo de caminhos de comprimentos iguais mas em direções diferentes com respeito ao éter. O resultado foi nulo.



Se a velocidade da luz é independente do observador, o tempo é relativo!



Δt_2 – tempo medido pela nave

Δt_1 – tempo medido na terra

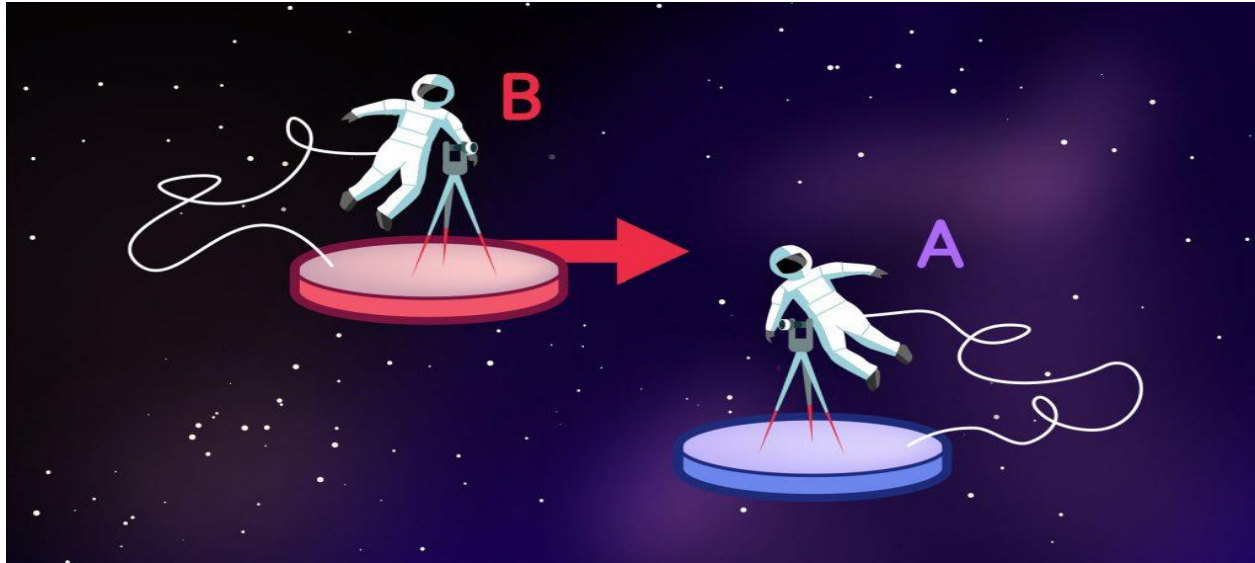
$$\Delta t_2 = \Delta t_1 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Joseph Hafele, Richard Keating (1971):
atraso de 0.1 microsegundos



Surge a Relatividade Restrita: Einstein

Mudanças entre referenciais (observadores) inerciais



Tempo relativo (dt), Espaço relativo (dl)

Espaço-Tempo absoluto (ds)

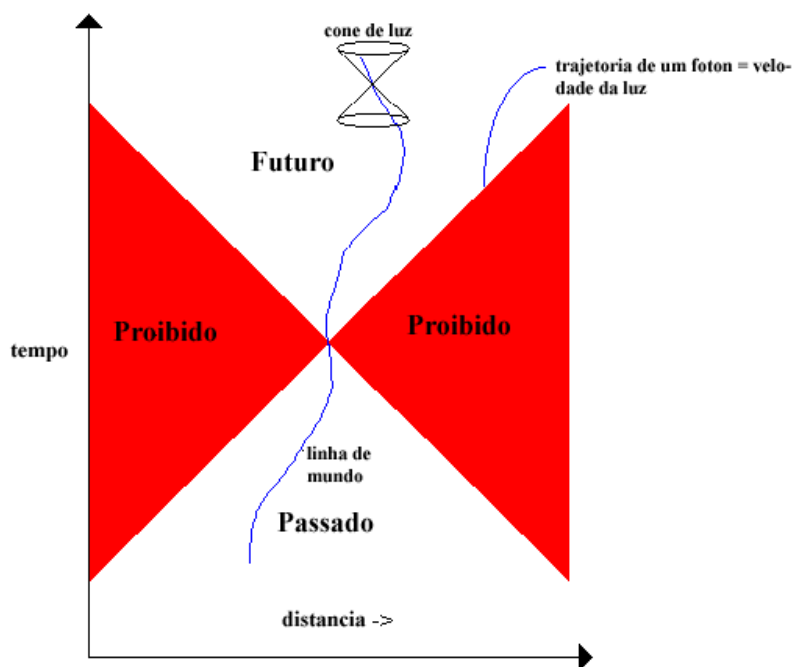
$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

(nenhum corpo material pode ter velocidade maior que a da luz).

É preciso energia infinita para acelerar um corpo massivo até atingir a velocidade da luz!

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$



O cone de luz é o que define a estrutura causal do espaço-tempo em relatividade restrita.

Cone de luz absoluto !

A RELATIVIDADE GERAL DE EINSTEIN

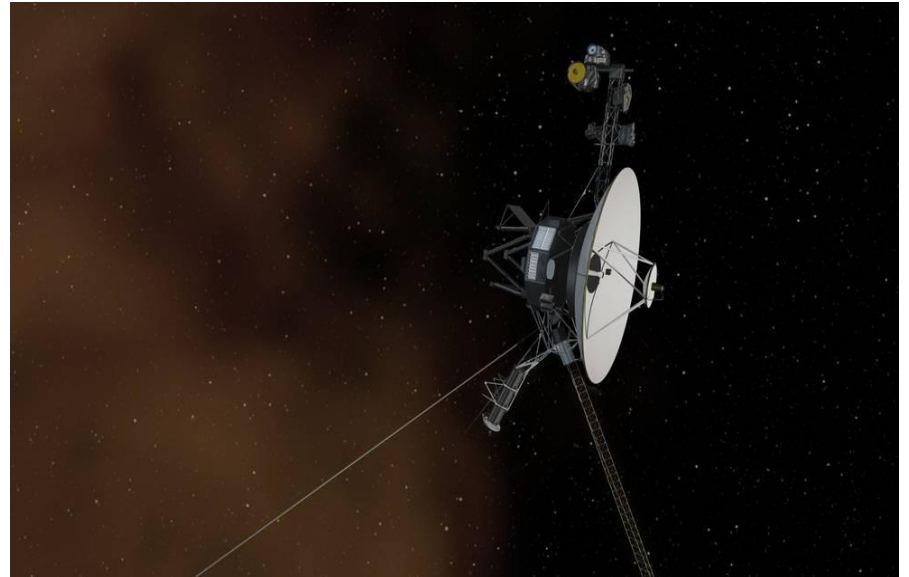
→ A gravidade atua em tudo que existe! E todos os corpos caem da mesma forma ao redor de uma grande massa dada, independentemente da sua constituição!



→ Os corpos livres também seguem todos a mesma trajetória, pela lei da inércia: a linha reta. Também independentemente da sua constituição!

Voyager: já saiu do sistema solar.

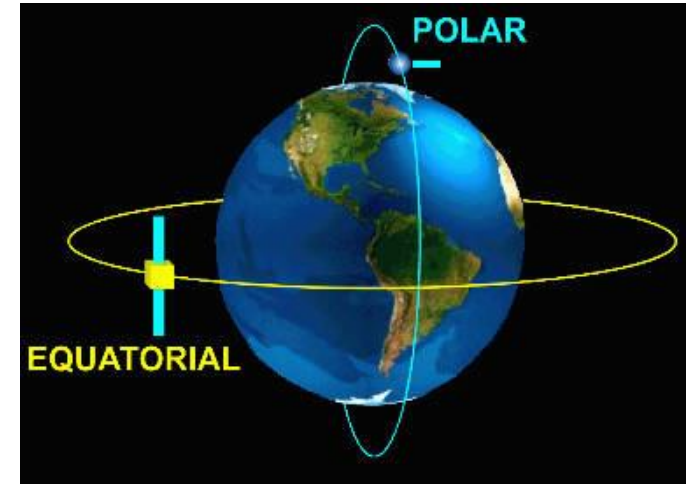
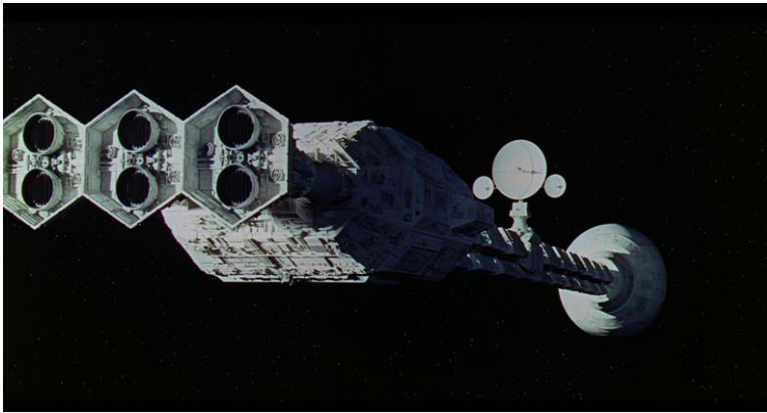
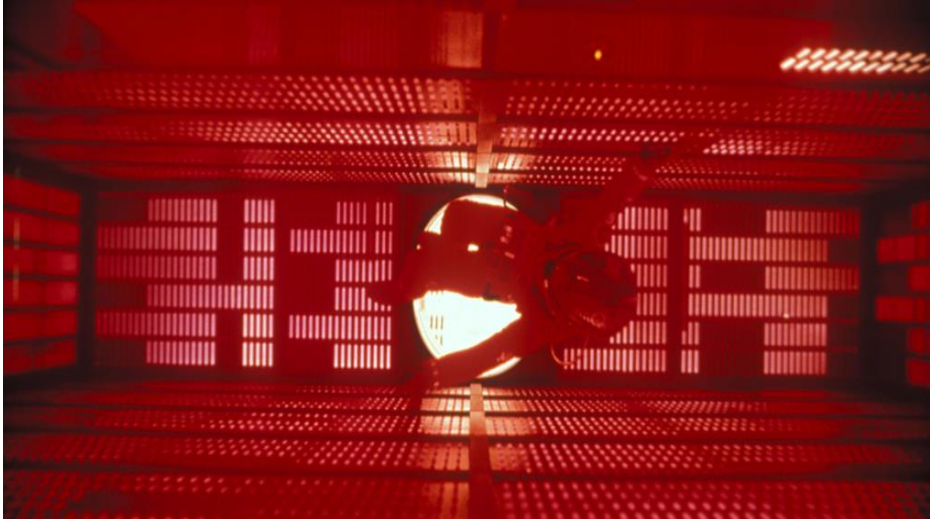
Sempre com velocidade constante.



A linha reta é a menor distância entre 2 pontos no plano.

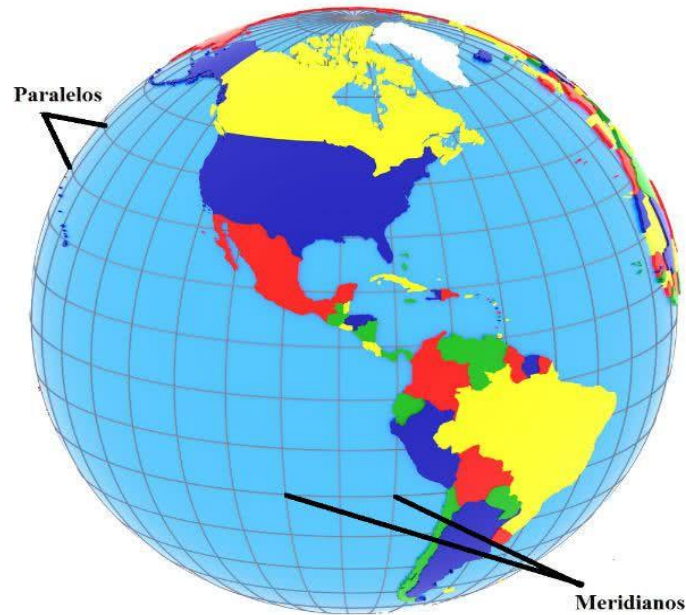
Ou seja, as partículas livres seguem as trajetórias de menor distância entre dois pontos.

Princípio da Equivalência



Um satélite orbitando a Terra parece uma nave livre no espaço sideral: tudo flutua, mas a trajetória da nave livre é curva!!

Mas numa superfície curva, a menor distância entre dois pontos não é uma reta, é uma curva!



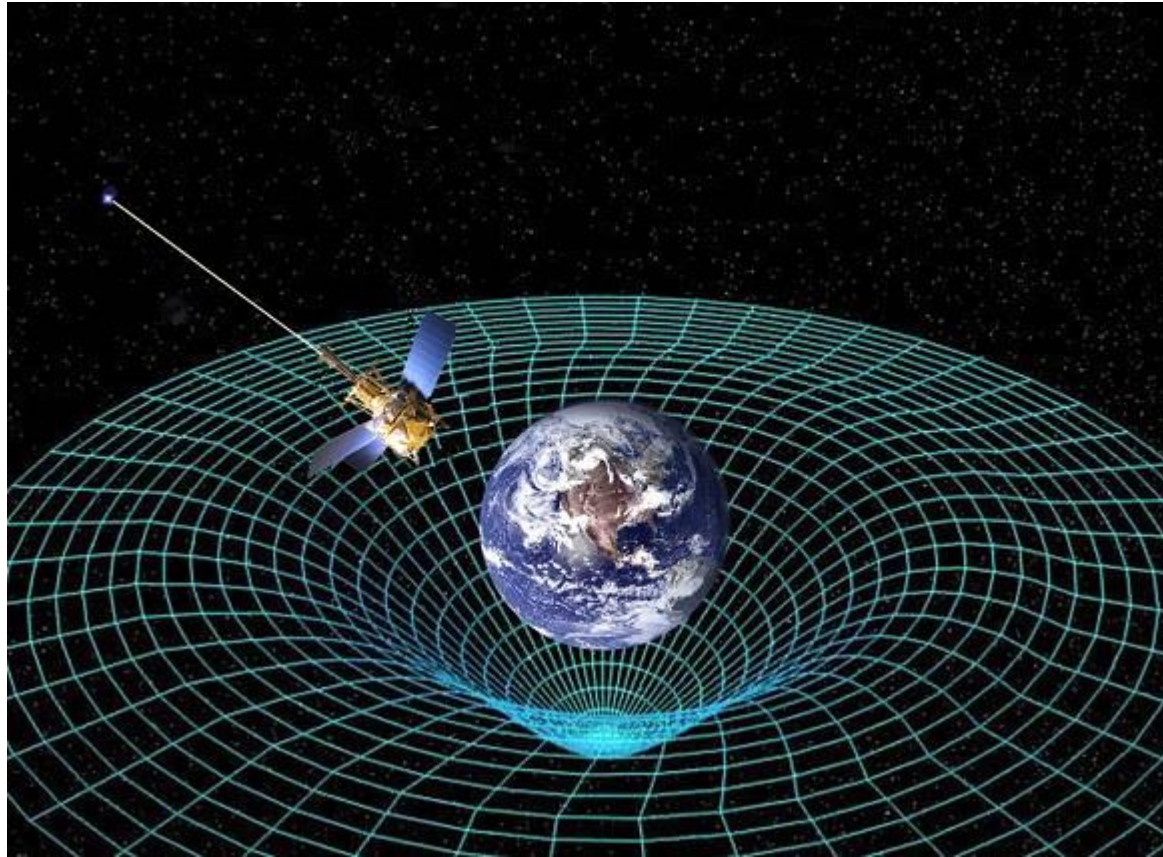
Gravitação não é uma força!

Uma grande massa curva o espaço-tempo ao seu redor!

Os corpos seguem livres, mas o espaço-tempo ao seu redor é curvo, e vão seguir a menor distância entre esses dois pontos, que é uma curva.

GRAVIDADE É A CURVATURA DO ESPAÇO-TEMPO!

ESPAÇO CURVO EM TORNO DA TERRA



As medidas de réguas e relógios e dependem da sua posição em relação a uma grande massa: **GPS**.

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x, t) dx^\alpha dx^\beta \quad \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3 \text{ soma em } \alpha, \beta$$

In General Relativity, the dynamical variables characterizing the gravitational field are the components of the metric $g_{\alpha\beta}(x^\nu)$ and they obey the Einstein equations:

$$G^\alpha_\beta \equiv R^\alpha_\beta - \frac{1}{2}\delta^\alpha_\beta R - \Lambda\delta^\alpha_\beta = 8\pi G T^\alpha_\beta. \quad (1.48)$$

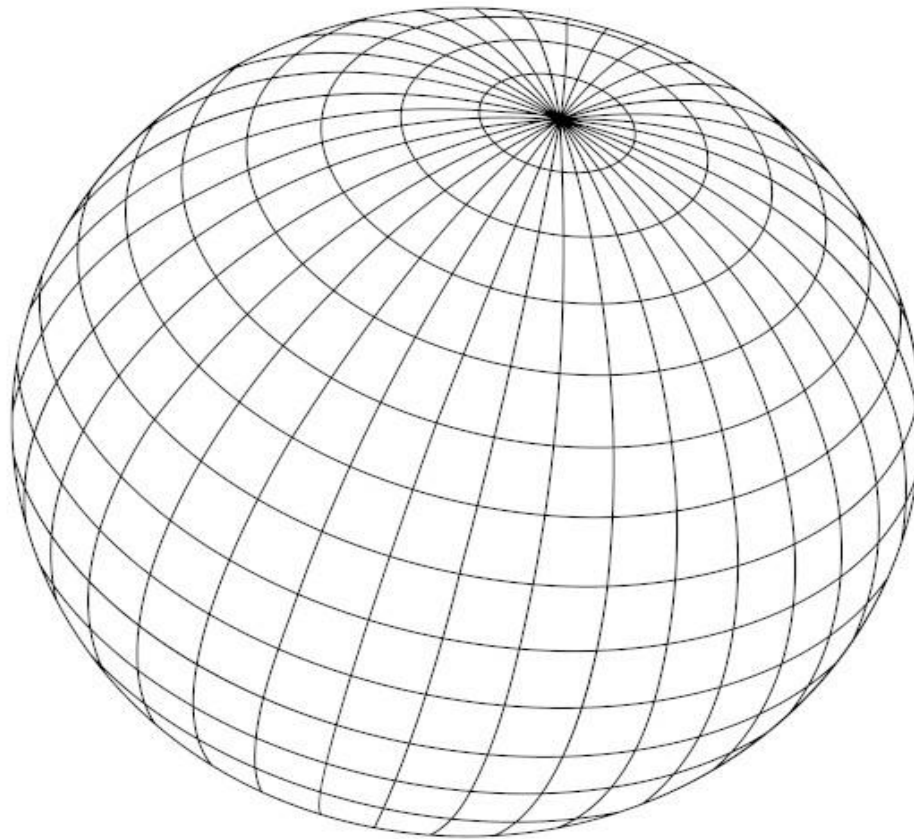
Here

$$R^\alpha_\beta = g^{\alpha\gamma} \left(\frac{\partial \Gamma^\delta_{\gamma\beta}}{\partial x^\delta} - \frac{\partial \Gamma^\delta_{\gamma\delta}}{\partial x^\beta} + \Gamma^\delta_{\gamma\beta} \Gamma^\sigma_{\delta\sigma} - \Gamma^\sigma_{\gamma\delta} \Gamma^\delta_{\beta\sigma} \right) \quad (1.49)$$

is the Ricci tensor expressed in terms of the inverse metric $g^{\alpha\gamma}$, defined via $g^{\alpha\gamma} g_{\gamma\beta} = \delta^\alpha_\beta$, and the Christoffel symbols

$$\Gamma^\alpha_{\gamma\beta} = \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} \left(\frac{\partial g_{\gamma\delta}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^\delta} \right). \quad (1.50)$$

The symbol δ^α_β denotes the unit tensor, equal to 1 when $\alpha = \beta$ and 0 otherwise; $R = R^\alpha_\alpha$ is the scalar curvature; and $\Lambda = \text{const}$ is the cosmological term. Matter



Escalar de Ricci de uma esfera: $R \propto 1/r^2$

Escala de curvatura: comprimento a partir do qual se começa a sentir a curvatura da geometria. $l_c \equiv 1/\sqrt{R} \sim r$

(In General Relativity the term “matter” is used for anything not the gravitational field.) This tensor is symmetric,

$$T^{\alpha\beta} \equiv g^{\beta\delta} T_{\delta}^{\alpha} = T^{\beta\alpha}, \quad (1.51)$$

and is (almost unambiguously) determined by the condition that the equations

$$\partial T^{\alpha\beta} / \partial x^{\beta} = 0 \quad (1.52)$$

must coincide with the equations of motion for matter in Minkowski spacetime. To generalize to curved spacetime, the equations of motion are modified:

$$T^{\alpha\beta}_{;\beta} \equiv \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha} T^{\gamma\beta} + \Gamma_{\gamma\beta}^{\beta} T^{\alpha\gamma} = 0, \quad (1.53)$$

where the terms proportional to Γ account for the gravitational field. Note that in General Relativity these equations do not need to be postulated separately. They follow from the Einstein equations as a consequence of the Bianchi identities satisfied by the Einstein tensor:

Primeira solução exata da Relatividade Geral: 1915-1916.

Karl Schwarzschild (1873-1916)

Campo gravitacional (geometria) exterior a um objeto esférico.



Schwarzschild's Solution to Einstein's Equations

Time Dilation

Radial Length Contraction

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{R_s}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

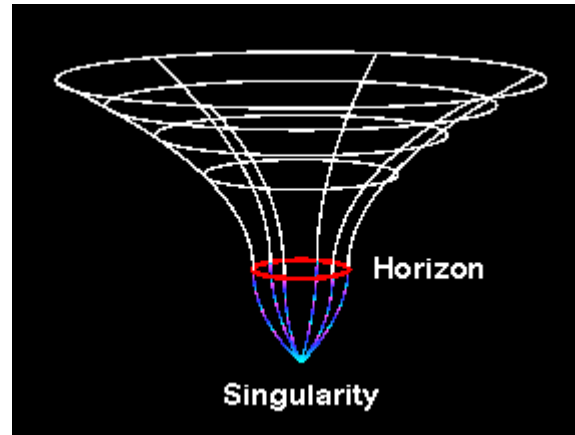
Invariant Line Element

Schwarzschild Radius

$$R_s = \frac{2GM}{c^2}$$

$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$
(nenhum corpo material pode ter
velocidade maior que a da luz).

Muito importante para estudar o movimento planetário ao redor sol, mas esta solução continha algo muito mais impressionante: uma região pequena dentro da qual nada escapa, nem a luz → **BURACOS NEGROS**



Duas singularidades:

$r = 0$ e

$$r = R_S = \frac{2GM}{c^2}$$

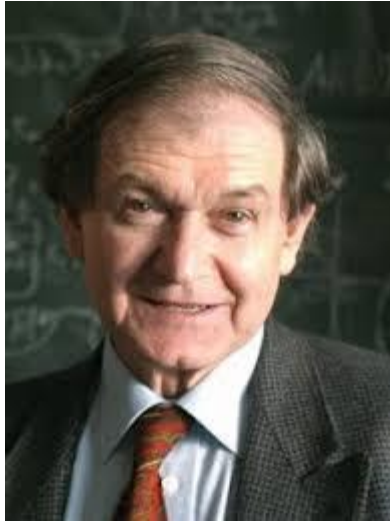
Entretanto, $R = 1$ cm para a Terra.
Para a Terra ser um buraco negro
deveria ter o tamanho de uma pérola!!



Parecia irrelevante: impossível existir algo assim!

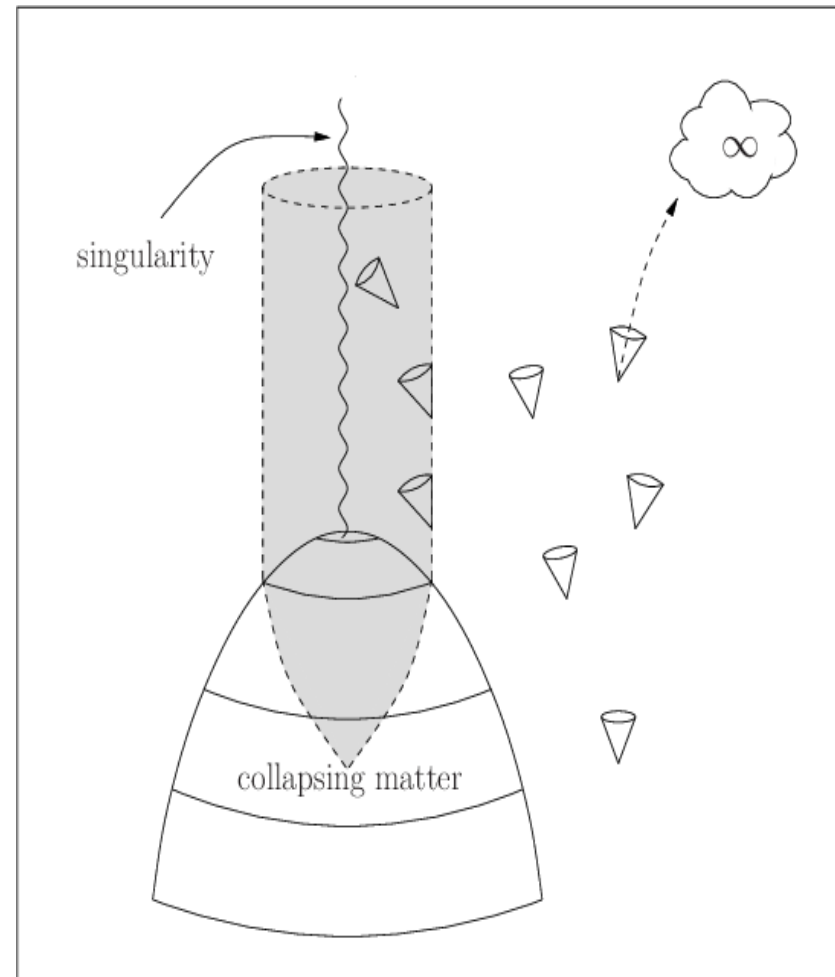
ROGER PENROSE (1931-)

Universidade de Oxford

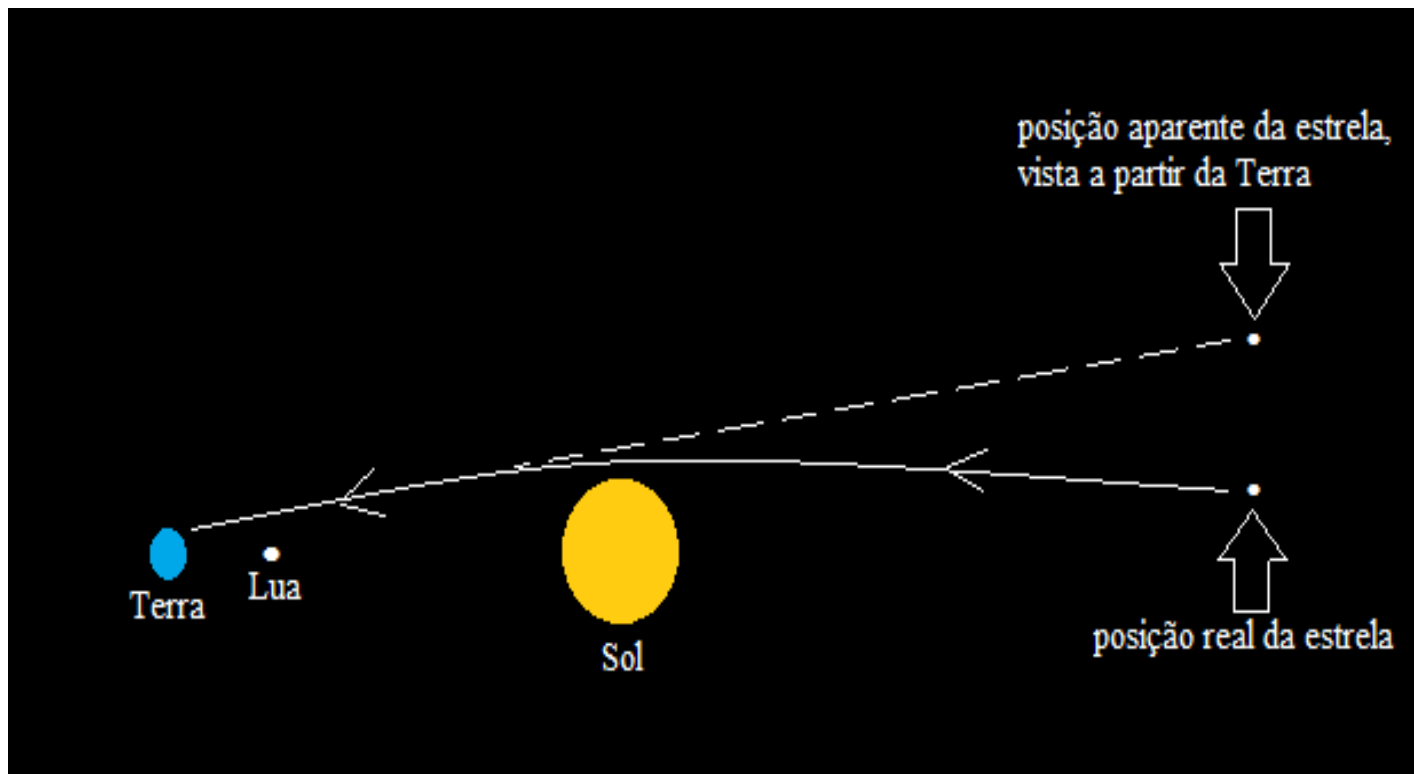


Mostrou em 1964 que estrelas muito massivas, independentemente da sua forma e constituição, podem colapsar em buracos negros!

Buracos negros devem ser objetos comuns no Universo!



Desvio da luz ao passar pelo Sol



Eclipse em Sobral, Ceará, 1919



Manchete do New York Times!

Einstein ficou famoso!

LIGHTS ALL ASKEW IN THE HEAVENS

Special Cable to THE NEW YORK TIMES.

New York Times 1857; Nov 10, 1919; ProQuest Historical Newspapers The New York Times (1851 - 2004)
pg. 17

LIGHTS ALL ASKEW IN THE HEAVENS

Men of Science More or Less
Agog Over Results of Eclipse
Observations.

EINSTEIN THEORY TRIUMPHS

Stars Not Where They Seemed
or Were Calculated to be,
but Nobody Need Worry.

A BOOK FOR 12 WISE MEN

No More in All the World Could
Comprehend It, Said Einstein When
His Daring Publishers Accepted It.

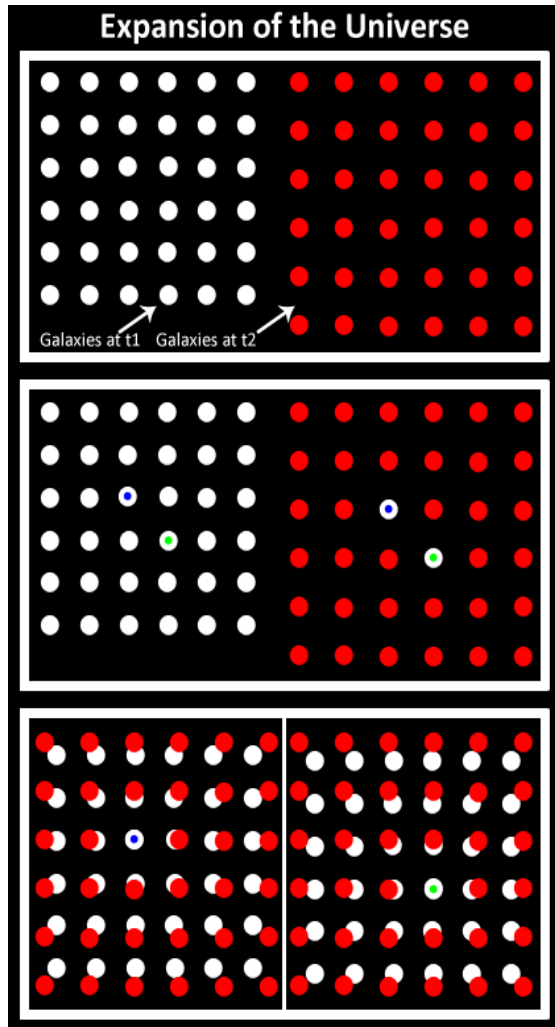
O problema concebido pelo
meu cérebro foi resolvido
pelo luminoso céu do Brasil.



Paralelamente: COSMOLOGIA

Gravidade é a força mais importante que estrutura o Universo → COSMOLOGIA RELATIVISTA

Equações de Einstein são complicadas. Distribuição de matéria no Universo parece ser homogênea e isotrópica. Hipótese: geometria espacial é homogênea e isotrópica.



Primeira solução:

Albert Einstein (1916), estática → Introduziu Λ

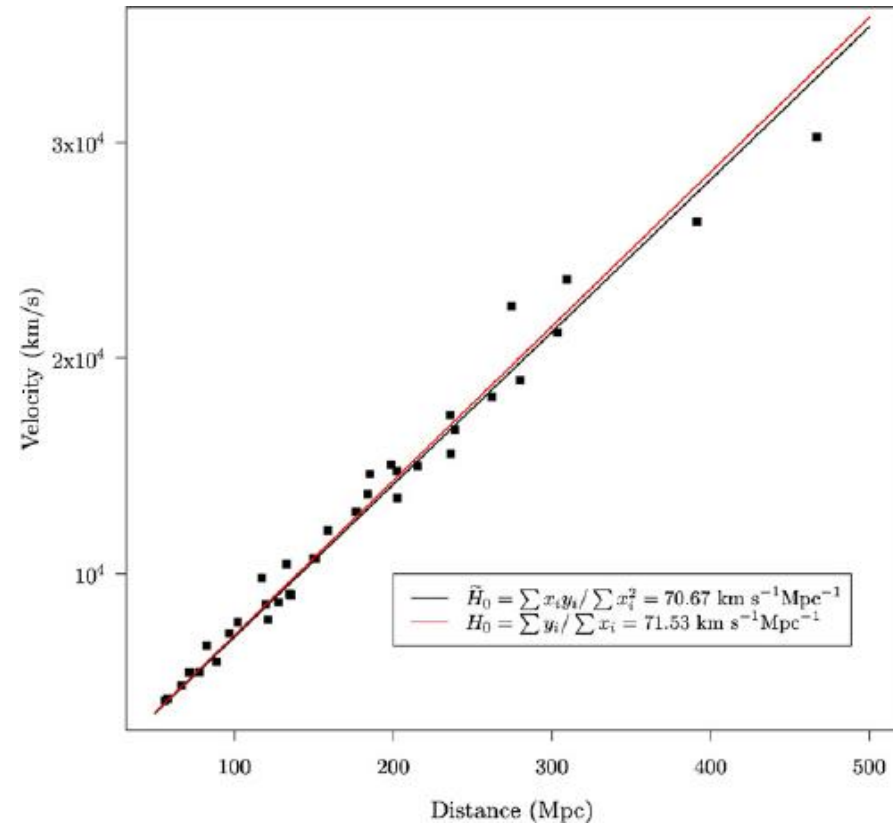
Alexander Friedmann (1922), dinâmica.

Parece uma explosão, mas não há centro:
Todos os pontos são centros!!

$$v = H d$$

Edwin Hubble: mediu as distâncias de galáxias distantes.

Relacionou a distância dessas galáxias com suas velocidades de afastamento. Descobriu a lei de Hubble-Lemaître (que já tinha reportado essa conclusão), a expansão do Universo! Confirmando as soluções de Friedmann (1929).



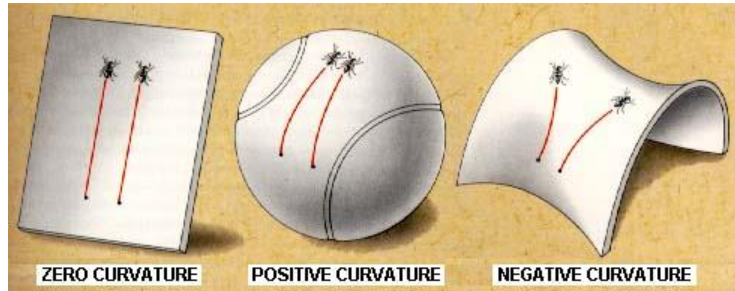
$$v = H d$$

$$H \sim 70 \text{ km/s /Mpc}$$

Gravidade é a força mais importante que estrutura o Universo → COSMOLOGIA RELATIVISTA

Equações de Einstein são complicadas. Distribuição de matéria no Universo parece ser homogênea e isotrópica.

Hipótese: geometria espacial é homogênea e isotrópica.



$$D = a(t) \Delta x$$

$$v = HD$$

$$v = \frac{dD}{dt} = \dot{a} \Delta x = \frac{\dot{a}}{a} a \Delta x \equiv H D$$

$$H = \frac{\dot{a}}{a}$$

Raio de Hubble:

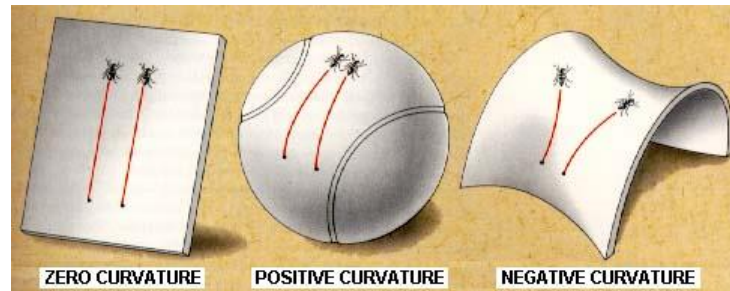
$$v=c=HR_H \rightarrow R_H=c/H$$

escala causal; escala de curvatura cosmológica $1/\sqrt{R}$

A Métrica (Espacial) do Universo Homogêneo

- Seção espacial: por simplicidade será suposta homogênea e isotrópica.
- Curvatura constante: $K=1, 0, -1$.

$$(d\vec{r})^2 = \frac{1}{1-Kr^2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$



Geometria de $K=1$ e $K=-1$

- $K=1$ Generalização tridimensional da esfera.

$$ds^2 = dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad w^2 + r^2 = 1, \quad r dr = -w dw$$

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

- $K = -1$ Hiperbolóide.

$$ds^2 = -dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad w^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1$$

$$w^2 - r^2 = 1, \quad r dr = w dw$$

Geometria Espaço-Temporal do Universo Homogêneo

- Invariante: $ds^2 = dt^2 - (d\vec{x})^2$
- Todas as escalas variam com $a(t)$:

$$(d\vec{x})^2 = a^2(t)(d\vec{r})^2 = a^2(t)\left(\frac{1}{1-Kr^2}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2\right)$$


$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\left(\frac{1}{1-Kr^2}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2\right)$$



Métrica de Friedmann-Lemaître (Robertson-Walker)

Conservação da Energia

- Conservação da Energia para Cada Componente:

$$d\rho_i + 3(\rho_i + p_i)\frac{da}{a} = 0$$

Exemplo 1: bárions (hoje), matéria escura: $p = 0$

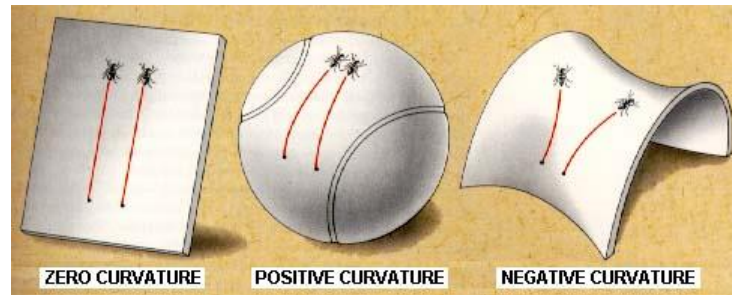
$$\Rightarrow \rho_M \propto a^{-3}$$

Exemplo 2: radiação: $p = \rho/3$

$$\Rightarrow \rho_r \propto a^{-4} \quad \rho_\gamma = \sigma T^4 \longrightarrow T_\gamma \propto a^{-1}$$

Exemplo 3: “vácuo”: $p = -\rho$ ($\Lambda_v = 3\rho/8\pi G$)

$$\Rightarrow \rho_v = \text{const.}$$



Alexander Friedmann e Georges Lemaître (1922)

Equações de Einstein para a Cosmologia:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{c^2} \rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2} (\rho + 3p) + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

$$\dot{H} = -\frac{4\pi G}{c^2} (\rho + p) + \frac{k}{a^2}$$

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0$$

ρ é a densidade de energia

$\rho \propto \frac{1}{a^3}$ para matéria usual ou $\rho \propto \frac{1}{a^4}$ para radiação eletromagnética

p é a pressão (em geral proporcional à densidade)

$k = 0, 1, -1$

Com essas e outras observações, e usando a Relatividade Geral, podemos graficar a evolução das distâncias entre objetos no Universo com o tempo.

$$\Omega_m + \Omega_r + \Omega_v + \Omega_k = \Omega_T + \Omega_k = 1$$

Conclusões:

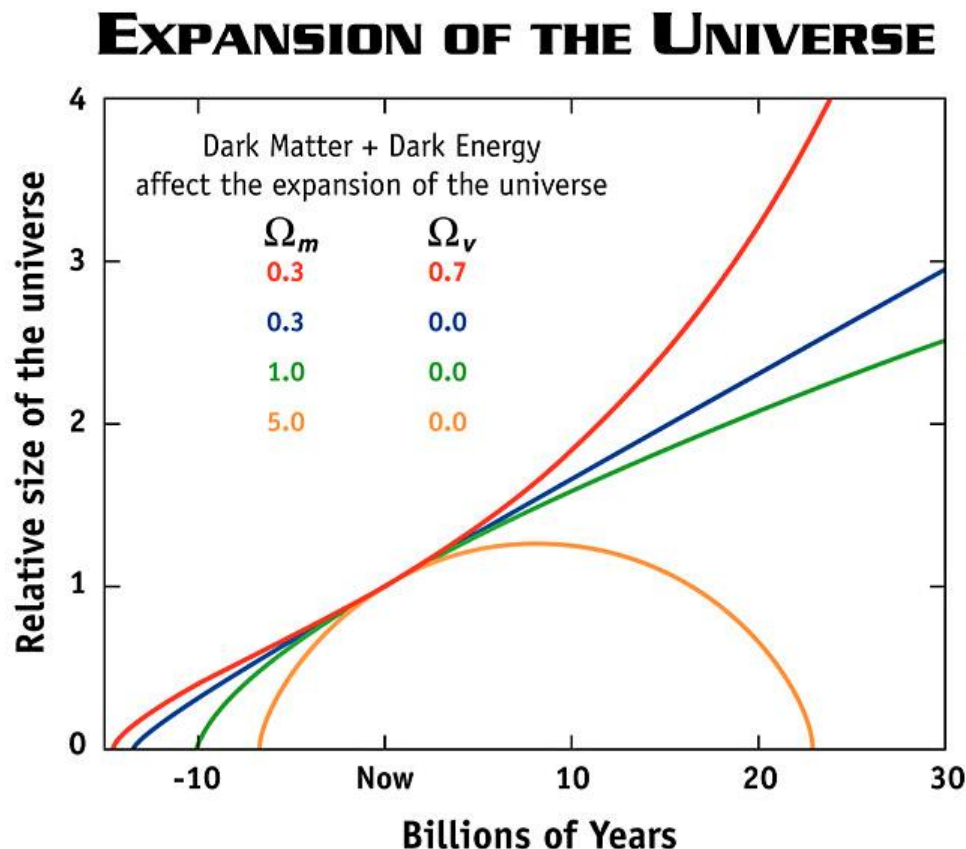
Indo na direção do passado, matéria era muito mais comprimida, portanto, muito mais quente, temperaturas altíssimas!

Efeitos físicos destas fases foram verificados pelas observações.

Indo ainda mais para trás no tempo, distâncias entre as partículas diminuí até ficarem nulas.

Nesta situação, todas as densidades vão para infinito;

SINGULARIDADE INICIAL: BIG BANG



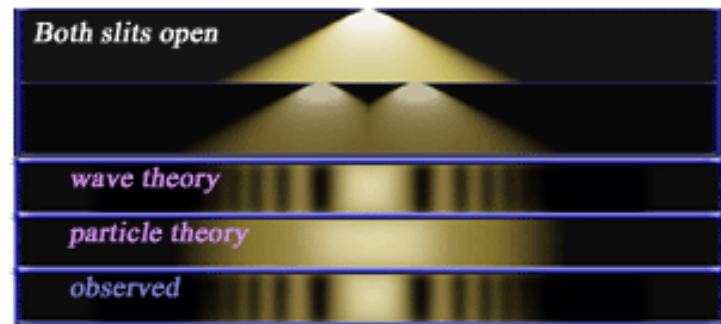
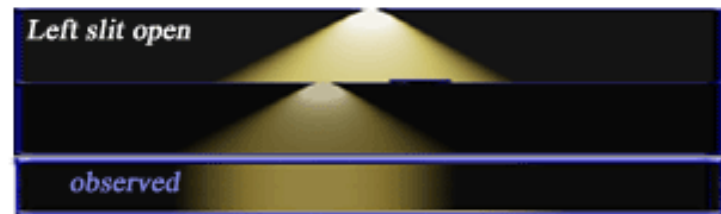
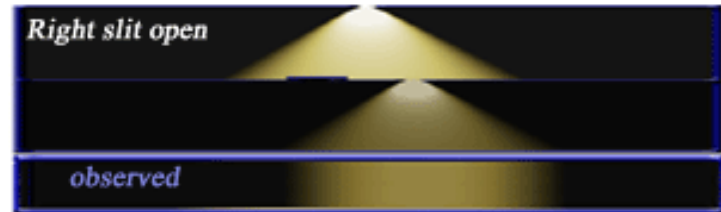
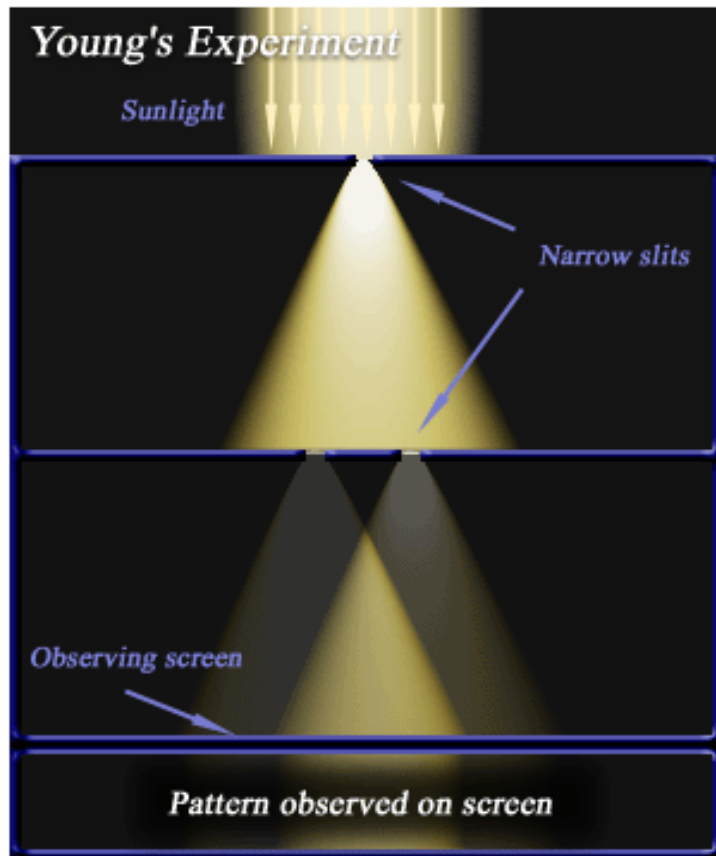
MODELO COSMOLÓGICO PADRÃO

O problema: a singularidade inicial!

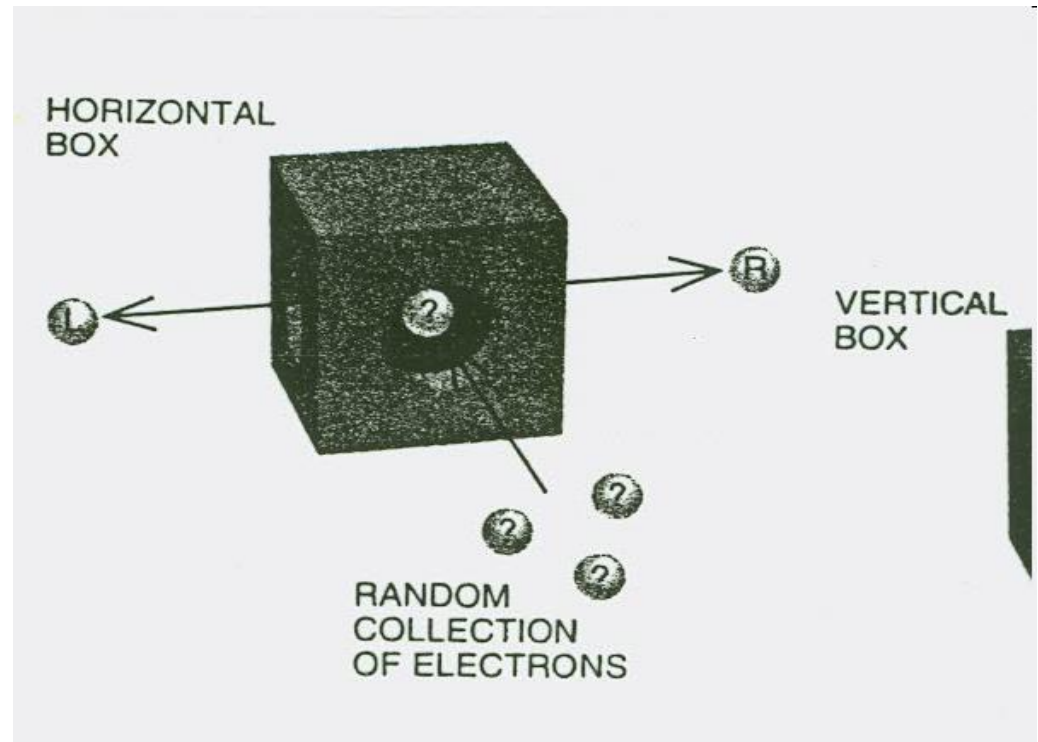
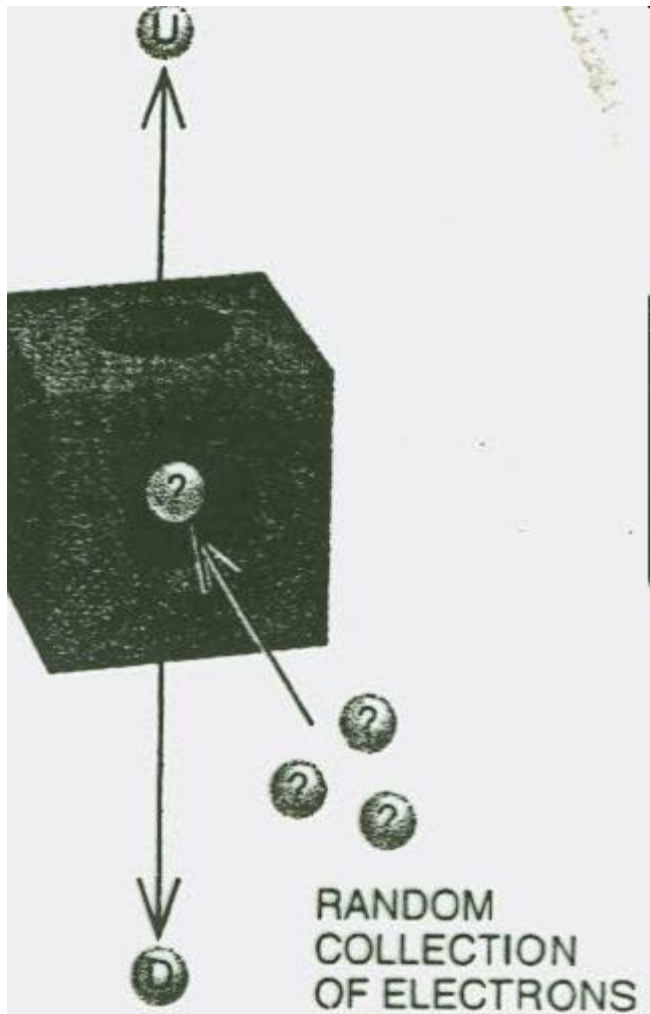
- Está em todos os modelos de Friedmann.
- Um ponto onde nenhuma Física é possível!
- Inicialmente Einstein rejeitou as soluções de Friedmann por causa delas. Depois disse que era a própria Relatividade Geral indicando seus próprios limites de aplicabilidade.
- O que realmente acontece perto da singularidade? NOVA FÍSICA!

OS FENÔMENOS QUÂNTICOS

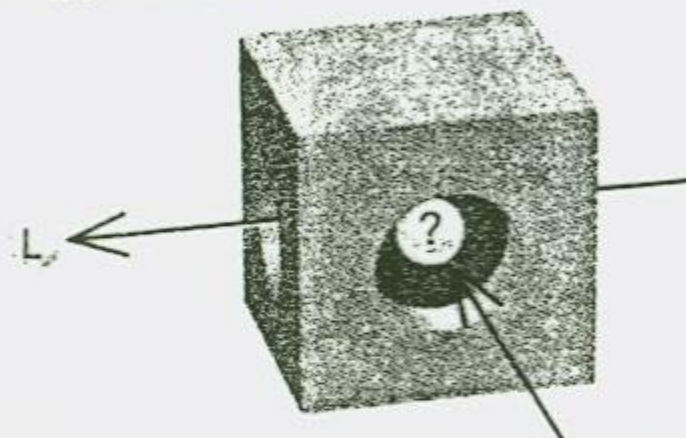
Interferência quântica:



SPIN

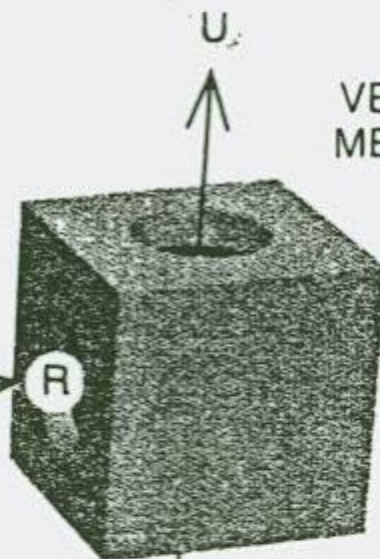


HORIZONTAL SPIN
MEASUREMENT



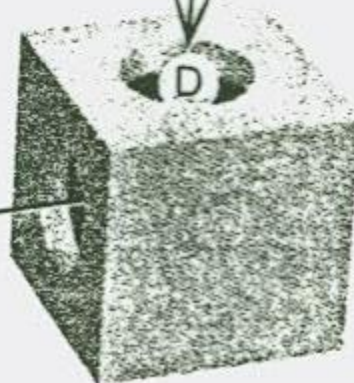
RANDOM
COLLECTION
OF ELECTRONS

R_z



VERTICAL SPIN
MEASUREMENT

D_z

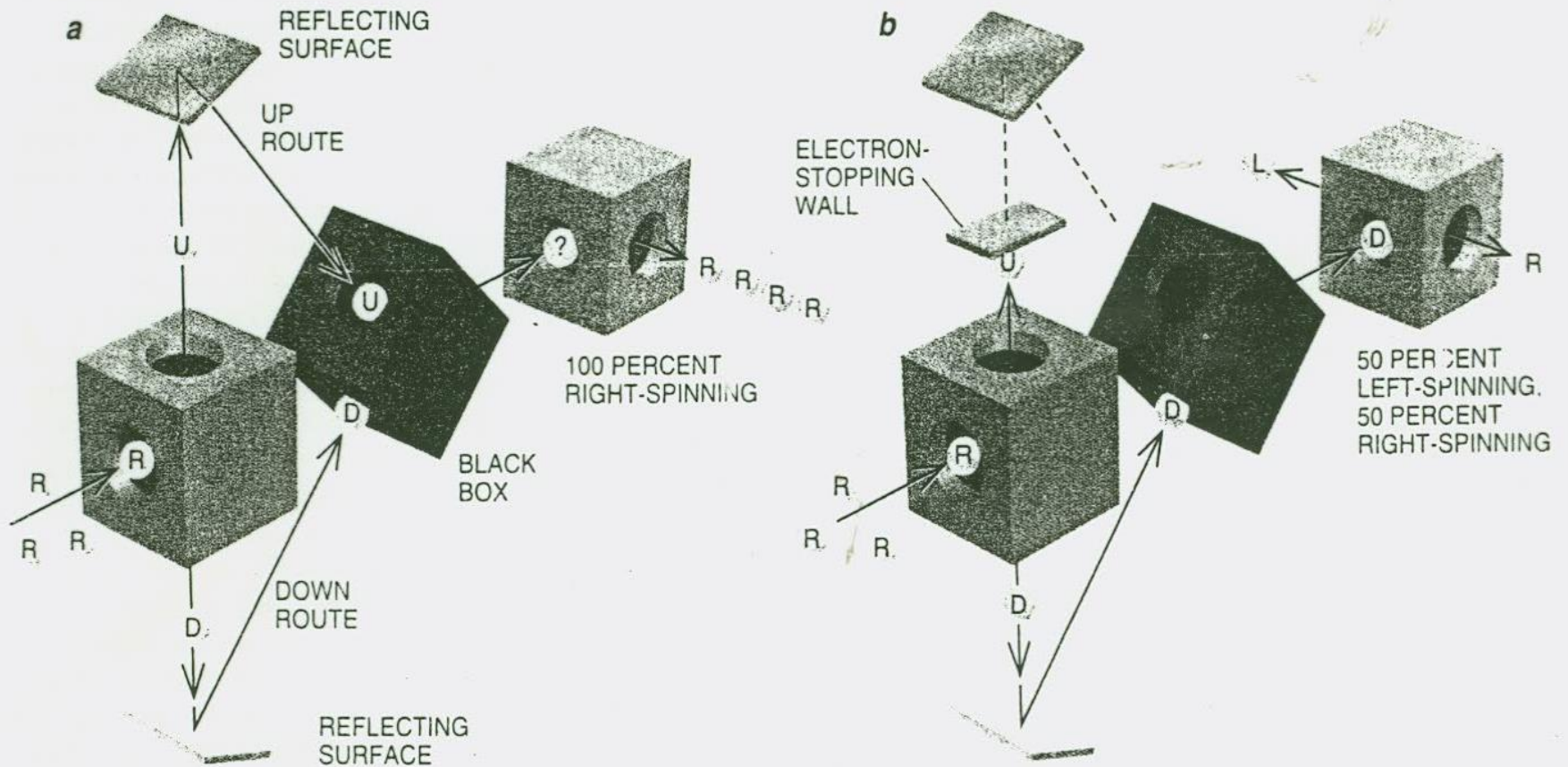


HORIZONTAL SPIN
MEASUREMENT

L_z

R_z

INTERFERÊNCIA



Por onde passou o elétron?

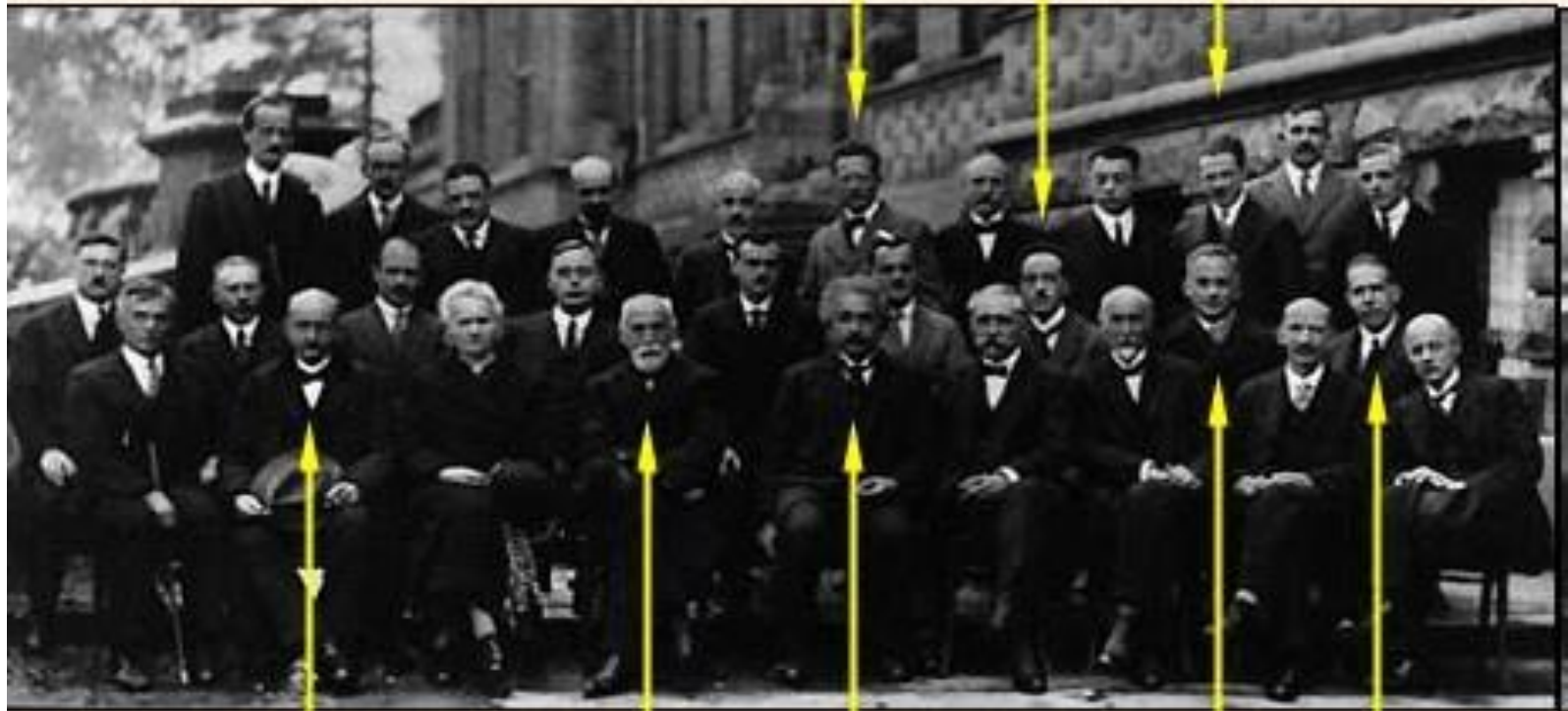
- a) Se passou por um dos dois caminhos não teríamos interferência!**
- b) Passou pelos dois? Mas se colocarmos dois detetores um em cada caminho, só um deles registra a passagem do elétron!**
- c) Não passou por nenhum? Mas se bloquearmos os dois caminhos, nada é registrado!**

The Solvay Congress of 1927

Werner Heisenberg

Louis de Broglie

Erwin Schrödinger



H. A. Lorentz

Max Born

Max Planck

Einstein

Niels Bohr

Três propostas principais:

- 1) Schrödinger: função de onda física → localização espontânea
- 2) De Broglie: onda piloto → teoria de de Broglie-Bohm
- 3) Born e Heisenberg → interpretação de Copenhaguen

Born, Heisenberg e Bohr venceram (Jammer) ;

De Broglie foi quase ignorado e destruído por uma pergunta de Pauli;
Congresso dominado pelas discussões de Einstein com Bohr;

ERRADO

Anais mostram: Tempo dividido igualmente entre as três propostas;
Muitas perguntas a de Broglie, que respondeu corretamente a Pauli;

Muita confusão (Ehrenfest): "E disseram uns aos outros: Vai, construíamos uma torre para nós, cujo cume possa alcançar o céu; e façamo-nos um nome. E o Senhor disse: Vai, desçamos, e confundamos ali sua língua, que eles não possam compreender o discurso do outro." ;

Conversa Bohr-Einstein não é citada.

Postura pragmática – trabalho conjunto → Copenhaguen

Solução de Copenhaguen: NÃO FAZ SENTIDO FALAR DE TRAJETÓRIAS OU POR ONDE O ELÉTRON PASSOU SEM QUE HAJA UM APARELHO DE MEDIDA QUE EFETIVAMENTE DECIDA SOBRE ESTAS QUESTÕES.

Não existe realidade objetiva, isto é, independente das observações!

Propriedades quânticas são potencialidades que só se realizam numa medida!

SOLUÇÃO EPISTEMOLÓGICA SEM PARALELO NA FÍSICA!

Potencialidades descritas por uma
função de onda: $\psi(x,t)$

$|\psi(x,t)|^2$ fornece a probabilidade de encontrar a partícula
na posição x e tempo t após uma medida.

Na interferência quântica temos as potencialidades:

$$\psi = \psi_1 + \psi_2$$

Assim, $|\psi|^2 = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + \psi_1^* \psi_2 + \psi_1 \psi_2^*$

A função de onda satisfaz a equação de Schrödinger:

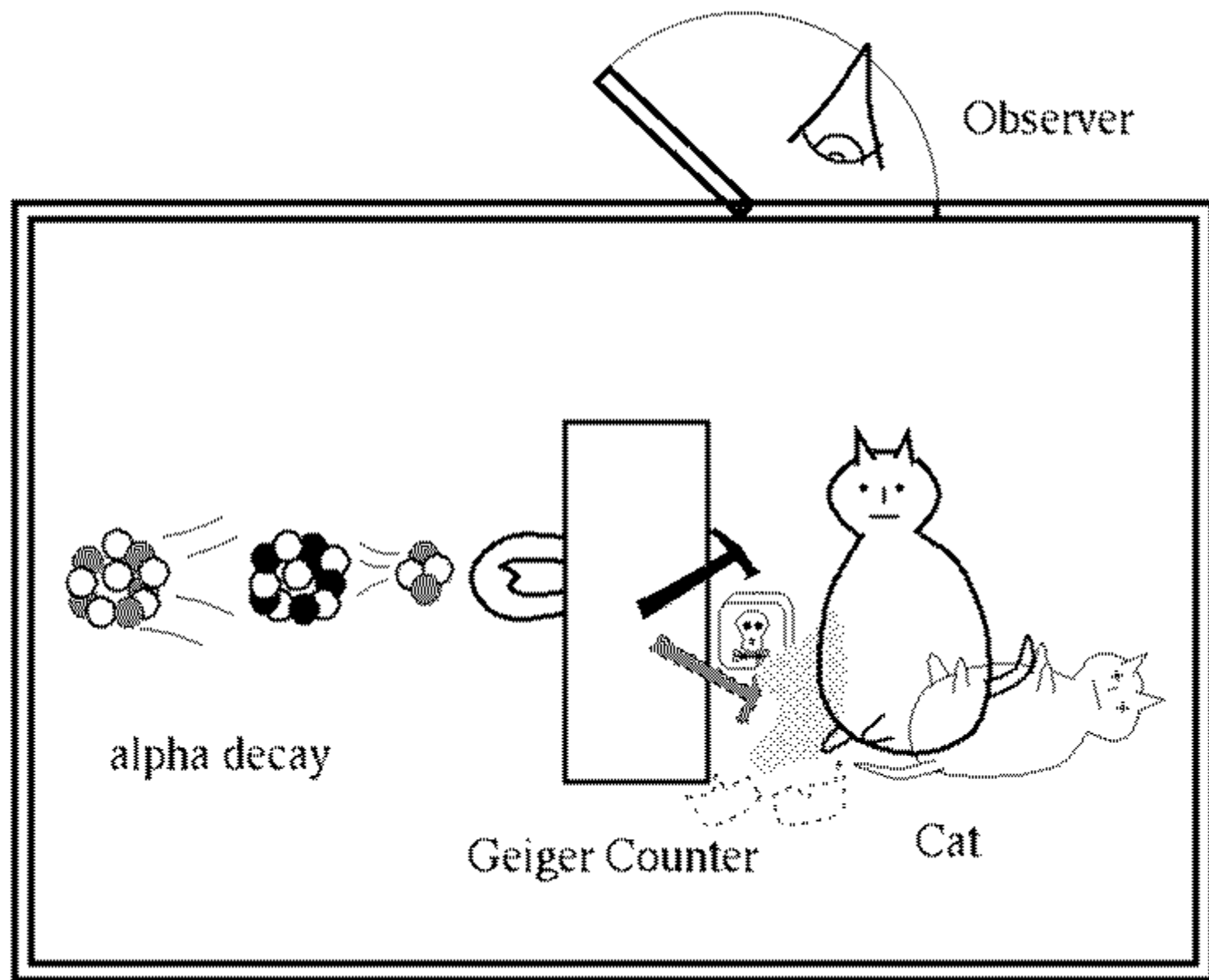
$$i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi = \left[\frac{p^2}{2m} + V(x) \right] \psi, \quad p_x \equiv -i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(x) \right] \Psi(x, t)$$

PROBLEMAS

Linearidade: se existe superposição $\psi = \psi_1(x_1 \dots x_n) + \psi_2(x_1 \dots x_n)$
porque não existe superposição de objetos macroscópicos?

Bohr: mundo macroscópico é clássico. Outras leis.
Lugar do senso comum, da linguagem, dos fatos concretos e objetivos.



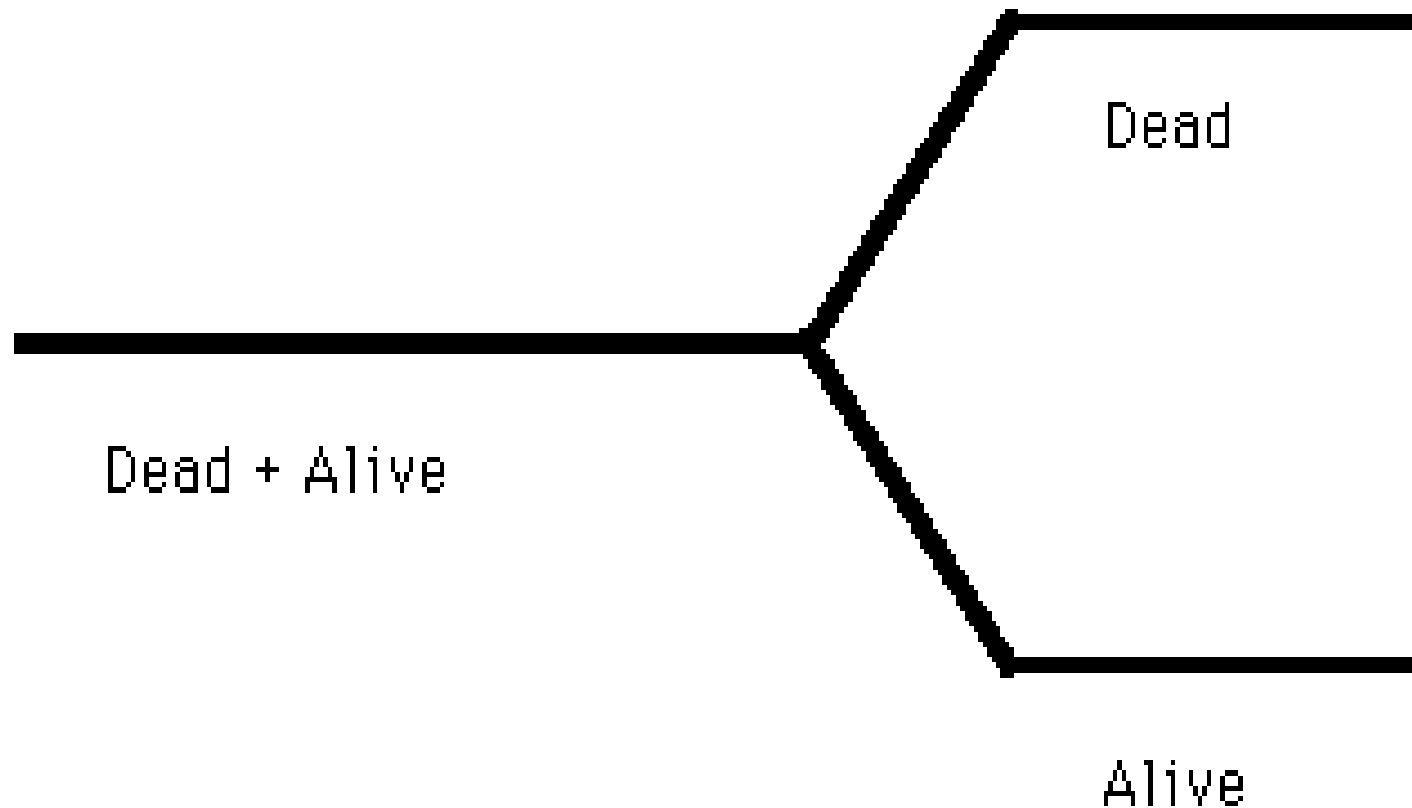
Bohr: COMPLEMENTARIDADE



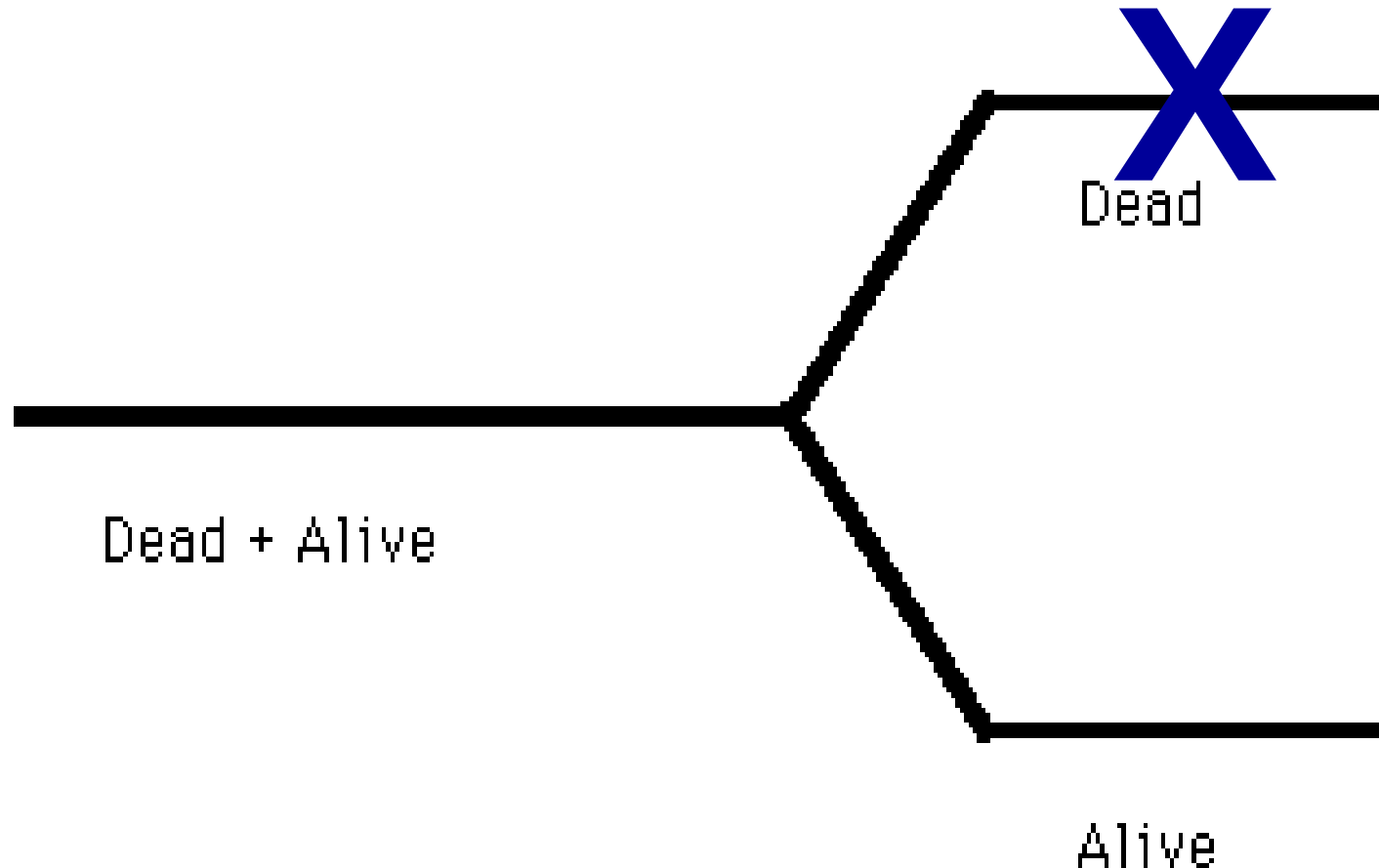
No centro da investigação científica estão os conceitos clássicos que nos orientam. Em direção ao domínio quântico, apenas alguns deles podem ser aplicados, por vez, de acordo com o que se está perguntando sobre o sistema.

Descoerência: explica não vermos superposição de estados macroscópicos e/ou do ponteiro de medida.

MAS NÃO EXPLICA FATO ÚNICO!



FATO ÚNICO:
POSTULA-SE UM COLAPSO!



Equação de Schrödinger não pode ser válida em todos os processos, segundo a interpretação de Copenhaguen:

TEORIA QUÂNTICA NÃO É UNIVERSAL

Copenhaguen: colapso da função de onda devido à ação do aparelho clássico: mundo quântico e mundo clássico.

**ONDE ESTÁ A FRONTEIRA ENTRE O QUÂNTICO E O CLÁSSICO?
ONDE SE DÁ O COLAPSO?**

**Não se pode ir além da complementaridade;
Não se pode perguntar detalhes sobre os fenômenos quânticos;
Não se pode indagar sobre uma dinâmica sub-quântica.**

Does quantum cosmology makes sense?

Answer of the Copenhagen interpretation: NO

-- Need of a classical domain with classical observers:
no classical domain if the whole Universe is quantized.

Within the Copenhagen interpretation we are stuck:
no further developments.

*Contemporary quantum theory ... constitutes an optimum formulation
of [certain] connections ... [but] offers no useful point of departure
for future developments.*

Albert Einstein.

Fortunately, there are alternative quantum theories!

Many Worlds

Consistent Histories

Spontaneous collapse

de Broglie-Bohm

.....

A teoria de de Broglie-Bohm

“The kinematics of the world, in this ortodox picture, is given by a wave function for the quantum part, and classical variables -variables which *have* values - for the classical part: $(\Psi(t, q \dots), X(t) \dots)$. The X s are somehow macroscopic. This is not spelled out very explicitly. The dynamics is not very precisely formulated either. It includes a Schrödinger equation for the quantum part, and some sort of classical mechanics for the classical part, and ‘collapse’ recipes for their interaction.

It seems to me that the only hope of precision with the dual (Ψ, x) kinematics is to omit completely the shifty split, and let both Ψ and x refer to the world as a whole. Then the x s must not be confined to some vague macroscopic scale, but must extend to all scales.”

John Stewart Bell.

The de Broglie-Bohm interpretation

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(x) \right] \Psi(x, t)$$

$$p = m\dot{x} = \nabla S(x, t)$$

The guidance relation allows the determination of the trajectories (different from the classical)

$$\Psi = A \exp(iS/\hbar) \quad \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 A}{A} = 0.$$

$$Q \equiv -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 A}{A}.$$

$$\frac{\partial A^2}{\partial t} + \nabla \cdot \left(A^2 \frac{\nabla S}{m} \right) = 0,$$

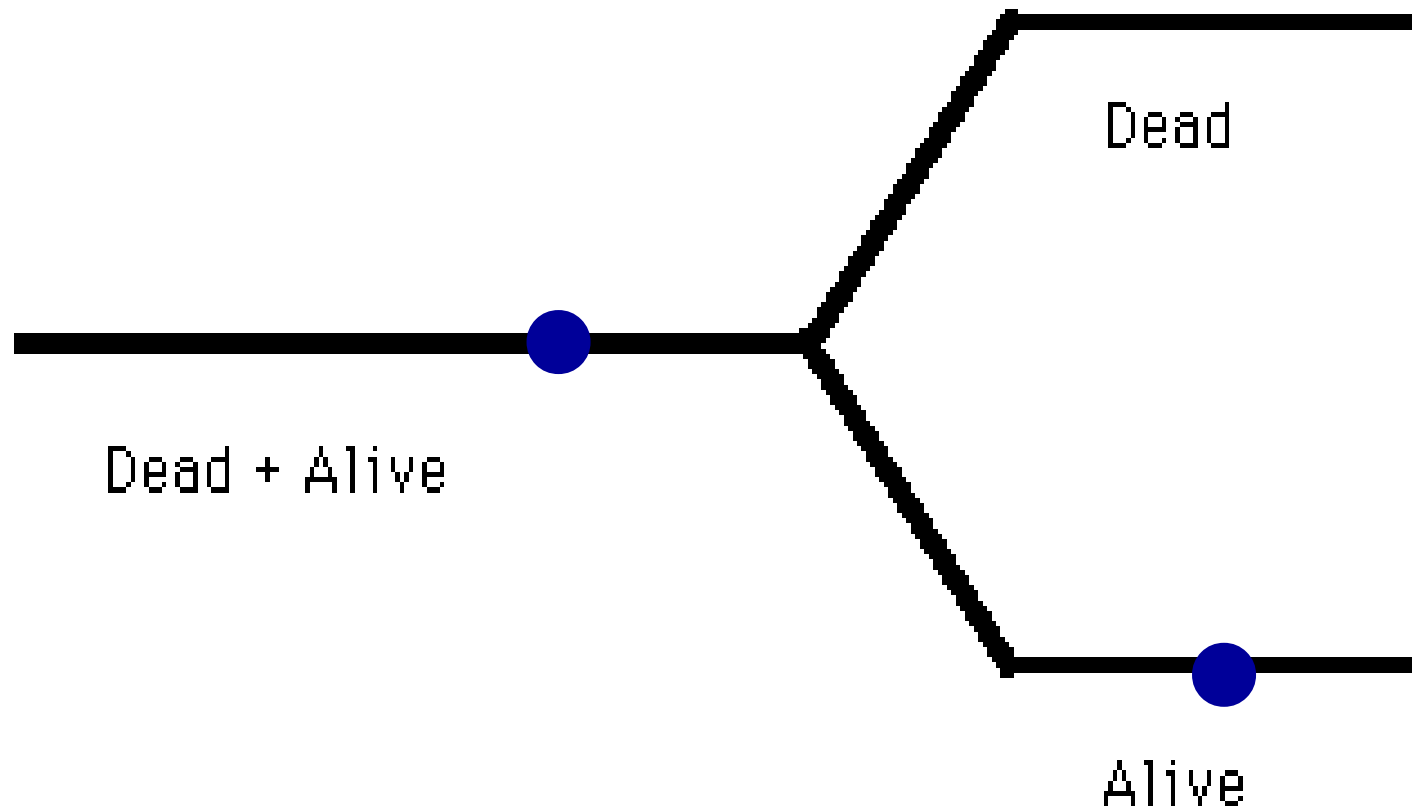
If $P(x, t=0) = A^2(x, t=0)$, all the statistical predictions of quantum mechanics are recovered.

However, $P(x, t=0) \neq A^2(x, t=0)$, relaxes rapidly to $P(x, t) = A^2(x, t)$ (quantum H theorem -- Valentini)

Born rule may be obtained, not postulated

Solving the measurement problem:

position in configuration space determines
chosen branch (depends on X_0)



Some remarks

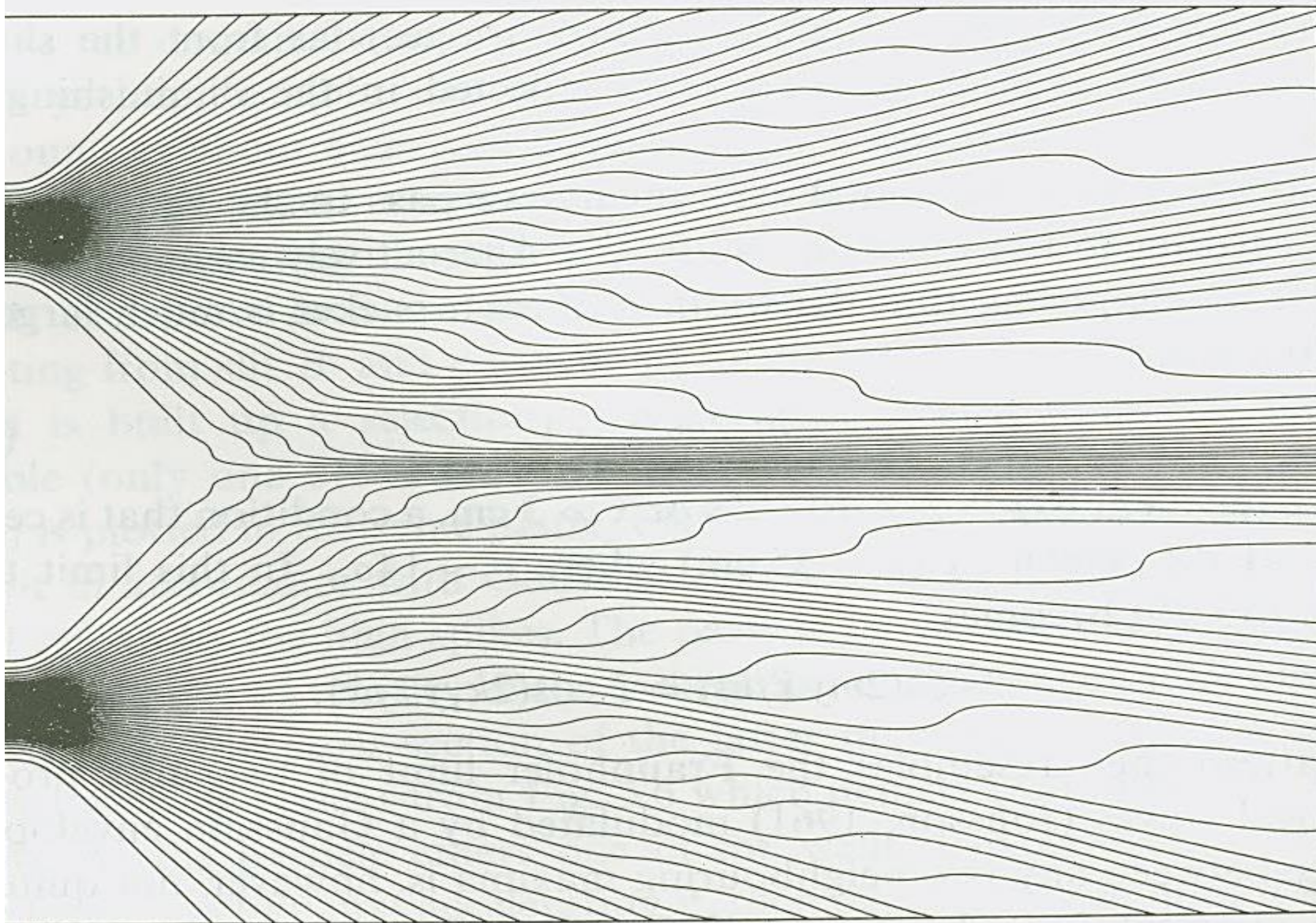
a) Q is highly non-local and context dependent!
(Bell's inequalities are violated, like in usual QM)
It offers a simple characterization of the classical limit:

$$\underline{Q \sim 0}$$

b) Probabilities are not fundamental in this theory.
The unknown variable is the initial position.

c) With objective reality but with the same statistical predictions of standard quantum theory.

5 *Interference and tunnelling*



Bell in *Speakable and unspeakable in quantum mechanics*

“In 1952 I saw the impossible done. It was in papers by David Bohm. ... the subjectivity of the orthodox version, the necessary reference to the ‘observer,’ could be eliminated. . . . But why then had Born not told me of this ‘pilot wave’? If only to point out what was wrong with it? Why did von Neumann not consider it? . . . Why is the pilot wave picture ignored in text books? Should it not be taught, not as the only way, but as an antidote to the prevailing complacency? To show us that vagueness, subjectivity, and indeterminism, are not forced on us by experimental facts, but by deliberate theoretical choice?” (Bell, page 160)

MODELO COSMOLÓGICO PADRÃO

O problema: a singularidade inicial!

- Está em todos os modelos de Friedmann.
- Um ponto onde nenhuma Física é possível!
- Inicialmente Einstein rejeitou as soluções de Friedmann por causa delas. Depois disse que era a própria Relatividade Geral indicando seus próprios limites de aplicabilidade.
- O que realmente acontece perto da singularidade? NOVA FÍSICA!

Teoria quântica?

Quantização da Gravitação: grande desafio da Física Teórica contemporânea

3 abordagens:

- 1) Quantização covariante (teoria quântica de campos): Teoria de Cordas
- 2) Discretização do espaço-tempo: Conjuntos Causais, Triangulação Dinâmica
- 3) Quantização canônica: Wheeler-DeWitt, Gravitação Quântica de Laços.

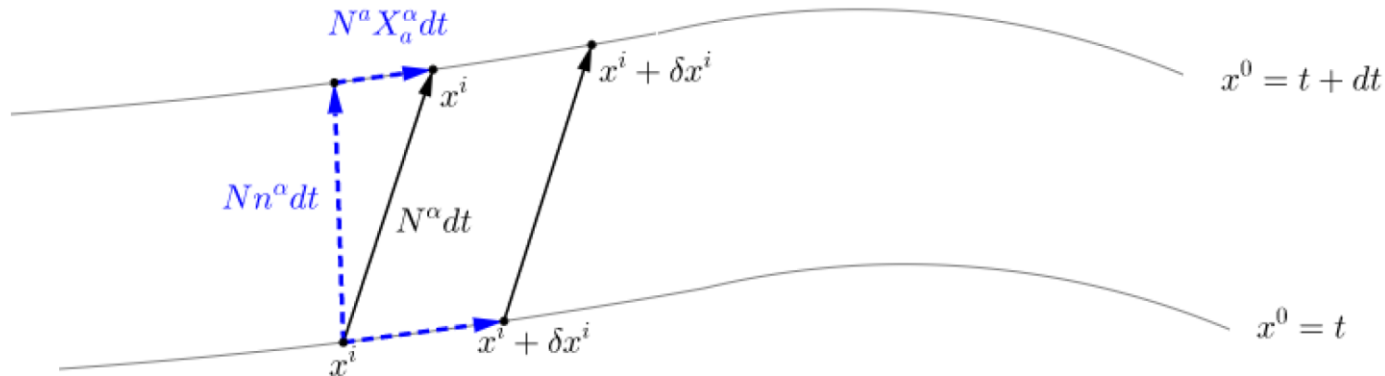


Figure 1.1: The picture shows two hypersurfaces $t = \text{constant}$ and $t + dt = cst$. The vector N^α connects two points with the same coordinates x^i on two adjacent hypersurfaces, and is tangent to t . The vector n^μ is normal to the hypersurface $t = cst$. The quantity ds^2 measures the interval between two events (t, x^i) and $(t + dt, x^i + dx^i)$. N^α as well as n^μ are time-like vectors ($N_\alpha N^\alpha < 0$ and $n^\mu n_\mu = -1 < 0$). The time measured between two events by the observer n^μ is $d\tau$ and the spatial separation between them is dl^i . Figure

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -N^2 + N^a N_a & N_i \\ N_j & h_{ij} \end{pmatrix}$$

$$K_{\mu\nu} := -\frac{1}{2}\perp^\alpha{}_\mu \perp^\beta{}_\nu n_{(\alpha||\beta)} \quad K_{ij} = -\frac{1}{2N} \left[\dot{h}_{ij} - N_{(i;j)} \right]. \quad n_\alpha = (-N, 0, 0, 0),$$

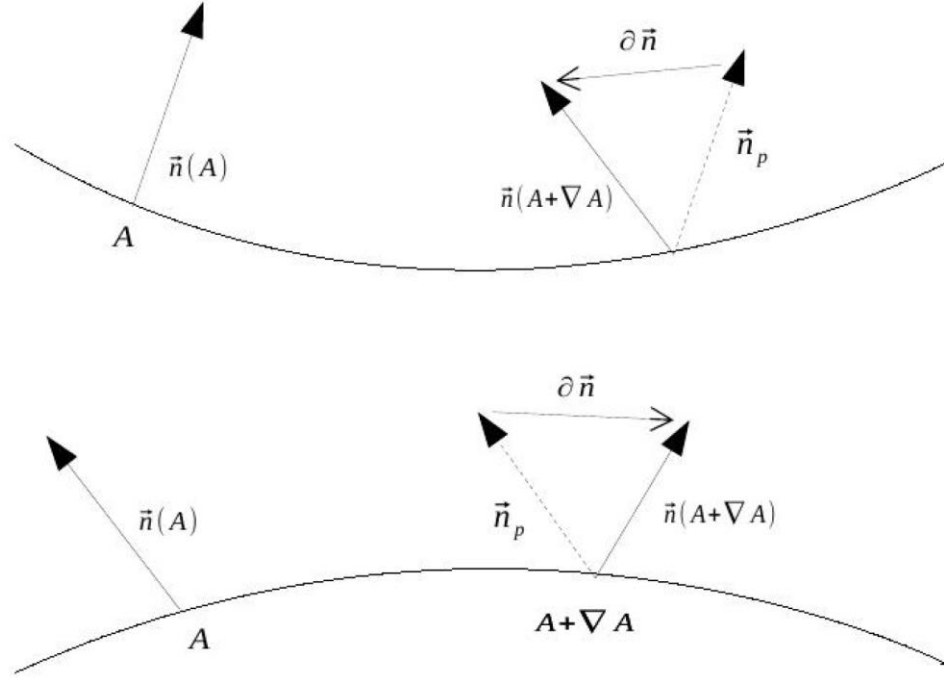


Figure 1.2: Two hypersurfaces with the same metric $h_{ab}(\vec{x})$ but with different curvatures in relation to the spacetime. $\vec{n}$ is the normal vector and $\delta \vec{n}$ is the difference between the vector $\vec{n}(A + \nabla A)$ and the vector $\vec{n}(A)$ parallel transported, using the connection $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ of the spacetime from A to $A + \nabla A$.

$$R = \frac{1}{N} \left(-2\dot{K} - 2N^j{}_{;j} + 2N^i K_{,i} \right) + K_{ij} K^{ij} + K^2 + {}^3R,$$

$$S = \int dt d^3x N h^{\frac{1}{2}} (-K^2 + K_{ij} K^{ij} + {}^3R)$$

$$H = \int d^3x (NH_0(h, \pi_h, \varphi, \pi_\varphi) + N^i H_i(h, \pi_h, \varphi, \pi_\varphi)),$$

$$h' = \{h, H\} \quad \varphi' = \{\varphi, H\}$$

$$\pi'_h = \{\pi_h, H\} \quad \pi'_\varphi = \{\pi_\varphi, H\}$$

$$\begin{aligned} \Pi^{ij} &:= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{h}_{ij}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_{ab}} \frac{\partial K_{ab}}{\partial \dot{h}_{ij}} = -\frac{1}{2N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_{ab}} \delta_{ab}^{ij} = -\frac{1}{2N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_{ij}} \\ &= -h^{\frac{1}{2}} (K^{ij} - h^{ij} K). \end{aligned}$$

Let the following action describe a classical Newtonian system with n degrees of freedom:

$$S = \int dt \mathcal{L} \left(q^i, \frac{dq^i}{dt}, t \right). \quad (2.14)$$

Momenta are given by:

$$p_i := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{dq^i}{dt} \right)}, \quad (2.15)$$

and, supposing that we do not have constraints of the form $\Phi_m(q, p) = 0$ (all generalized velocities can be expressed in terms of momenta), the Hamiltonian will be given by:

$$H(q^i, p_i, t) = \sum_{k=1}^n p_k \frac{dq^k}{dt} - \mathcal{L}(q^i, \dot{q}^i, t). \quad (2.16)$$

Suppose now that we choose a new parameter τ that plays the role of time, thus the old t is now a new generalized coordinate $t = t(\tau)$. Thus, the action (2.14) becomes:

$$S = \int d\tau \dot{t} \mathcal{L} \left(q^i, \frac{\dot{q}^i}{\dot{t}}, t \right), \quad (2.17)$$

given $dt = \dot{t} d\tau$ and $\frac{dq^i}{dt} = \frac{\dot{q}^i}{\dot{t}}$, with the dot meaning we derive with respect to τ . The new Lagrangian is then given by $\bar{\mathcal{L}}(q^i, \dot{q}^i, t, \dot{t}) = \dot{t} \mathcal{L}(q^i, \frac{\dot{q}^i}{\dot{t}}, t)$. Momenta are now given by:

$$\Pi_i := \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \dot{q}^i} = \dot{t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{dq^i}{dt} \right)} \frac{\partial \left(\frac{dq^i}{dt} \right)}{\partial \dot{q}^i} = p_i, \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \Pi_0 &:= \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \dot{t}} = \mathcal{L} \left(q^i, \frac{\dot{q}^i}{\dot{t}}, t \right) + \dot{t} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{dq^i}{dt} \right)} \frac{\partial \left(\frac{dq^i}{dt} \right)}{\partial \dot{t}} \right], \\ &= \mathcal{L} \left(q^i, \frac{\dot{q}^i}{\dot{t}}, t \right) + \dot{t} \sum_{i=1}^n p_i \left(-\frac{\dot{q}^i}{\dot{t}^2} \right), \\ &= \mathcal{L} \left(q^i, \frac{\dot{q}^i}{\dot{t}}, t \right) - \sum_{i=1}^n p_i \left(\frac{dq^i}{dt} \right) = -H(q^i, p_i, t), \\ &= -H(q^i, \Pi_i, t). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Then:

$$\Pi_0 + H(q^i, \Pi_i, t) = 0. \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned}
\bar{H}_C (q^\mu, \Pi_\mu) &= \sum_{\nu=0}^n \Pi_\nu \dot{q}^\nu - \bar{\mathcal{L}} (q^\mu, \dot{q}^\mu) \\
&= \Pi_0 \dot{t} + \sum_{i=1}^n \Pi_i \dot{q}^i - \dot{t} \mathcal{L} \left(q^i, \frac{\dot{q}^i}{\dot{t}}, t \right) \\
&= \Pi_0 \dot{t} + \dot{t} \sum_{i=1}^n p_i \frac{dq^i}{dt} - \dot{t} \mathcal{L} \left(q^i, \frac{\dot{q}^i}{\dot{t}}, t \right) \\
&= \dot{t} [\Pi_0 + H (q^i, \Pi_j, t)] = 0.
\end{aligned}$$

$$H_T (q^\mu, \Pi_\mu) = \bar{H}_C (q^\mu, \Pi_\mu) + N [\Pi_0 + H (q^i, \Pi_j, t)] = N [\Pi_0 + H (q^i, p_j, t)]$$

From (2.21), we get the Hamilton equations:

a) Varying with respect to N we get:

$$\Pi_0 = -H(q^i, \Pi_i, t) = -H(q^i, p_i, t)$$

Which is eq.(2.20).

b) The evolution of the "new" generalized coordinate t is given by:

$$\dot{t} = \{t, H_T\} = N \rightarrow N = \frac{dt}{d\tau}$$

c) The Hamilton equation for Π_0 is given by:

$$\dot{\Pi}_0 = \{\Pi_0, H_T\} = -N \frac{\partial H(q^i, p_i, t)}{\partial t}$$

and using equations (2.20) and (2.22), we get:

$$\frac{dH(q^i, p_i, t)}{dt} = \frac{\partial H(q^i, p_i, t)}{\partial t}$$

d) The Hamilton equation for the q coordinate is:

$$\dot{q}^i = \{q^i, H_T\} = N \frac{\partial H(q^i, p_i, t)}{\partial p_i}$$

using (2.22):

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

$$N [\Pi_0 + H(q^i, p_j, t)]$$

e) The Hamilton for Π_i reads:

$$\dot{\Pi}_i = \dot{p}_i = \{\Pi_i, H_T\} = -N \frac{\partial H(q^i, p_i, t)}{\partial q_i}$$

using (2.22):

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

$$H_T(q^\mu, \Pi_\mu) = \bar{H}_C(q^\mu, \Pi_\mu) + N [\Pi_0 + H(q^i, \Pi_j, t)] = N [\Pi_0 + H(q^i, p_j, t)]$$

Proposta de Dirac para quantização de sistemas vinculados:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}_c(\hat{q}, \hat{p})\psi, \quad \phi_m(\hat{q}, \hat{p})\psi = 0.$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi(q^\mu, \tau)}{\partial \tau} = \hat{\bar{H}}_c(q^\mu, p_\mu, \tau)\psi(q^\mu, \tau) = 0.$$

Then, applying (4.3) to this case (see (2.20)), we obtain:

$$[\hat{\pi}_0 + H(\hat{q}^i, \hat{p}_j, t)] \psi = 0,$$

consequently

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, q^i) = H(\hat{q}^i, \hat{p}_j, t)\psi(t, q^i).$$

THE WAVE FUNCTION OF THE UNIVERSE

$$H = \int d^3x (NH_0(h, \pi_h, \varphi, \pi_\varphi) + N^i H_i(h, \pi_h, \varphi, \pi_\varphi)),$$

$$h' = \{h, H\} \quad \varphi' = \{\varphi, H\}$$

$$\pi'_h = \{\pi_h, H\} \quad \pi'_\varphi = \{\pi_\varphi, H\}$$

Dirac quantization

$$\mathcal{H}_0 \Psi = 0$$

Wheeler-DeWitt equation

$$\mathcal{H}_i \Psi = 0$$

Ψ is invariant under spatial coordinate transformations

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi = 0$$

De Broglie – Bohm theory

$$\pi_h \sim h' = \delta S / \delta h$$

$$\pi_\phi \sim \varphi' = \delta S / \delta \varphi$$

Quantum effects in Cosmology

1) Radiation: ($p=\rho/3$).

$$\begin{aligned} S &= \int dt \left[\sum_i p_i \dot{q}^i - H(p_i, q^i, t) \right] \\ &= \int dt \left[p\dot{a} + P_T \dot{T} - N \left(\frac{p^2}{4a} + \frac{P_T}{a} \right) \right]. \end{aligned} \quad \begin{array}{l} dT/dt = N/a \rightarrow a dT = N dt \\ \rightarrow T = \eta \end{array}$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}_c(\hat{q}, \hat{p})\psi, \quad \phi_m(\hat{q}, \hat{p})\psi = 0.$$

Ψ não depende de t

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} = - \frac{\partial^2 \Psi}{4\partial a^2}.$$

Wheeler-DeWitt equation:

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial\eta} = -\frac{\partial^2\Psi}{4\partial a^2}.$$

Initial condition: gaussian

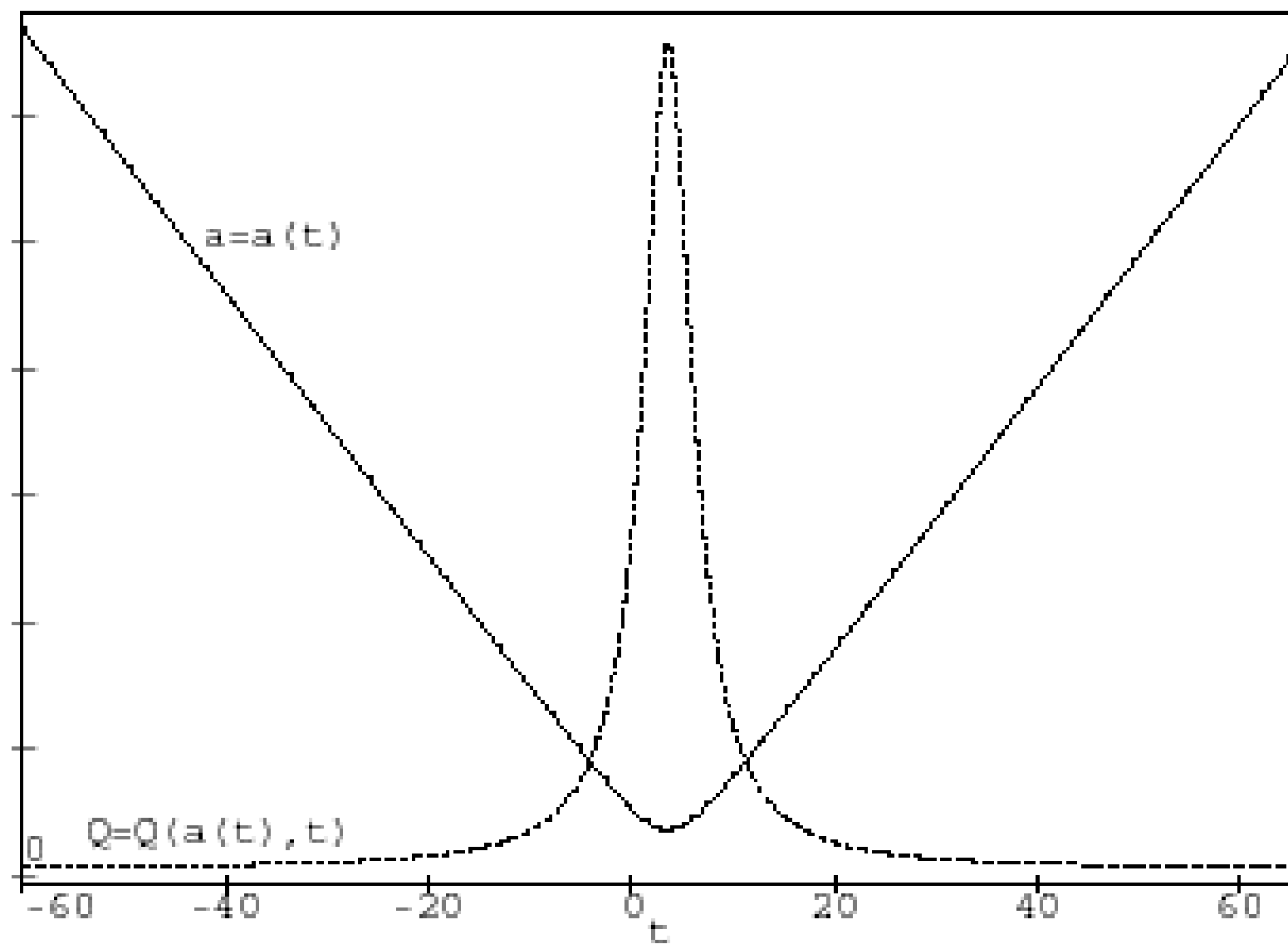
$$\Psi_{(0)}^{(\text{init})}(a) = \left(\frac{8}{\eta_0\pi}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{a^2}{\eta_0}\right),$$

$$\Psi_{(0)}(a, \eta) = \left[\frac{8\eta_0}{\pi(\eta^2 + \eta_0^2)}\right]^{1/4} \exp\left[\frac{-\eta_0 a^2}{(\eta^2 + \eta_0^2)}\right] \exp\left\{-i\left[\frac{\eta a^2}{(\eta^2 + \eta_0^2)} + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\eta_0}{\eta}\right) - \frac{\pi}{4}\right]\right\}$$

Bohmian quantum trajectory:

$$\mathbf{p}_a = da/d\eta = \partial S/\partial a$$

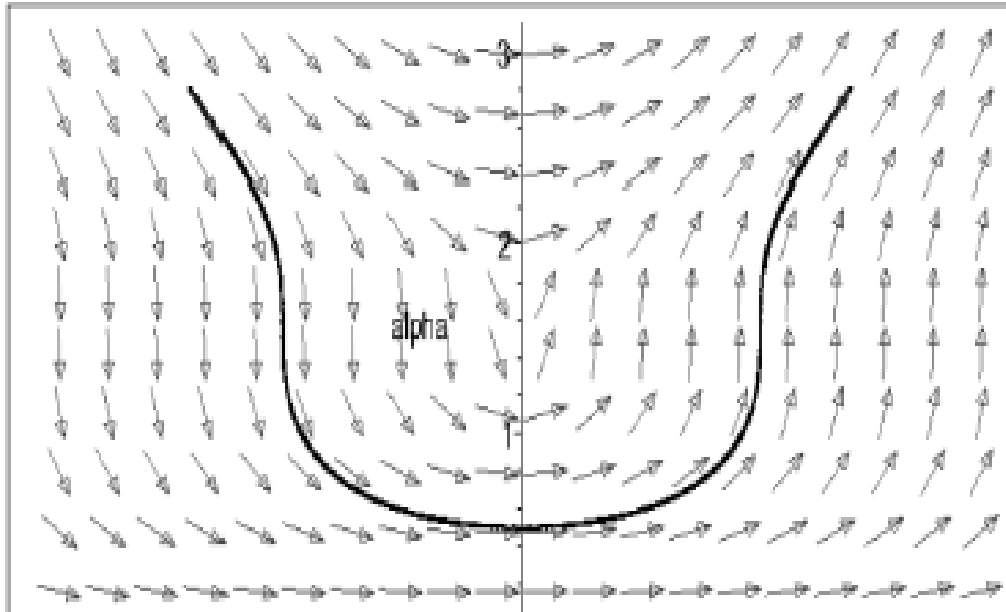
$$a(\eta) = a_0 [(\eta/\eta_0)^2 + 1]^{1/2}$$



2) Matéria dura: ($p=\rho \sim 1/a^6$).

Scalar field with $V(\phi)=0$:

The quantum trajectories are:



Colistete, Fabris, NPN; Phys.Rev. D62, 083507 (2000)

Todos têm limite clássico, se conectando com o modelo padrão antes da nucleossíntese.

Modelos não singulares quânticos:

Efeitos quânticos se tornam importantes a temperaturas e densidades muito altas, evitando a singularidade.

Alguns efeitos quânticos calculados geram os seguintes termos efetivos nas equações de Friedmann:

$$\rho_q \propto -1/a^6$$

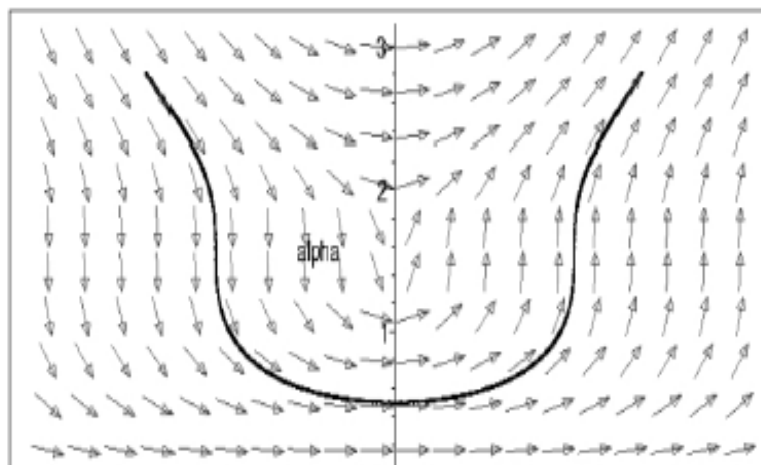
$$\rho \rightarrow \rho \left(1 - \frac{\rho}{\rho_q} \right)$$

$$H^2 = \frac{8 \pi G}{c^2} \left(\rho - \frac{c}{a^6} \right)$$

$$H^2 = \frac{8 \pi G}{c^2} \rho \left(1 - \frac{\rho}{\rho_q} \right)$$

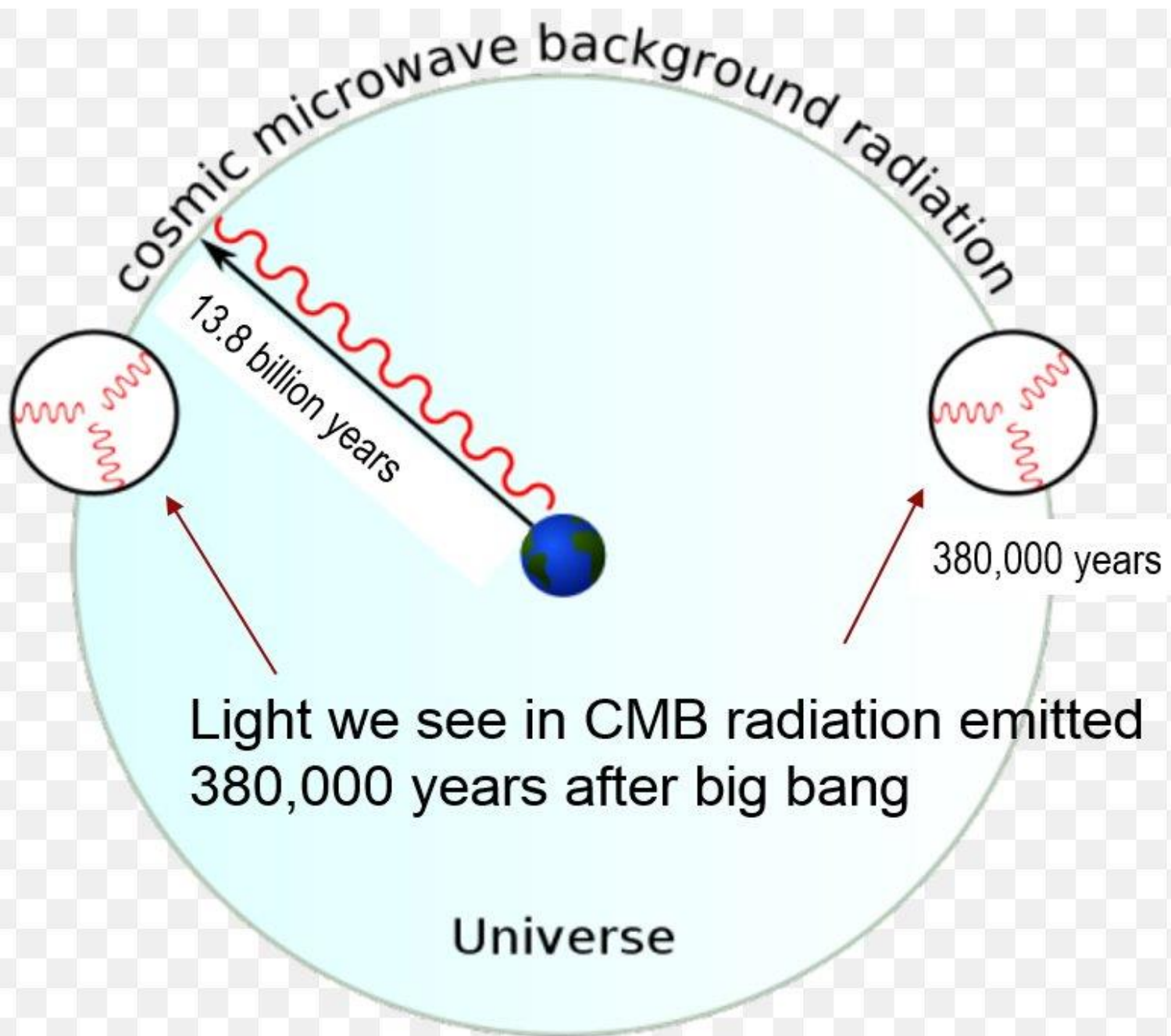
ρ é a densidade de energia $\rho \propto \frac{1}{a^3}$ para matéria usual ou $\rho \propto \frac{1}{a^4}$ para radiação eletromagnética.

$$H^2 = \frac{8 \pi G}{c^2} \rho \qquad \dot{H} = -\frac{4 \pi G}{c^2} (\rho + p)$$

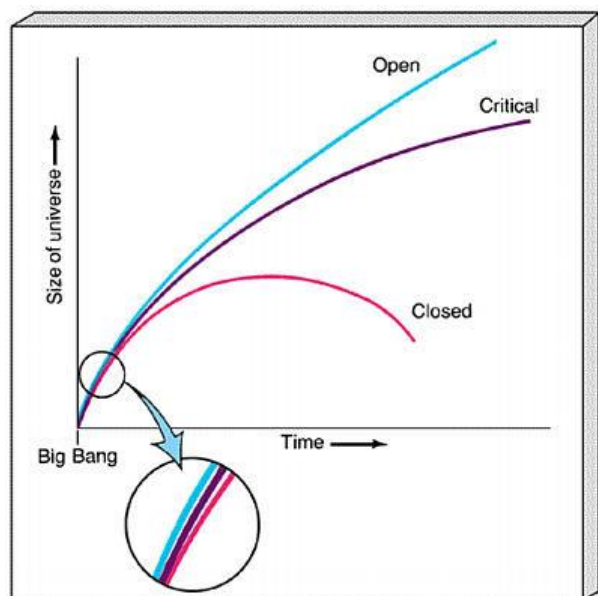


If the Universe had a beginning:

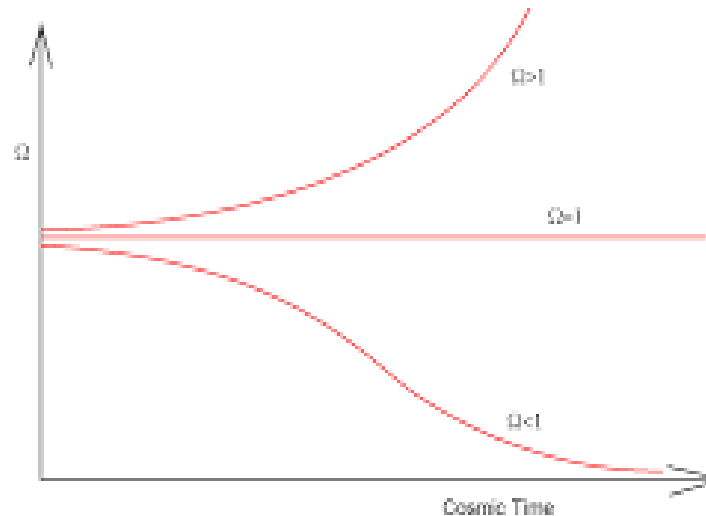
- b) Existence of particle horizons makes things bad:**
at recombination time there were approximately 100 regions without causal contact with the same temperature!
- c) Why the spatial hypersurface is so flat, or why the total density of matter in the Universe today is so close to the critical density today?**
- d) Where the structures come from?**



b) Por que a superfície espacial é tão plana, ou porque a densidade total de matéria no Universo é tão próxima da densidade crítica hoje?



$$|\Omega_T - 1| = -2 \frac{\ddot{a}}{\dot{a}^3}$$

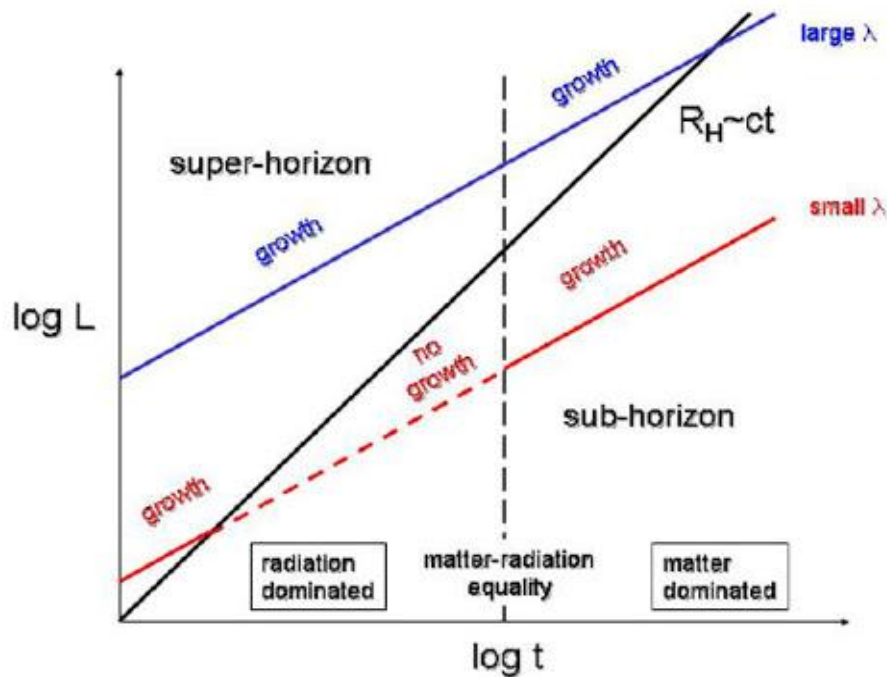


$$\Omega_T|_{\text{Nucleossíntese}} = 1 \pm 10^{-18}$$

c) De onde vêm as estruturas do Universo (estrelas, galáxias, aglomerados, super-aglomerados)?

Raio de Hubble: $v=HD$ $c=H R_H$ $R_H = c/H$

É a distância a partir da qual não há mais contato causal.



$$R_H \equiv |1/H| \equiv |a/\dot{a}|$$

$$d/dt = da/dt \, d/da = H \, d/d\ln(a)$$

$$\frac{d \ln(R_H)}{d \ln(a)} = 1 - \frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2}.$$

$$\lambda_{\text{fis}} = \lambda a$$

$$d \ln \lambda_{\text{fis}} / d \ln (a) = 1$$

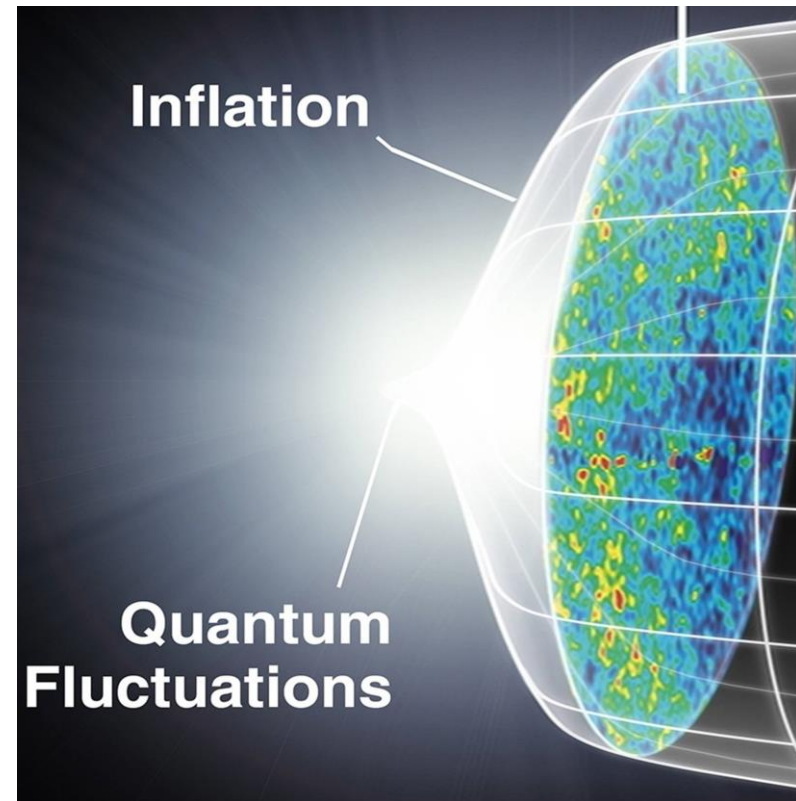
→Inflação:
imaginada para resolver esses problemas
do Big Bang.

Período no universo primordial onde a
expansão é acelerada.

Um campo físico com pressão negativa.

Não resolve o problema da singularidade.

Mas previu propriedades da radiação de
fundo que depois foram observadas!



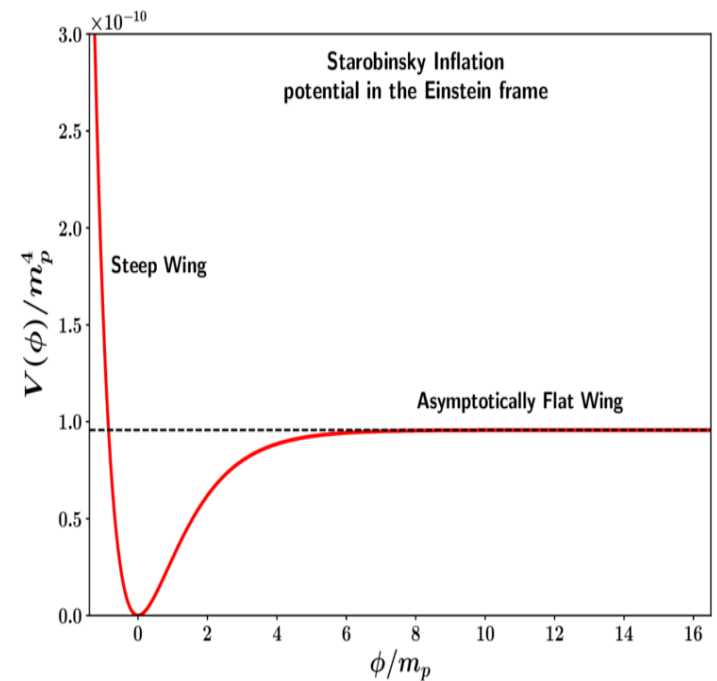
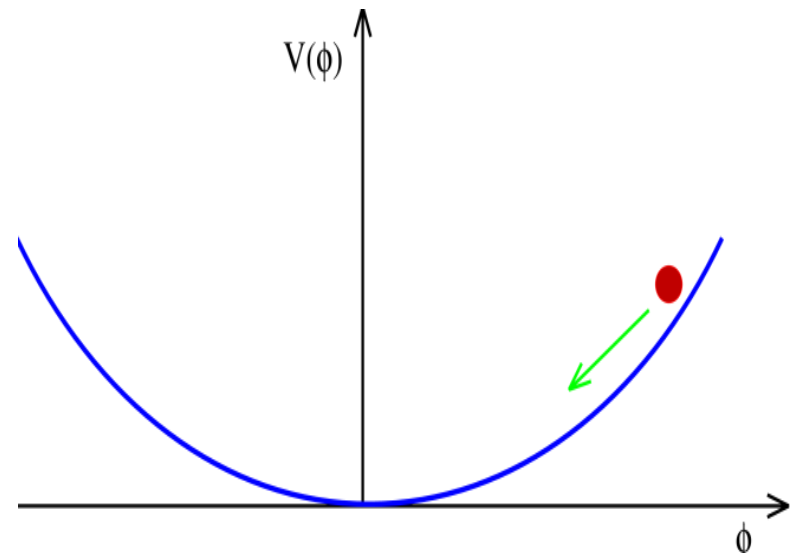
$$\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi G(\rho + 3p)/3 \rightarrow p < -\rho/3$$

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)$$

$$p = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{8\pi}{3m_{\text{Pl}}^2} \left(\dot{\phi}_0^2 - V(\phi_0) \right) .$$

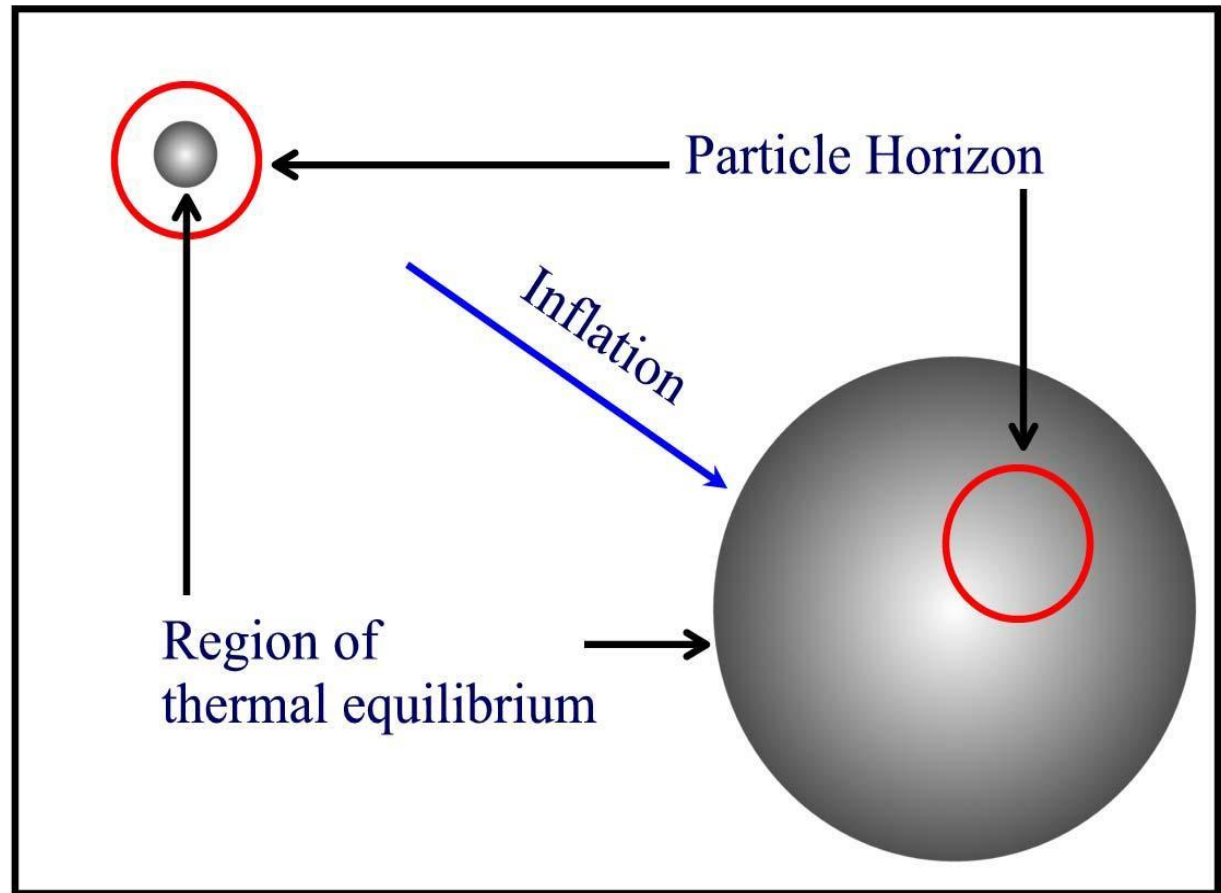
$$\ddot{\phi}_0 + 3H\dot{\phi}_0 = -V_{,\phi_0} .$$



$$\frac{d \ln(R_H)}{d \ln(a)} = 1 - \frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2}.$$

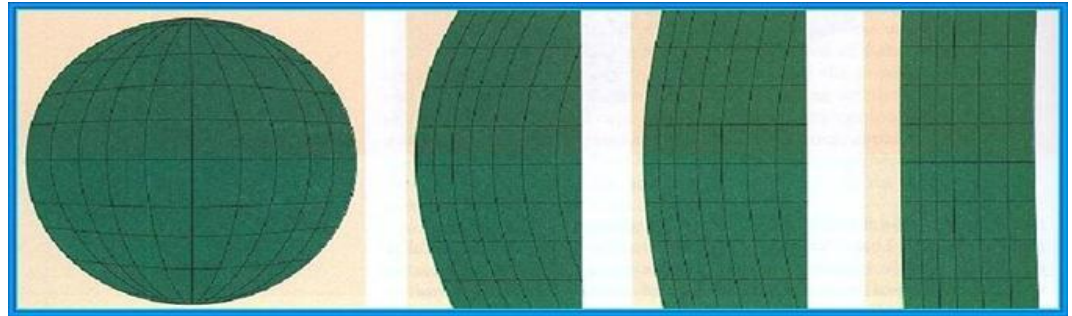
a) Problema do horizonte:

a região em equilíbrio térmico estava dentro do horizonte causal, mas durante a inflação ela cresce aceleradamente, e fica maior que o horizonte causal, que cresce mais devagar nesse período.



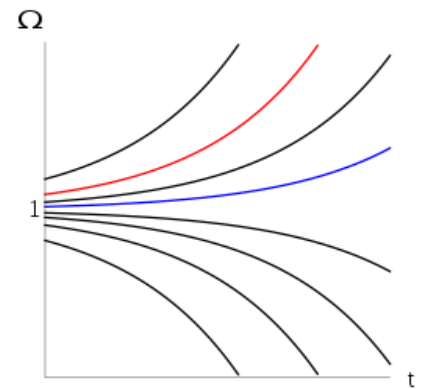
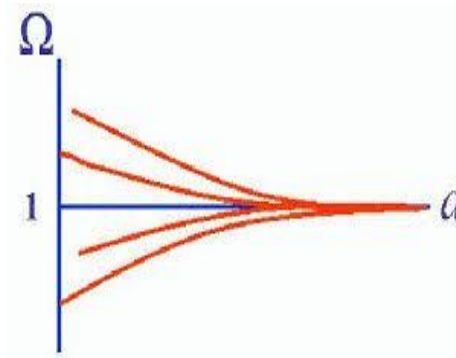
b) Problema da planeza:

Devido à expansão acelerada muito intensa, o universo que a gente vê é uma pequena parte de um espaço curvo, que portanto parece plano.



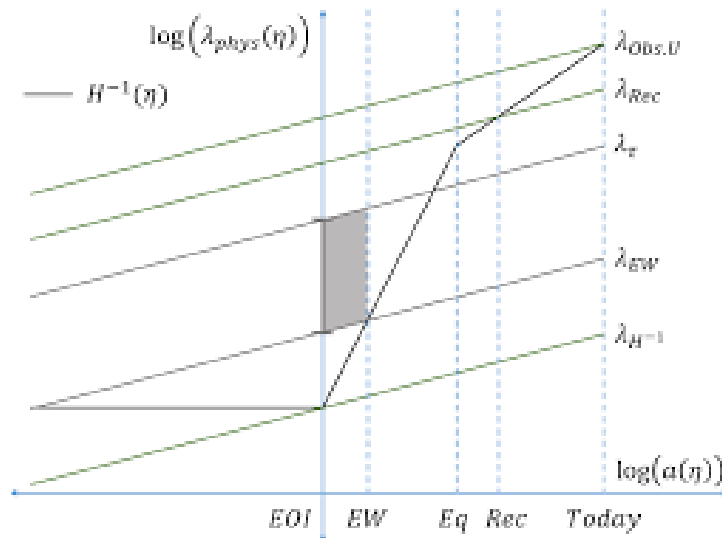
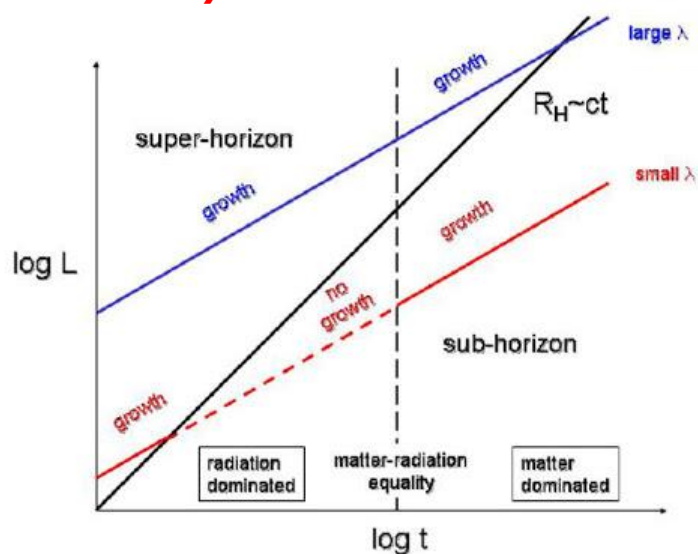
$$\Omega_T \equiv \rho_T / \rho_c \approx 1$$

$$|\Omega_T' - 1| = -2 \frac{\ddot{a}}{\dot{a}^3}$$



c) Problema da formação das estruturas:

Devido à expansão acelerada muito intensa, o raio de Hubble nesse período fica quase constante, e as escalas das estruturas que hoje vemos no Universo ficam bem menores que o raio de Hubble, e portanto com contato causal, permitindo um modelo físico para a sua origem (flutuações quânticas do vácuo).



Mas e se o Universo não teve um começo?

Esses enigmas simplesmente não se colocam!

Portanto, se resolvemos o problema da singularidade, resolvemos também esses enigmas.

E porque não fizeram isso desde o começo? $\dot{H} = -\frac{4\pi G}{c^2}(\rho + p)$

- 1) Porque era difícil imaginar campos físicos que pudessem fazer a derivada de H positiva.
- 2) Instabilidades numa fase de contração.

O primeiro problema foi resolvido com o desenvolvimento da teoria quântica aplicada à Cosmologia.

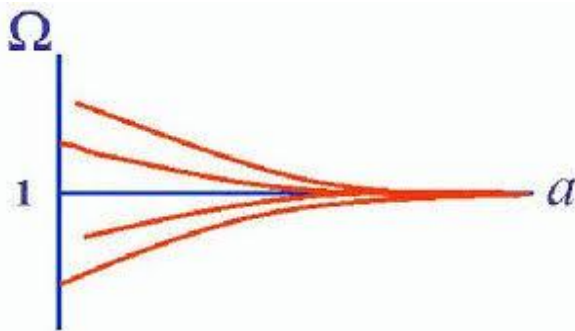
O segundo, imaginando que no infinito passado o Universo era muito grande e rarefeito, quase o perfeito vazio. Nesse caso, a contração é estável.

a) O problema do horizonte se resolve trivialmente: o Universo teve um tempo infinito para entrar em contato causal.

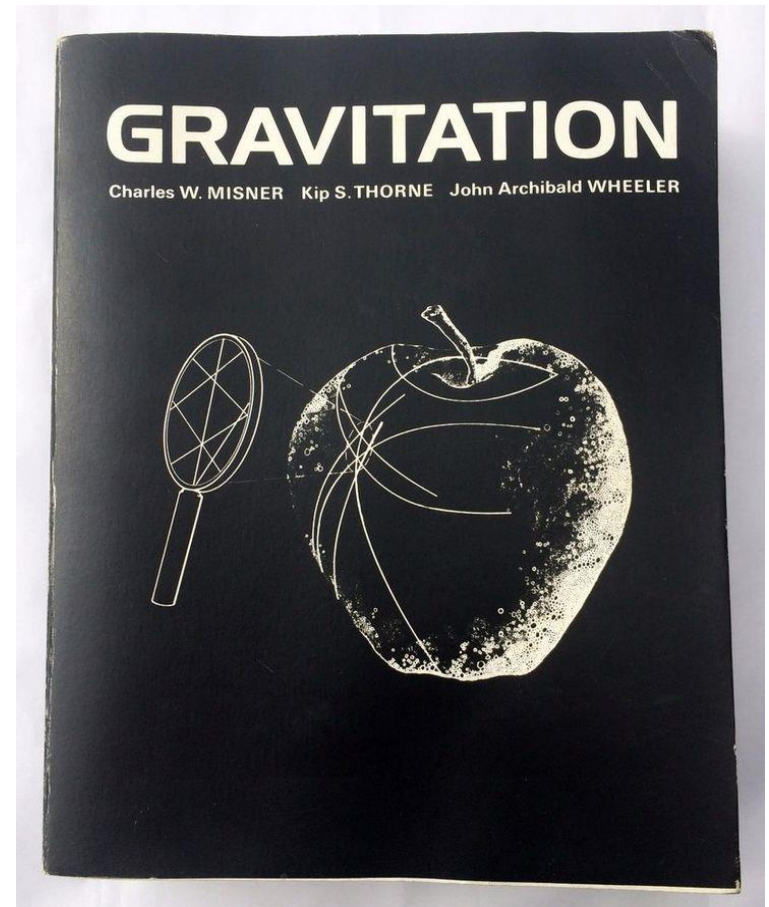
b) Problema da planeza:

Numa contração desacelerada, o raio de Hubble decresce muito mais rapidamente que o Universo e suas escalas. É como se a lente com a qual vemos o Universo só conseguisse focalizar em partes cada vez menores de um espaço curvo, parecendo, portanto, plano para nós. Em outras palavras, o Universo parece plano para nós por ter expandido muito menos do que tudo que já contraiu.

$$|\Omega_T - 1| = -2 \frac{\ddot{a}}{\dot{a}^3}$$

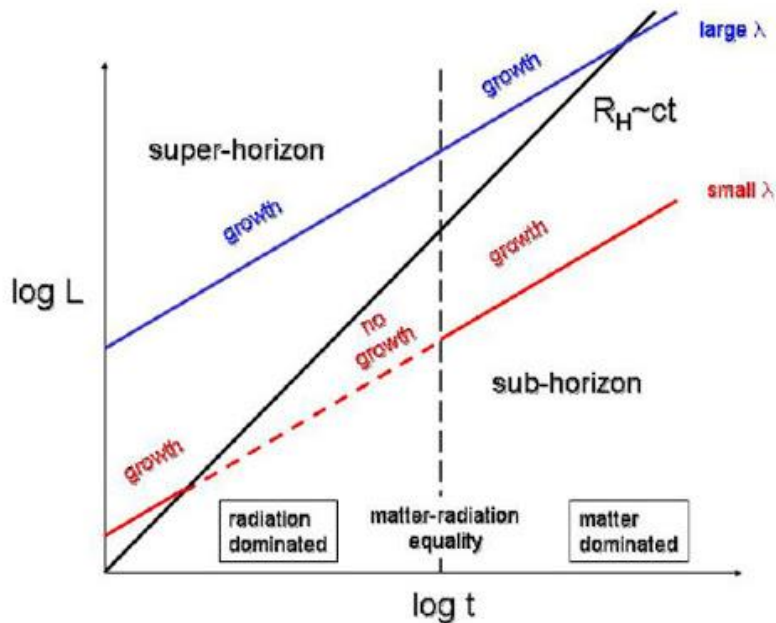


Ao invés do Universo crescer muito mais rápido que o raio de Hubble, como na inflação, aqui é o raio de Hubble que decresce muito mais rápido que o Universo.

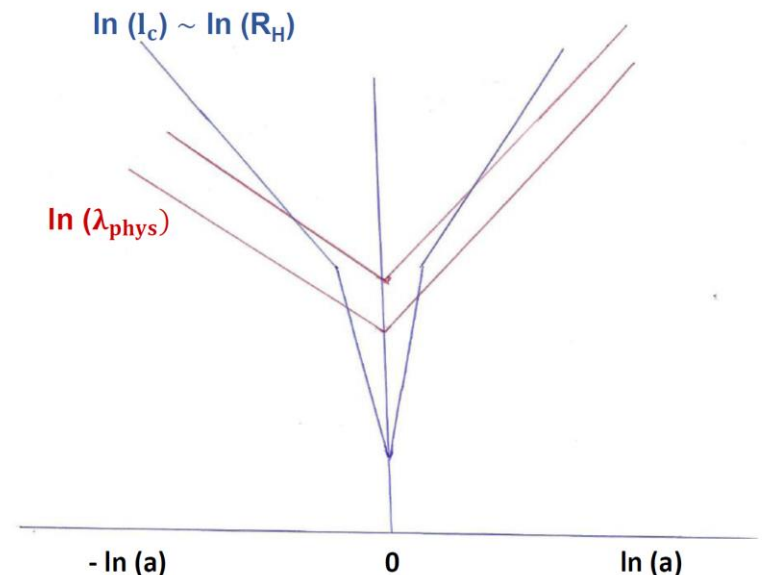


c) Problema da formação das estruturas:

Devido à contração desacelerada muito longa, indo para trás no passado, o raio de Hubble fica muito maior que as escalas das estruturas que hoje vemos no Universo, e portanto com contato causal, permitindo um modelo físico para a sua origem (flutuações quânticas do vácuo). É o reverso do que acontece na fase de expansão.



$$\frac{d \ln(R_H)}{d \ln(a)} = 1 - \frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2}.$$



Quantum cosmological perturbations in quantum backgrounds.

Scalar perturbations:

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[(1 + 2\Phi) d\eta^2 - (1 - 2\Phi) \gamma_{ij} dx^i dx^j \right],$$

$\Phi(x, \eta)$ is the inhomogeneous perturbation, related to the Newtonian potential in the nonrelativistic limit. $dt = a d\eta$

Matter content: scalar field φ

Canonical scalar field

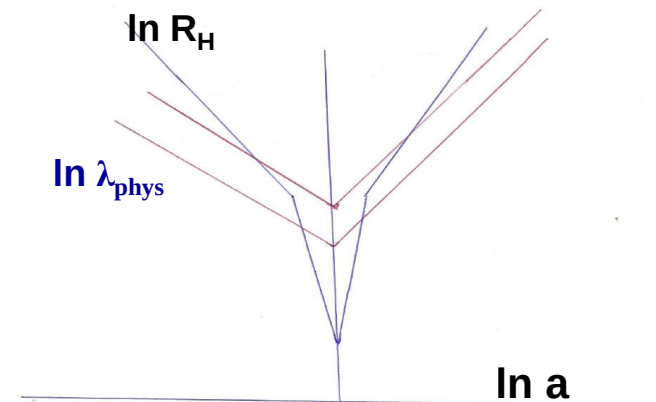
$$L = \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi + V(\varphi)$$
$$w = p/\rho \quad c_s^2 = 1$$

QUANTUM EQUATIONS FOR PERTURBATIONS

$$i \frac{\partial \Psi_{\mathbf{k}}}{\partial \eta} = \left[-\frac{\partial^2}{\partial v_{\mathbf{k}}^* \partial v_{\mathbf{k}}} + c_s^2 k^2 v_{\mathbf{k}}^* v_{\mathbf{k}} - i \frac{z'}{z} \left(\frac{\partial}{\partial v_{\mathbf{k}}^*} v_{\mathbf{k}}^* + v_{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial v_{\mathbf{k}}} \right) \right] \Psi_{\mathbf{k}}. \quad \mathbf{z} = \phi'/H$$

For the modes we have:

$$v_{\mathbf{k}}'' + \left(c_s^2 k^2 - \frac{z''}{z} \right) v_{\mathbf{k}} = 0.$$



but now $\mathbf{z}$ is calculated from the quantum bohmian trajectory.

For gravitational waves: $c_s^2 = 1$, $v \rightarrow \mu = ah$, $z \rightarrow a$
 Canonical scalar field: $c_s^2 = 1$.

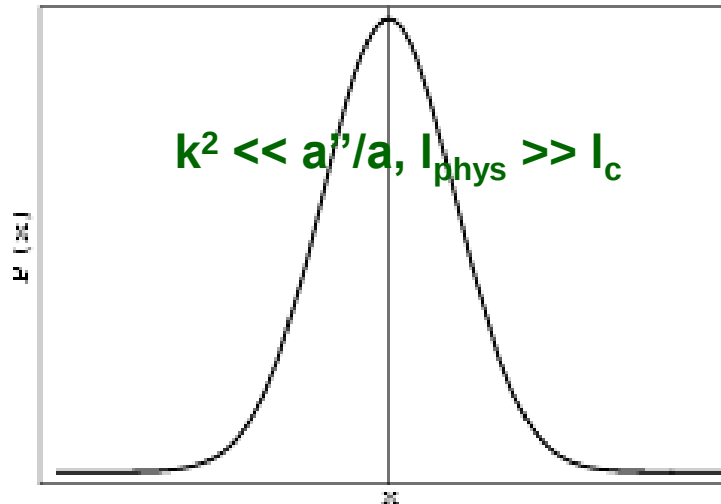
$$v_{\mathbf{k}}'' + \left(c_s^2 k^2 - \frac{z''}{z} \right) v_{\mathbf{k}} = 0.$$

Em muitas situações $z \sim a$. Vamos assumir $c_s = 1$.

Curvature scale: $l_c \approx R^{-1/2} \approx a^3/a''$; Physical wavelength: $l_{\text{phys}} = a/k$

Before the bounce,
in the contracting
phase

$$k^2 \gg a''/a, l_{\text{phys}} \ll l_c$$



After the bounce,
In the expanding
phase.

$$k^2 \gg a''/a, l_{\text{phys}} \ll l_c$$

Point of matching: $k^2 = a''/a \Rightarrow l_{\text{phys}} = l_c$

QUANTIZATION

In the Schrödinger picture:

$$\Psi = \prod_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^{3+}} \Psi_{\mathbf{k}}(v_{\mathbf{k}}, v_{\mathbf{k}}^*, \eta)$$

Schrödinger equation for the modes:

$$i \frac{\partial \Psi_{\mathbf{k}}}{\partial \eta} = \left[-\frac{\partial^2}{\partial v_{\mathbf{k}}^* \partial v_{\mathbf{k}}} + c_s^2 k^2 v_{\mathbf{k}}^* v_{\mathbf{k}} - i \frac{z'}{z} \left(\frac{\partial}{\partial v_{\mathbf{k}}^*} v_{\mathbf{k}}^* + v_{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial v_{\mathbf{k}}} \right) \right] \Psi_{\mathbf{k}}.$$

The vacuum quantum state: $\Psi_{\text{vacuum}}(v_{\mathbf{k}}, \eta) = \langle v_{\mathbf{k}} | 0, \eta \rangle :$

$$\Psi_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2\pi}|f_{\mathbf{k}}(\eta)|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2|f_{\mathbf{k}}(\eta)|^2} |v_{\mathbf{k}}|^2 + i \left[\left(\frac{|f_{\mathbf{k}}(\eta)|'}{|f_{\mathbf{k}}(\eta)|} - \frac{z'}{z} \right) |v_{\mathbf{k}}|^2 - \int^{\eta} \frac{d\tilde{\eta}}{2|f_{\mathbf{k}}(\tilde{\eta})|^2} \right] \right\}$$

where $f_{\mathbf{k}}'' + (c_s^2 k^2 - z''/z) f_{\mathbf{k}} = 0$. Initial conditions for $f_{\mathbf{k}}$ are given when $c_s^2 k^2 \gg z''/z$, and $f_{\mathbf{k}}$ should behave as $f_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{2c_s k}} e^{-ic_s k \eta}$

Then we have $\Psi_{\mathbf{k}}(v_{\mathbf{k}}, \eta) \propto \exp(-c_s k |v_{\mathbf{k}}|^2) e^{-ic_s k \eta}$, the usual ground state wave function for the harmonic oscillator (making $\hbar=2\pi$, $m=1/2$, $c_s k = \omega/2$)

THE PROBLEM

$|0\rangle$ is homogeneous and isotropic,
and so is $\langle 0|v(x)v(x)|0\rangle$
(= $\langle 0|T^*v(x)T T^*v(x)T|0\rangle = \langle 0|v(x+\delta)v(x+\delta)|0\rangle$)

$$\frac{\delta T}{T_0}(\theta, \varphi) = \sum_{lm} \alpha_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

$$\alpha_{lm} = \frac{4\pi i^l}{3} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} j_l(kR_D) Y_{lm}^*(\hat{k}) \Delta(k) \Psi_{\vec{k}}(\eta_R),$$

$$\Psi = \Phi$$

What do we put in the place of Φ ?
The mean value (zero!), a realization?

Inflação e ricochete tratados conjuntamente

Fases de inflação e ricochete dominadas por um campo no cruzamento:

$$p = w\rho \quad a \propto \eta^{2/(1+3w)}$$

Inflação: $-1 < w < -1/3$

Ricochete: $-1/3 < w < 1/3$

$$v_k'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a} \right) v_k = 0$$

$$v_k'' + \left(k^2 - \frac{2(3w - 1)}{(1 + 3w)^2 \eta^2} \right) v_k = 0$$

whose solution is

$$v = \sqrt{\eta} [c_1(k) H_\nu^{(1)}(\bar{k}\eta) + c_2(k) H_\nu^{(2)}(\bar{k}\eta)], \quad (31)$$

with

$$\nu = \frac{3(1 - \omega)}{2(3\omega + 1)},$$

Imposing vacuum initial conditions for v ,

$$v_{\text{ini}} = \frac{e^{i\bar{k}\eta}}{\sqrt{k}}, \quad (32)$$

which implies that

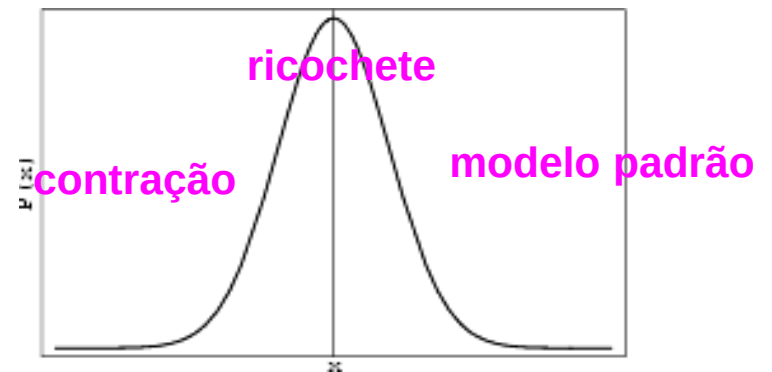
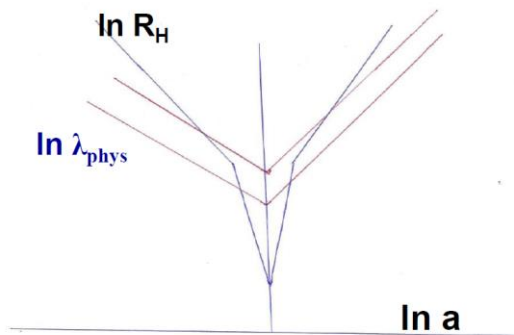
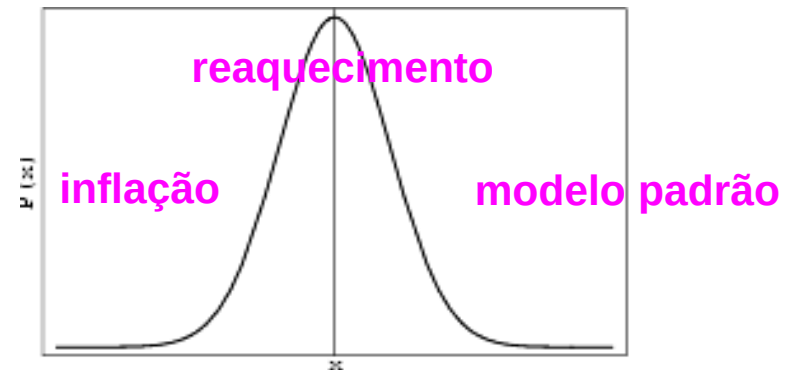
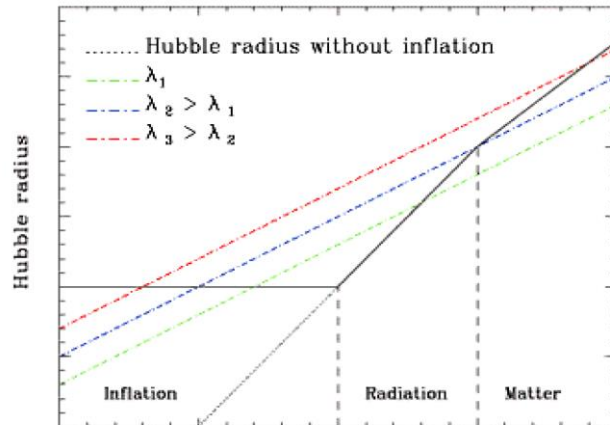
$$c_1 = 0 \quad \text{and} \quad c_2 = \ell_{\text{Pl}} \sqrt{\frac{3\pi}{2}} e^{-i(\pi/2)(\nu+(1/2))}.$$

The solution can also be expanded in powers of k^2 according to the formal solution [1]

$$\begin{aligned} \frac{v}{a} \simeq & A_1(k) \left[1 - \omega k^2 \int^t \frac{d\bar{\eta}}{a^2(\bar{\eta})} \int^{\bar{\eta}} a^2(\bar{\bar{\eta}}) d\bar{\bar{\eta}} \right] + A_2(k) \\ & \times \left(\int^\eta \frac{d\bar{\eta}}{a^2} - \omega k^2 \int^\eta \frac{d\bar{\eta}}{a^2} \int^{\bar{\eta}} a^2 d\bar{\bar{\eta}} \int^{\bar{\bar{\eta}}} \frac{d\bar{\bar{\bar{\eta}}}}{a^2} \right), \end{aligned} \quad (33)$$

up to order $\mathcal{O}(k^{j \geq 4})$ terms. In Eq. (33), the coefficients A_1 and A_2 are two constants depending only on the wave number k through the initial conditions. Although this

$$\frac{v_k}{a} = A_1(k) + \frac{A_2(k)}{a^{\frac{1-3w}{2}}}$$



$$A_1 \propto k^{3(1-\omega)/[2(3\omega+1)]},$$

$$A_2 \propto k^{3(\omega-1)/[2(3\omega+1)]},$$

Nos ricochetes o termo constante ganha maior contribuição do A2 na expansão: há uma mistura.

$$\frac{v}{a} \sim A_1 + CA_2 + \frac{A_2}{a^{(1-3w)/2}}$$

Na inflação é sempre o A1. No ricochete é o A2.

$$\langle \Delta T(k) \Delta T(k') \rangle \sim P(k) \delta(k-k')$$

$$P(k) \sim k^3 |v(k)/z|^2 \sim A k^{[n_s(k) - 1]}$$

Inflação: $P(k) \sim k^3 |v(k)/z|^2 \sim k^3 |A_1(k)|^2 = k^{[6(1+w)/(1+3w)]} \rightarrow w \sim -1$

Planck: $w = -0.98 \rightarrow n_s = 0.96$

Ricochete: $P(k) \sim k^3 |v(k)/z|^2 \sim k^3 |A_2(k)|^2 = k^{[12w/(1+3w)]} \rightarrow w \sim 0$

Planck: $w = -0.0033 \rightarrow n_s = 0.96$

Challenges:

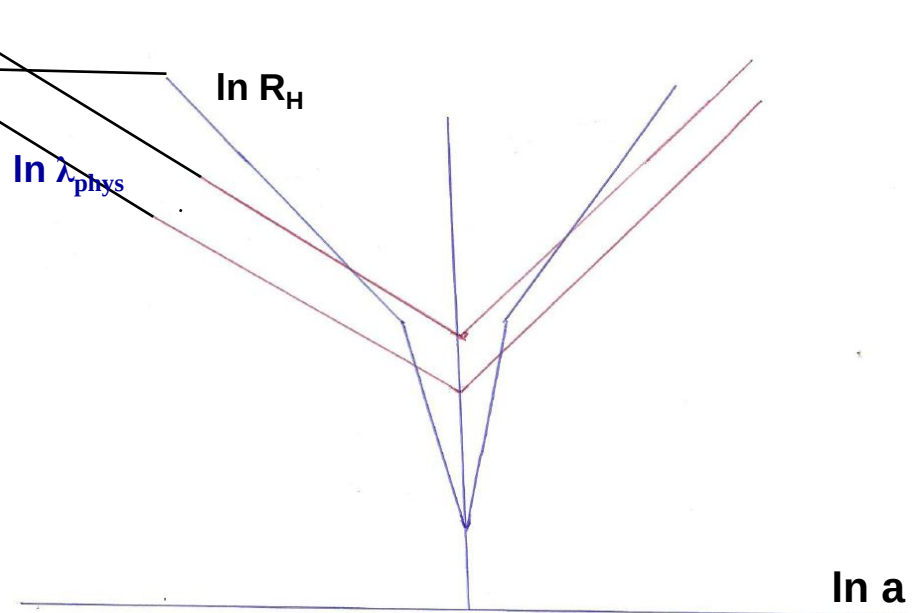
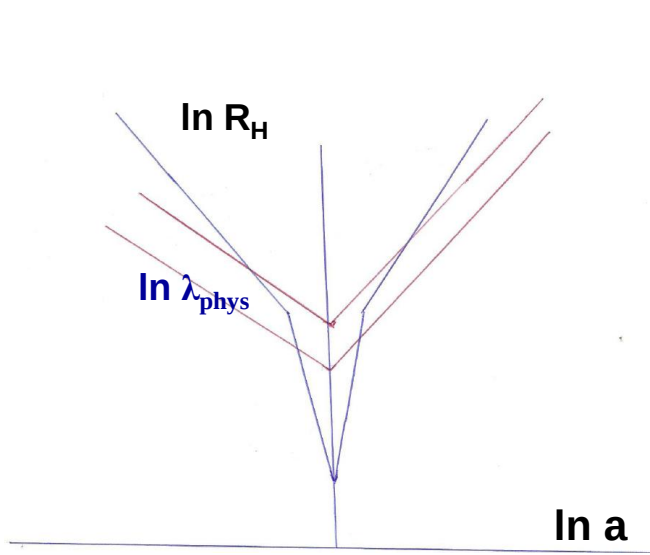
i) With a single canonical scalar field within General Relativity (including classical extensions), the ratio $r=T/S > 0.1$, but observations (Planck satellite) give $r < 0.1$.

ii) Dark energy may be important in the contracting phase. However, they make it difficult to impose vacuum initial conditions in the far past of the contracting phase.

We obtained the power spectrum in the case of a cosmological constant, but there are unanswered issues.

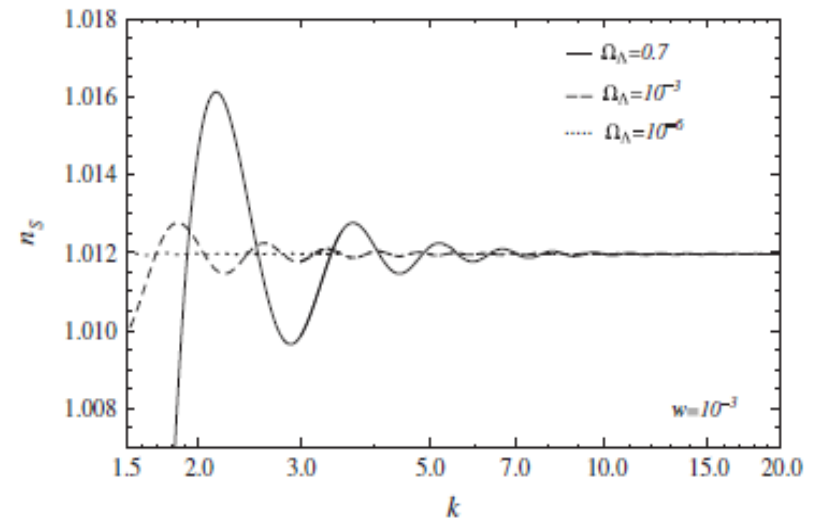
iii) Correct approach for bouncing models with two or more fluids.

R. Maier, S. Pereira, N. Pinto-Neto, and B. B. Sifert, Phys. Rev. D85, 023508 (2012).



In the far past:

Dark energy: $R_H \sim \text{const.}$

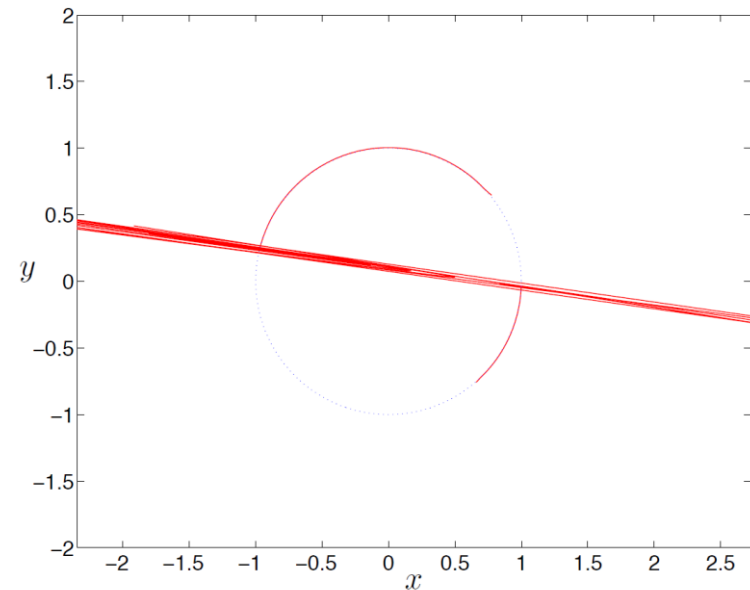
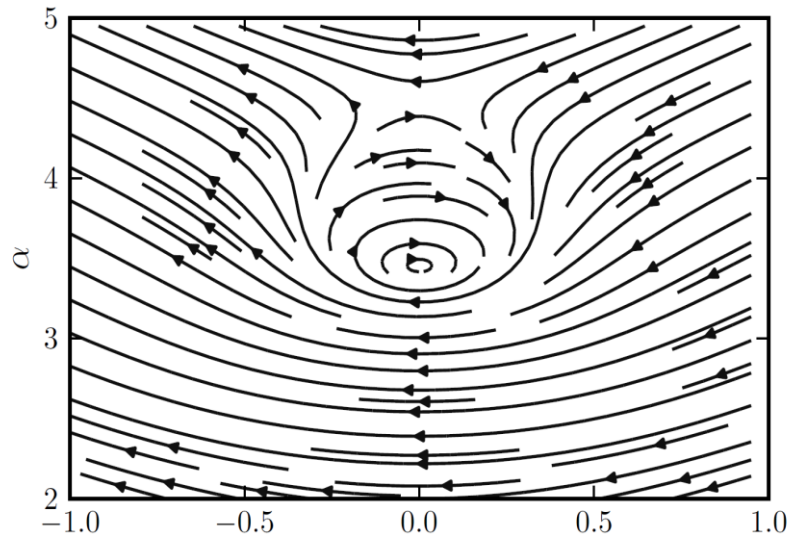


$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} [\nabla^\nu \phi \nabla_\nu \phi - V(\phi)]. \quad (1)$$

The potential $V(\phi)$ is chosen to be the exponential, i.e.,

$$V(\phi) = V_0 e^{-\lambda \kappa \phi}, \quad (2)$$

Quantum bounce solution



S. Colin and NPN; Phys. Rev. D 96, 063502 (2017)

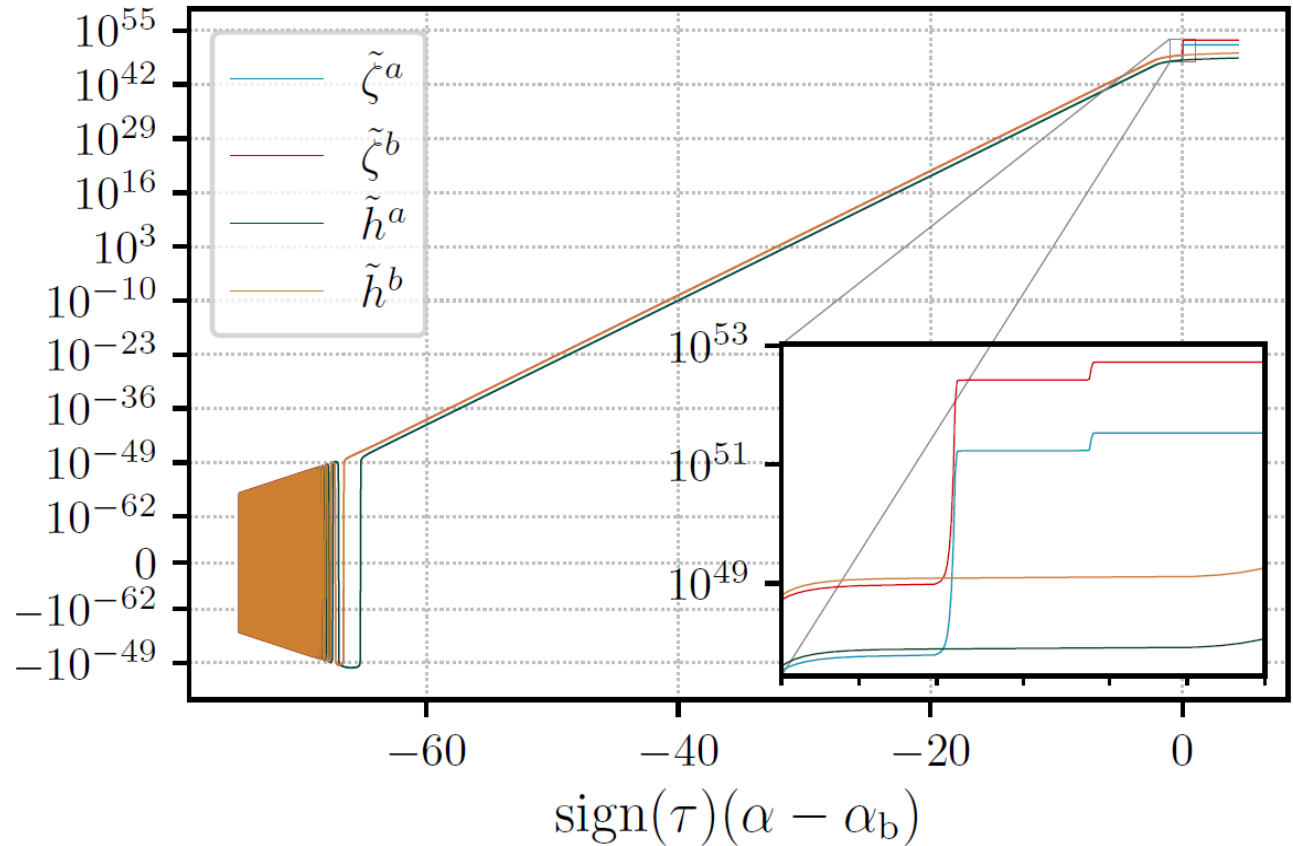
set2

$$\zeta_k = v_k/z$$

$$\frac{1}{R_H} \int \frac{dt}{x^2 a^3}$$

$$h_k = \mu_k/a$$

$$\frac{1}{R_H} \int \frac{dt}{a^3}$$



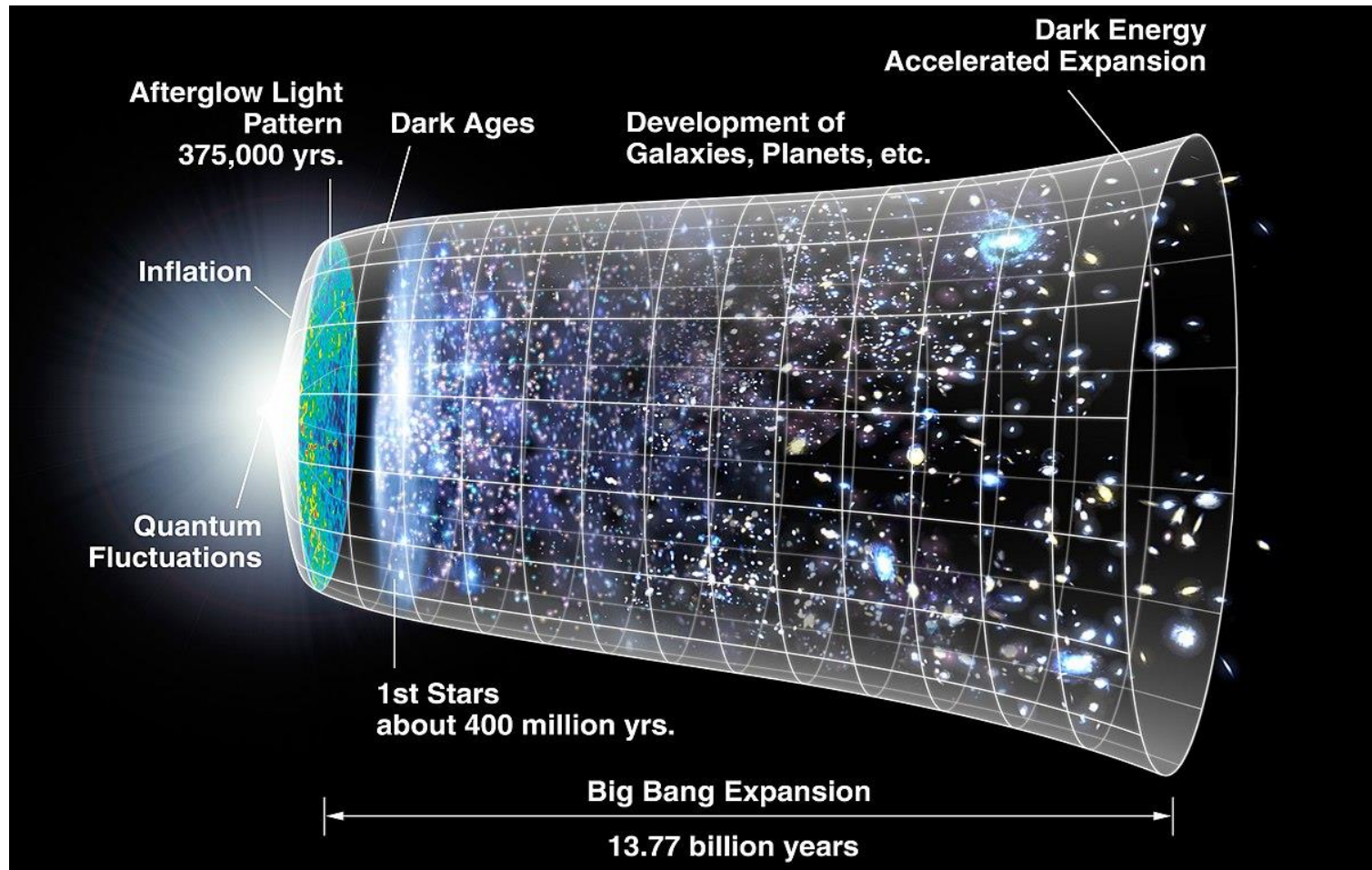
Amplification of scalar perturbations over tensor perturbations: $r = T/s < 0.1$

Amplitude must be multiplied by $\frac{l_{pl}}{R_H} \sim 10^{-60}$ which makes $\langle \zeta^2 \rangle \sim 10^{-10}$

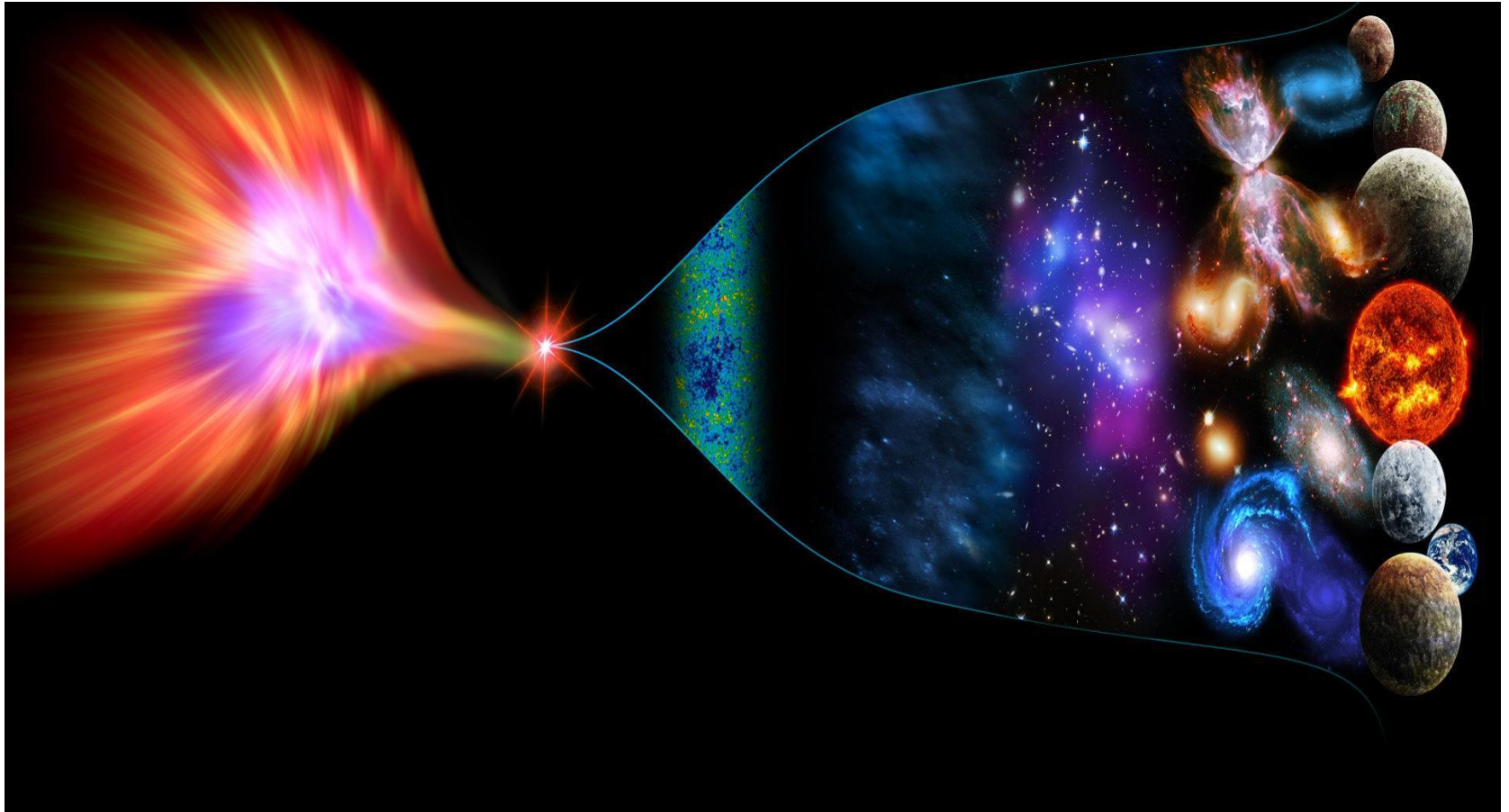
Cosmological scales crosses Hubble radius nearly $w \sim 0$, hence $n_s \sim 1$

A.P. Bacalhau, S.D.P. Vitenti, NPN arXiv:170608830 Phys.Rev. D98, 083517 (2018)

BIG BANG



BIG BOUNCE



MODELOS CÍCLICOS



CONCLUSÃO

Gravitação Quântica em construção: buracos negros e cosmologia.

Arena promissora e grande desafio: **COMOLOGIA QUÂNTICA**

A singularidade inicial cosmológica: nova Física!

Não há NENHUMA observação que indique que o Universo teve um começo, apenas que ele teve uma fase muito quente no passado.

O Big Bang NÃO é um fato, é apenas uma possibilidade.

Uma outra possibilidade é um universo sem singularidade, com uma fase de contração e um ricochete (BIG BOUNCE), que não tem começo nem fim.

Devemos procurar as “impressões digitais” de uma possibilidade ou outra nas observações cosmológicas, que estão cada vez mais precisas – é incrível o que já sabemos sobre nosso Universo!

Teve o Universo um começo? Ainda não sabemos a resposta, mas há a possibilidade a curto prazo de resolver essa questão ancestral do ser humano através do método científico. **Implicações para a Teoria Quântica!**