

Uma introdução à Relatividade Geral

Martín G. W. Richarte.
Universidade Federal do Espírito Santo-2021
16-21Agosto, DM.

23 de agosto de 2021

Livros

Surgimento da
Relatividade
Restrita

Relatividade
Restrita

Por que precisamos
da Relatividade
Geral?

Formalismo

Testes
experimentais da
RG

Problemas/experime

Roteiro

Livros

Surgimento da Relatividade Restrita

Relatividade Restrita

Por que precisamos da Relatividade Geral?

Formalismo

Testes experimentais da RG

Problemas/experimentos

Uma introdução à
Relatividade Geral

Martín G. W.
Richarte.
Universidade
Federal do Espírito
Santo-2021
16-21 Agosto, DM.

Livros

Surgimento da
Relatividade
Restrita

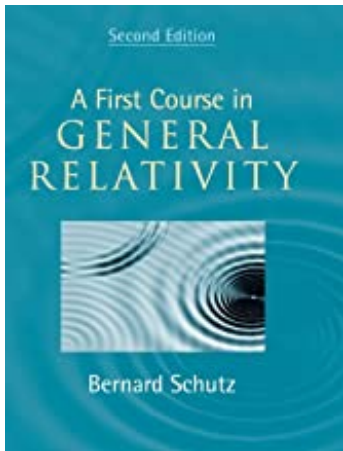
Relatividade
Restrita

Por que precisamos
da Relatividade
Geral?

Formalismo

Testes
experimentais da
RG

Problemas/experimentos



Uma introdução à Relatividade Geral

Martín G. W.
Richarte.
Universidade
Federal do Espírito
Santo-2021
16-21 Agosto, DM.

Livros

Surgimento da Relatividade Restrita

Relatividade Restrita

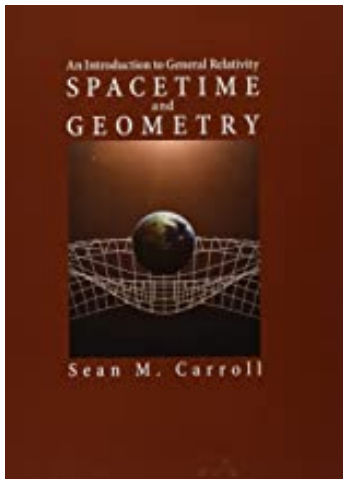
Por que precisamos da Relatividade Geral?

Formalismo

Testes experimentais da RG

Problemas/experimentos

Carroll



Uma introdução à Relatividade Geral

Martín G. W.
Richarte.
Universidade
Federal do Espírito
Santo-2021
16-21Agosto, DM.

Livros

Surgimento da Relatividade Restrita

Relatividade Restrita

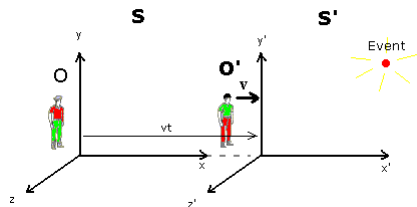
Por que precisamos da Relatividade Geral?

Formalismo

Testes experimentais da RG

Problemas/experimentos

1. Esquema da transformação de Galileu:



2. Forma matricial da transformação de Galileu:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -v \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$$

1. As equações da mecânica clássica (newtoniana) são invariantes de forma (**covariantes**) baixo uma transformação de Galileu (**TG**). Para visualizar dito fato resulta útil considerar uma **TG** que conecta dois sistemas de referências inerciais. Sejam S_0 e S'_0 , a **TG** que relaciona os dois sistemas de referência é dado pela seguinte expressão:

$$x' = x - vt, \quad (1)$$

$$y' = y, \quad (2)$$

$$z' = z, \quad (3)$$

$$t' = t. \quad (4)$$

2. Pode-se escrever a **TG** numa forma vetorial: **TG** : $S_0 \rightarrow S'_0$: $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t$, $t' = t$.
3. Perceba-se três conceitos incluídos na **TG**: 1-Sistema de referência inercial ($\mathbf{a}' = \mathbf{a}$), 2-é uma transformação linear e 3-O tempo é absoluto ($t' = t$)!!!

1. Partimos da Eqn. de Newton na forma vetorial no sistema S_0 :

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$$

2. Usamos o que os sistemas de referências são inerciais, $\mathbf{a}' = \mathbf{a}$.
3. Além disso, a força pode-se escrever como $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}[\mathbf{r}', t'], t') = \mathbf{F}'(\mathbf{r}', t')$
4. A eqn. de Newton é invariante no sentido de que não muda a forma dela em outro sistema e portanto tem-se a mesma estrutura e/ou eqn. de Newton no sistema S_0' :

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt'^2} = \mathbf{F}'(\mathbf{r}', t')$$

Livros

Surgimento da
Relatividade
RestritaRelatividade
RestritaPor que precisamos
da Relatividade
Geral?

Formalismo

Testes
experimentais da
RG

Problemas/experime

1. **Pergunta fundamental:** As **eqn. de Maxwell** são invariantes frente a uma **TG** ?
2. Vamos a considerar as equações de Maxwell numa região do espaço livre de fontes ($\rho = 0$, $\mathbf{J} = 0$):

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{B} \quad (6)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = +\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{D}. \quad (7)$$

3. Usando a identidade $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$, podemos mostrar que a eqn. dinâmica para o campo elétrico no meio linear com ϵ e μ :

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

4. Onde o operador Lapaciano é definido como $\nabla^2 = \partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz}$. c é a vel. da luz no vácuo.

1. Suponha que o campo elétrico depende de x e t : $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, t)$.
2. Fazemos uma transformação de Galileu na eqn. de onda do campo elétrico. Começamos pelos operadores:

$$\partial_x = \frac{\partial x'}{\partial x} \partial_{x'} + \frac{\partial t'}{\partial x} \partial_{t'} = \partial_{x'} \quad (8)$$

$$\partial_t = \frac{\partial x'}{\partial t} \partial_{x'} + \frac{\partial t'}{\partial t} \partial_{t'} = -v \partial_{x'} + \partial_{t'} \quad (9)$$

3. Usando que $\mathbf{E}(x, t) = \mathbf{E}'(x', t')$ chega-se uma eqn. de onda modificada:

$$\partial_{x'x'} \mathbf{E}' - \frac{\mu\epsilon}{c^2} \partial_{t't'} \mathbf{E}' + \frac{\mu\epsilon}{c^2} \left(v^2 \partial_{x'x'} \mathbf{E}' - 2v \partial_{x't'} \mathbf{E}' \right) = 0$$

4. Isto significa que a eqn. de ondas só é válida no sistema de referência onde o meio linear está em repouso. Para evitar este problema foi introduzido o éter.

1. Dois experimentos geraram problemas com a hipótese da existência do éter:

- ▶ Medições da velocidade da luz em fluidos em movimento [Fizeau, 1859]
- ▶ Experimento de interferometria do Michelson-Morley [MM, 1887]

1. No princípio do século XX, as possíveis explicações eram as seguintes:
 - ▶ As eqns. de Maxwell estavam erradas. O eletromagnetismo tinha que ser invariante frente a uma T.G.
 - ▶ As eqns. de Maxwell são válidas no sistema de referência fixo ao éter (um sistema de ref. absoluto). As interações dos campos e a matéria seguiam um conjunto de regras complexas!!
 - ▶ Todas as eqns. da Física são covariantes porém não frente as T.G
2. **Einstein considerou a terceira possibilidade como a correta e propôs os postulados da Relatividade Restrita-1905**
3. Fato curioso: Foi Max Planck quem sugeriu o termo "relatividade" para ressaltar a noção de transformação das leis da física entre observadores movendo-se relativamente entre si.

Postulados da teoria da RR

1. **P1:** Inexistência de um sistema de referência absoluto (éter). Ou seja, **as eqns. da Física são covariantes em todo sistema de referência inercial**. [Também chamado principio da Relatividade]
2. **P2:** Invariância da velocidade da luz. Ou seja, a velocidade da luz é a mesma em qualquer sistema de referência inercial e ela é independente do movimento da fonte.
3. O P2 também exclui ter partículas com uma velocidade $v > c$!!!

Uma introdução à
Relatividade Geral

Martín G. W.
Richarte.
Universidade
Federal do Espírito
Santo-2021
16-21 Agosto, DM.

Livros

Surgimento da
Relatividade
Restrita

Relatividade
Restrita

Por que precisamos
da Relatividade
Geral?

Formalismo

Testes
experimentais da
RG

Problemas/experime

Conceitos da RR-I

1. **Evento:** Defina-se como um ponto no espaçotempo (de Minkowski $M_4 = \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}$), ou seja, um vetor $(ct, \mathbf{r})$.
2. **Norma de Minkowski (não euclidiana):** Sejam dois eventos, **E1**: (ct_1, x_1, y_1, z_1) e **E1**: (ct_2, x_2, y_2, z_2) então defina-se o intervalo –ou distância– entre os dois eventos como

$$\Delta s^2 = -c^2(t_2 - t_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

3. Dita norma é a forma de medir a distância entre eventos e a sua forma diferencial se chama de **elemento de linha**:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -\textcolor{red}{c^2} \textcolor{red}{dt^2} + \|\mathbf{dx}\|^2.$$

4. Agora podemos introduzir uma notação indicial pra indicar istos quadrivetores numa forma compacta, ou seja, podemos escrever que o quadrivetor associado a um evento é :

$$x^\mu \equiv (ct, x, y, z) \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3), \quad 0 \leq \mu \leq 3$$

Conceitos da RR-II

1. **Métrica:** Dentro do elemento de linha tem-se implícito um produto interior do espaçotempo M_4 . O nome desse produto interior se chama métrica de Minkowski. É uma matriz inversível ($\eta\eta^{-1} = I_{4 \times 4}$) de 4×4 que acostume-se a notá-la da seguinte forma:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. O elemento de linha vira: $ds^2 = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$. Ou, usando a convenção de Einstein, pode-se esquecer do símbolo de somatória e simplesmente escrever:
 $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$.
3. **Aclaração:** Quando os índices estão repetidos fala-se de índices mudos. Caso contrario disse-se que é um índice que está livre.

Conceitos da RR-III

1. Que tipo de transformação deixa o elemento de linha invariante?
2. Pode-se mostrar que se além do princípio da relatividade e da constância da velocidade de luz, impussermos que o espaço-tempo é homogêneo e isotrópico então as leis de transformações entre referenciais inerciais são tais que o intervalo é invariante, ou seja o seu valor é o mesmo para todos os referenciais inerciais, e as transformações são necessariamente lineares.
3. A única transformação linear não-singular que deixa o intervalo invariante é:

$$x^{\mu'} = L_{\alpha}^{\mu} x^{\alpha} + A^{\mu}$$

4. Só estamos interessados no caso associado ao (sub)grupo de Lorentz caracterizado por

4.1 T. homogênea: $A^{\mu} = 0$

4.2 Própria ortócrona: $\det(L_{\alpha}^{\mu}) = +1$ e $L_0^0 = +1$

5. As matrizes L_{α}^{μ} devem satisfazer a condição: $L^T \eta L = \eta$ ou $\eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} L_{\mu}^{\alpha} L_{\nu}^{\beta}$.

Conceitos da RR-IV

Uma introdução à
Relatividade Geral

Martín G. W.
Richarte.
Universidade
Federal do Espírito
Santo-2021
16-21 Agosto, DM.

1. A forma da transformação de Lorentz associado a um (**boost**) ao longo do eixo $\hat{x}$:

$$L_{\nu}^{\mu} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. O fator de Lorentz é $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ e a velocidade adimensional é $\beta = v/c$.
3. Perceba-se que esta é a transformação que respeita os postulados da RR e que permite conectar dois sistemas inerciais!!!

Livros

Surgimento da
Relatividade
Restrita

Relatividade
Restrita

Por que precisamos
da Relatividade
Geral?

Formalismo

Testes
experimentais da
RG

Problemas/experime

Conceitos da RR-V

1. Como a métrica já não é mais euclideana agora temos que distinguir entre dois tipos de objetos matemáticos. Por um lado, temos os objetos que vivem no espaço tangente $T_p M_4$ (**contravariantes**), e por outro lado, temos objetos que vivem no **dual** do espaço tangente (**covariantes**), $T_p^* M_4$ (cotangente).
2. Um vetor contravariante está definido de acordo a como transforma frente a transformação de Lorentz:

$$A'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} A^{\nu}$$

3. Por exemplo, uma caso típico é o diferencial de coordenadas:

$$dx'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu}$$

4. Aqui $L'_{\nu}^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}$ é a transformação de Lorentz (**T.L.**)

Conceitos da RR-VI

1. Um vetor covariante transforma da seguinte forma frente à **T.L.**:

$$A'_{\mu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} A_{\nu}$$

2. Seja uma função escalar $\Phi(x^{\alpha})$ então seu diferencial é

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu}$$

3. A derivada covariante $[\partial/\partial x^{\mu} \equiv \partial_{\mu} = (\partial_t, \nabla)]$ é o caso típico dum vetor covariante e transforma como:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial \Phi}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}}$$

Conceitos da RR-VII

1. Além destes tipos de objetos é vital pelas equações da física construir outros tipos de objetos mais complicados chamados **tensores**. Vamos a começar por uma classificação bem simples.
2. Tensor de ordem zero: transforma como um escalar ante **T.L.**. Ex. elemento de linha, função escalar, $x_\mu x^\mu = cte$, etc.
3. Tensor de ordem um: pode ser um vetor contra/covariantes. Ex. Diferencial de coordenadas, derivada covariante.
4. Tensor de ordem dois: No caso da métrica com os índices embaixo é um tensor de ordem 2 simétrico que transforma da seguinte forma:

$$\eta_{\mu\nu} = L_\mu^\alpha L_\nu^\beta \eta_{\alpha\beta}$$

Conceitos da RR-VIII

1. Em geral, podemos ter tensores de diferentes ordens e inclusive mistos, ou seja, a delta de Krockner é o caso mais simples dum tensor misto δ^μ_ν e está definida da seguinte forma:

$$\delta^\mu_\nu = \begin{cases} 1, & \text{se } \mu = \nu, \\ 0, & \text{se } \mu \neq \nu. \end{cases}$$

2. O tensor métrico é o objeto que usamos para descer e subir índices:

2.1 Covariante $\rightarrow$ Contravariante: $A^\mu = \eta^{\mu\nu} A_\nu$

2.2 Covariante $\leftarrow$ Contravariante: $P_\mu = \eta_{\mu\nu} P^\nu$

Operações entre tensores-I

Uma introdução à
Relatividade Geral

Martín G. W.
Richarte.
Universidade
Federal do Espírito
Santo-2021
16-21 Agosto, DM.

Livros

Surgimento da
Relatividade
Restrita

**Relatividade
Restrita**

Por que precisamos
da Relatividade
Geral?

Formalismo

Testes
experimentais da
RG

Problemas/experime

1. Subir e descer os índices: $A^\mu = \eta^{\mu\nu} A_\nu$.
2. Soma de tensores de o mesmo tipo/ordem $A_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} + C_{\mu\nu}$
3. Contração: Reduz o total da ordem de um tensor por dois. $A_{\mu\nu} = B_{\mu\nu}^\alpha C_\alpha$. Ex.
Traço da métrica: $\eta^\mu_\mu = +2$.

Operações entre tensores-II

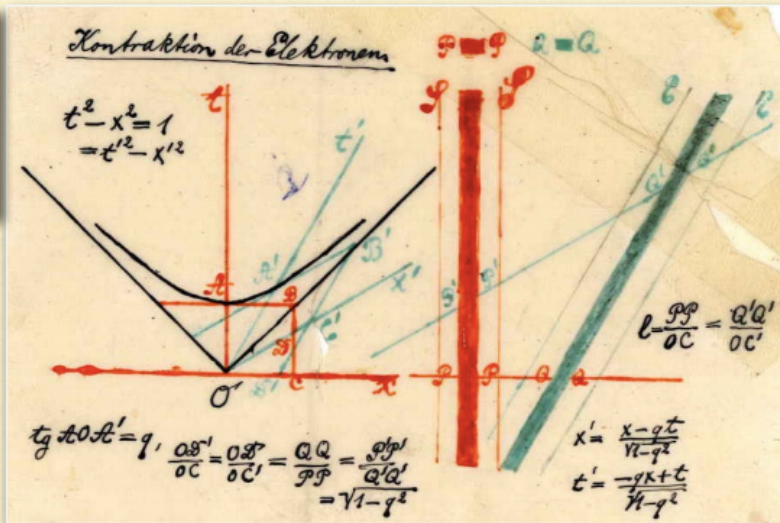
1. Então, podemos dizer que toda matriz é um tensor também? **Não**
2. Basta um contraexemplo para mostrar que existem matrizes que não transformam como tensores.
3. Seja uma matriz $W^{\mu\nu}$ de 2×2

$$W^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} (x^1)^2 & 0 \\ 0 & (x^0)^2 \end{bmatrix}$$

Estructura causal do espaçotempo



Minkowski,
Klön, 1908



Uma introdução à
Relatividade Geral

Martín G. W.
Richarte.
Universidade
Federal do Espírito
Santo-2021
16-21Agosto, DM.

Livros

Surgimento da
Relatividade
Restrita

Relatividade
Restrita

Por que precisamos
da Relatividade
Geral?

Formalismo

Testes
experimentais da
RG

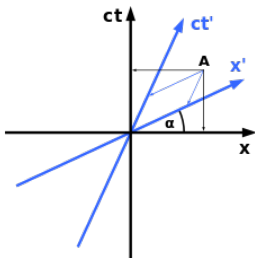
Problemas/experime

Estrutura do cone de luz-causalidade

- ▶ Em cada ponto de espaçotempo podemos desenhar um cone nulo e determinar o caráter de diferentes eventos de acordo à localização de ditos eventos. Ou seja, cada observador físico tem seu cone de luz associado.
- ▶ A sequência de eventos associados com um observador físico chama-se de **linha de mundo**.
- ▶ Os eventos associados com um intervalo pode ser de diferentes tipos:
 1. É de tipo Luz se está localizado sobre a superfície do cone: $ds^2 = 0$ ou $dx^2 - c^2 dt^2 = 0$, $x^2 - c^2 t^2 = cte$ (hiperbole no caso 1+1)-**Raio de luz**
 2. É de tipo espaço se o evento tem um $ds^2 > 0$, então $dx^2 - c^2 dt^2 > 0$. Não tem-se conexão causal pois está fora do cone de luz.
 3. É de tipo tempo se o evento tem um $ds^2 < 0$, então $dx^2 - c^2 dt^2 < 0$. Está dentro do cone e por tanto existe conexão causal. **Observador físico**

Diagrama do espaçotempo no caso 1+1

- ▶ Para simplificar nossa análise vamos considerar que é possível escolher $y = z = 0$. Por isso, caímos no caso de um diagrama no plano $ct - x$.
- ▶ Aos fins práticos, sempre nós podemos superpor dois diagramas com o objetivo de entender e/ou comparar dois eventos em dois sistemas de referência inerciais diferentes. O ângulo entre os eixos de S e S' é $\tan \alpha = v/c$.

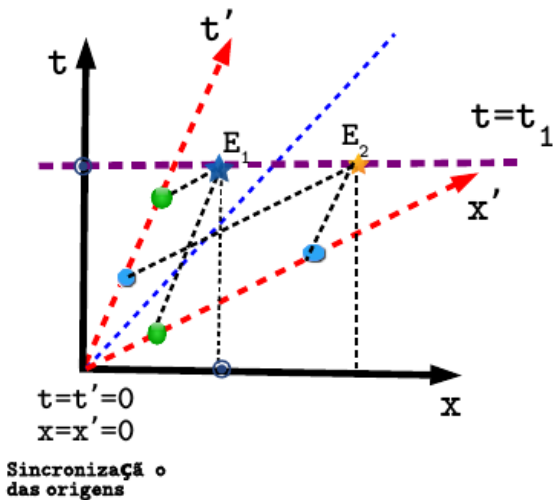


Simultaneidade-I

- ▶ O conceito de **simultaneidade** é relativo. Porquê?
- ▶ Eventos que são simultâneos para um observador deixam de ser simultâneos para outro observador. Não existe em RR o conceito de **tempo absoluto** como na mecânica do Newton.
- ▶ Sejam dois eventos no sistema S simultâneos: **E1**: $(3, 1)$ e **E2**: $(3, 2)$. Suponha $\beta = 1/2$ então $\gamma = 2/\sqrt{3} > 1$.
- ▶ Usando as T.Ls. podemos mostrar que ditos eventos no sistema S' : **E1'**: $(5/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$ e **E2'**: $(4/\sqrt{3}, +1/\sqrt{3})$.
- ▶ Devido a que temos $t'_2 = 4/\sqrt{3} < t'_1 = 5/\sqrt{3}$ logo os eventos deixaram de ser simultâneos no sistema S' .

Simultaneidade-II

Simultaneidade



Uma introdução à
Relatividade Geral

Martín G. W.
Richarte.
Universidade
Federal do Espírito
Santo-2021
16-21Agosto, DM.

Livros

Surgimento da
Relatividade
Restrita

Relatividade
Restrita

Por que precisamos
da Relatividade
Geral?

Formalismo

Testes
experimentais da
RG

Problemas/experime

► Forma analítica: Via transformação de Lorentz

1. Sejam dois sistemas inerciais S e S' , sendo que o S' move-se com velocidade $\beta = v/c\hat{x}$ com respecto ao S .
2. O comprimento da barra no sistema S é dado pelas coordenadas $L_0 = x_2 - x_1$. Ou seja, os eventos que indicam os extremos da barra no sistema S são: **E1**: $(0, x_1)$ e **E2**: $(0, x_2)$.
3. Perceba-se que a medição do comprimento acontece a tempo dado. Então, suponha que a medição do comprimento da barra acontece no sistema S' em forma simultânea no instante t' . Isto significa que as coordenadas dos eventos são: **E1'**: (ct', x'_1) e **E2'**: (ct', x'_2) .

Livros

Surgimento da
Relatividade
Restrita

Relatividade
Restrita

Por que precisamos
da Relatividade
Geral?

Formalismo

Testes
experimentais da
RG

Problemas/experime

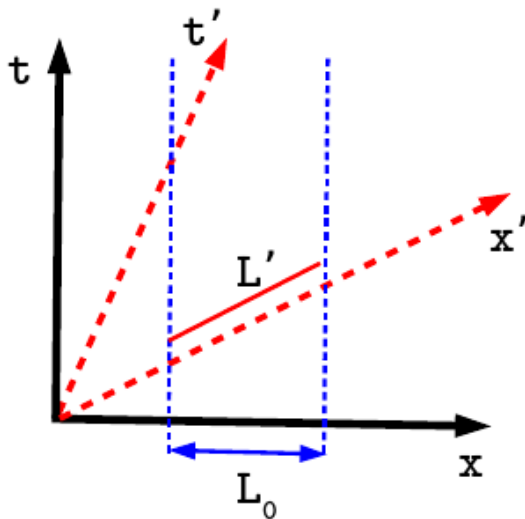
Contração de Lorentz-II

- ▶ Qual será o comprimento duma barra para um observador fixo ao sistema S' ? Fazemos uma medição simultânea ao tempo t' e dá como resultado $L' = x'_2 - x'_1$.
- ▶ E como se vinculam L e L' ? Usamos a T.L e podemos escrever os eventos **E1**: $x_1 = \gamma[x'_1 + \beta t']$ e **E2**: $x_2 = \gamma[x'_2 + \beta t']$.

$$L = x_2 - x_1 = \gamma(x'_2 - x'_1) = \gamma L' \Rightarrow L' = \sqrt{1 - \beta^2} L < L$$

- ▶ A medição do comprimento da barra no sistema S' sempre é menor que L pois $\beta < 1$.

Contração de Lorentz-III



Uma introdução à
Relatividade Geral

Martín G. W.
Richarte.
Universidade
Federal do Espírito
Santo-2021
16-21 Agosto, DM.

Livros

Surgimento da
Relatividade
Restrita

Relatividade
Restrita

Por que precisamos
da Relatividade
Geral?

Formalismo

Testes
experimentais da
RG

Problemas/experime

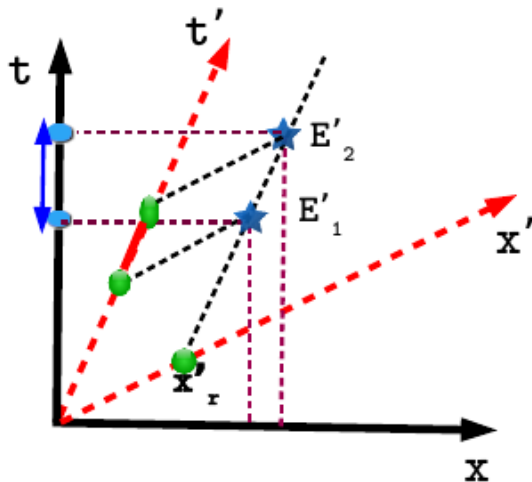
Dilatação temporal-I

- ▶ Que acontece com intervalo de tempo que mede um relógio em um sistema S com respecto a outro sistema S' ?
- ▶ Seja um relógio fixo em S' , ele mede dois eventos diferentes aos tempos t'_1 e t'_2 . Os eventos podem se escrever como **E1'**: (x'_r, t'_1) e **E2'**: (x'_r, t'_2) . Então o intervalo de tempo próprio será $\Delta t' = t'_2 - t'_1$.
- ▶ Usando a lei de T.L. inversa, podemos escrever $t = \gamma(t' + \beta x')$. Então o intervalo de tempo medido no sistema S é:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{(t'_2 - t'_1)}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \beta^2}} > \Delta t'$$

- ▶ A medição do intervalo de tempo pelo relógio em S sempre é maior do que o intervalo em S' pois $\gamma > 1$.

Dilatação temporal-II



Uma introdução à
Relatividade Geral

Martín G. W.
Richarte.
Universidade
Federal do Espírito
Santo-2021
16-21 Agosto, DM.

Livros

Surgimento da
Relatividade
Restrita

Relatividade
Restrita

Por que precisamos
da Relatividade
Geral?

Formalismo

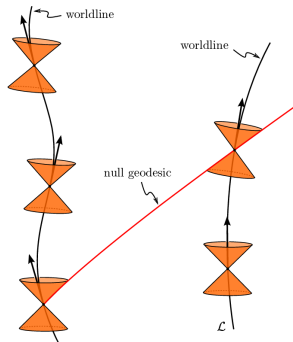
Testes
experimentais da
RG

Problemas/experime

Tempo próprio

- O tempo próprio de um observador físico pode-se definir usando o elemento de linha. Defina-se $d\tau^2 = -ds^2$:

$$\Delta\tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - v^2} dt$$



Como incluir a gravitação dentro do paradigma do Einstein?

- ▶ Até agora só falamos da versão mecânica da Física newtoniana:

$$\mathbf{a} = -\nabla\Phi, \quad \nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$$

- ▶ Como podemos estender a teoria para incluir a gravitação de Newton?
- ▶ Por que a teoria de Newton da gravitação é um problema no contexto da RR?
- ▶ A formulação da teoria newtoniana está baseada no conceito de **força** e de **ação instantânea**.
- ▶ O conceito de **ação instantânea** vai contra os postulados da RR.
- ▶ Einstein demorou 10 anos para compatibilizar a relatividade restrita com a gravitação.

Princípio de Equivalência-I

- ▶ A Física newtoniana nos diz que uma partícula submetida a uma força experimenta uma aceleração: $\mathbf{F} = m_i \mathbf{a}$.
- ▶ A massa inercial m_i nos diz o quanto um corpo resiste à aceleração.
- ▶ Seja uma partícula pontual na presença de um campo gravitacional (gerado por um corpo de massa M) então a partícula está submetida a uma força:

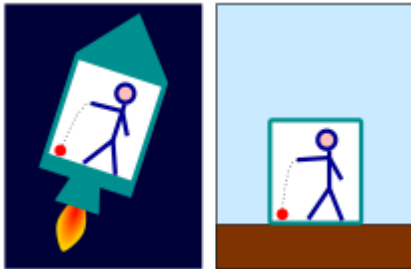
$$\mathbf{F}_g = -\frac{GMm_g}{r^2} \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{g}(r)m_g$$

- ▶ A massa gravitacional m_g nos diz o quão forte um corpo se acopla a um campo gravitacional.
- ▶ Pela 2a. lei de Newton temos:

$$\mathbf{a} = \mathbf{g}(r) \frac{m_g}{m_i}$$

Princípio de Equivalência-II

- ▶ Se $m_i = m_g$ então a aceleração gravitacional é localmente a mesma para todos os corpos. Isto é conhecido como o P.E. de Galileu.
- ▶ Mas este fato tem consequências ainda maiores. Porquê?
- ▶ Vamos a pensar no **experimento do elevador de Einstein**.



Princípio de Equivalência-IV

- ▶ Se $m_i = m_g$ a força gravitacional desapareça da equação.
- ▶ No caso dum campo grav. homogêneo é possível **anular os efeitos gravitacionais** ao se passar para um sistema de coordenada através de uma **transformação não-linear**.
- ▶ Se por um lado os efeitos gravitacionais podem ser anulados através de uma transformação não-linear, podemos acelerar um observador de forma a criarmos efeitos idênticos a de um campo gravitacional homogêneo (elevador acelerado).

Uma introdução à
Relatividade Geral

Martín G. W.
Richarte.
Universidade
Federal do Espírito
Santo-2021
16-21 Agosto, DM.

Livros

Surgimento da
Relatividade
Restrita

Relatividade
Restrita

Por que precisamos
da Relatividade
Geral?

Formalismo

Testes
experimentais da
RG

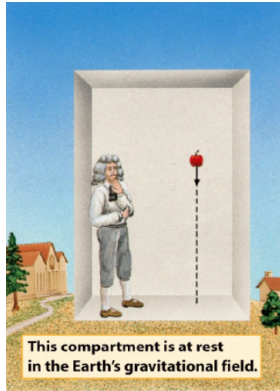
Problemas/experime

Evidência experimental $\gamma = (m_i - m_g)/m_g$

- Galileo (1610) $\gamma < 10^{-3}$
- Newton (1680) $\gamma < 10^{-3}$
- Bessel (19th century) $\gamma < 2 \times 10^{-5}$
- Eötvös (1890) & (1908) $\gamma < 3 \times 10^{-9}$
- Dicke et al. (1964) $\gamma < 3 \times 10^{-11}$
- Braginsky et al. (1971) $\gamma < 9 \times 10^{-13}$,
- Kuroda and Mio (1989) $\gamma < 8 \times 10^{-10}$,
- Adelberger et al. (1990) $\gamma < 1 \times 10^{-11}$
- Su et al. (1994) $\gamma < 1 \times 10^{-12}$ (torsional)
- Williams et al. ('96), Anderson & Williams ('01) $\gamma < 1 \times 10^{-13}$
- Schlamminger et al. (2008) $\gamma < 2 \times 10^{-13}$

Princípio de Equivalência de Einstein

- ▶ Einstein postulou que: Referenciais em queda livre, sem rotação, são fisicamente equivalentes no que diz respeito às leis da física.
- ▶ Isto permitiu conciliar a relatividade restrita com a gravitação e deu origem à Relatividade Geral.



a) The apple hits the floor of the compartment because the Earth's



(b) The apple hits the floor of the compartment because the

Campo
Gravitacional



Aceleração do
sistema de
referência

Princípio da
Relatividade



Estendido para
observadores
acelerados

Relatividade Geral= Teoria da gravitação relativística

- ▶ Quais são as ideias conceituais mais importantes na teoria da RG que vamos a estudar aqui?
 - ▶ Não há força gravitacional. Falamos de campo gravitacional!!!
 - ▶ A gravitação devido à curvatura do espaçotempo.
 - ▶ Matéria causa a curvatura do espaçotempo.
 - ▶ A curvatura do espaçotempo determina o movimento da matéria.
 - ▶ Objeto fundamental: métrica $g_{\mu\nu}(x^\sigma)$.
 - ▶ Determina todas as propriedades locais do espaçotempo curvo.

Uma introdução à
Relatividade Geral

Martín G. W.
Richarte.
Universidade
Federal do Espírito
Santo-2021
16-21 Agosto, DM.

Livros

Surgimento da
Relatividade
Restrita

Relatividade
Restrita

Por que precisamos
da Relatividade
Geral?

Formalismo

Testes
experimentais da
RG

Problemas/experime

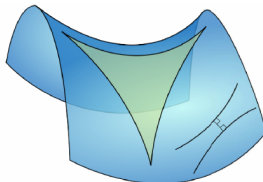
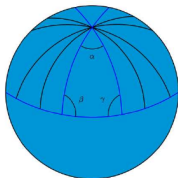
Elementos básicos da RG-I

- ▶ Nosso ponto de partida é considerar o espaçotempo (**E.T.**) como uma variedade suave pseudoriemanniana. Podemos pensar em uma superfície como exemplo.
- ▶ Sobre este **E.T.** incluímos uma forma de medir distância, ou seja, introduzimos uma métrica não euclídea $g_{\mu\nu}(x^\sigma)$.
- ▶ Consideramos as transformações de coordenadas gerais do tipo: $x'^\mu = x^\mu(x^\nu)$. Logo as transformações deixam de ter uma matriz jacobiana constante:

$$L_{\nu}^{\mu'}(x^\sigma) = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}$$

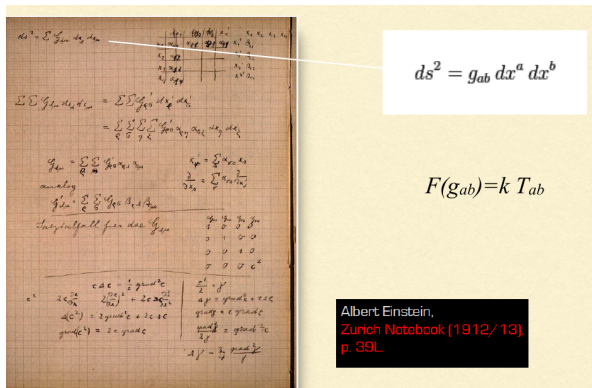
Elementos básicos da RG-II

- Sobre a superfície de uma esfera, a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico, $\alpha + \beta + \gamma$, é maior do que 180° . Sobre uma superfície com forma de sela, a soma dos ângulos internos é menor do que 180° .



Elementos básicos da RG-III

- ▶ Einstein estava na busca duma teoria relativística da gravitação. Porém esse trajeto não foi percorrido sozinho, teve MUITA ajuda dos matemáticos da época (sobretudo do Prof. Marcel Grossman).



$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ não é um tensor é uma conexão

- **Importante:** O símbolo de Christoffel **não** transforma como um tensor de três índices!!!

$$\Gamma^{\lambda}_{\rho\nu} = \frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial x'^{\nu} \partial x'^{\rho}} \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\mu}} \Gamma^{\mu}_{\kappa\sigma} .$$

Propiedades das derivadas covariante

- ▶ No caso de um tensor de ordem zero temos: $\nabla_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi$.
- ▶ Deixa constante a delta de Kronecker: $\nabla_\mu \delta^\kappa_\sigma = 0$.
- ▶ O operador derivada covariante ∇_μ transforma como um tensor:

$$\nabla'_\mu V^{\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \nabla_\mu V^\nu$$

- ▶ Dito operador satisfaz a duas propriedades fundamentais de derivação:
 1. Linearidade: $\nabla(T + S) = \nabla T + \nabla S$
 2. Regra de Leibniz: $\nabla(T \otimes S) = (\nabla T) \otimes S + T \otimes \nabla S$

Exemplos

$$\phi_{;\lambda} = \phi_{,\lambda}$$

$$A_{\lambda;\mu} = A_{\lambda,\mu} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho} A_{\rho}$$

$$T^{\lambda\mu}_{;\nu} = T^{\lambda\mu}_{,\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^{\lambda} T^{\alpha\mu} + \Gamma_{\alpha\nu}^{\mu} T^{\lambda\alpha}$$

$$T^{\lambda}_{\mu;\nu} = T^{\lambda}_{\mu,\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^{\lambda} T^{\alpha}_{\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} T^{\lambda}_{\alpha}$$

$$T_{\lambda\mu;\nu} = T_{\lambda\mu,\nu} - \Gamma_{\lambda\nu}^{\alpha} T_{\mu\alpha} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} T_{\lambda\alpha}$$

$$\begin{aligned} T^{\lambda\mu\cdots}_{\nu\rho\cdots;\sigma} &= T^{\lambda\mu\cdots}_{\nu\rho\cdots,\sigma} \\ &+ \Gamma_{\alpha\sigma}^{\lambda} T^{\alpha\mu\cdots}_{\nu\rho\cdots} + \Gamma_{\alpha\sigma}^{\mu} T^{\lambda\alpha\cdots}_{\nu\rho\cdots} + \cdots \\ &- \Gamma_{\nu\sigma}^{\alpha} T^{\lambda\mu\cdots}_{\alpha\rho\cdots} - \Gamma_{\rho\sigma}^{\alpha} T^{\lambda\mu\cdots}_{\nu\alpha\cdots} - \cdots \end{aligned}$$

Transporte paralelo-I

- ▶ A conexão e a derivada covariante nos permite introduzir o conceito de transporte paralelo ao longo de uma curva $\mathcal{C} : x^\mu(\lambda)$, com λ o parâmetro afim. Seja dita curva com vetor tangente $\mathbf{U}$, podemos dizer que o campo vetorial $\mathbf{V}$ se transporta paralelo ao vetor $\mathbf{U}$ se:

$$\nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{V} = 0$$

$$\frac{DV^\mu}{D\lambda} = \frac{dV^\mu}{d\lambda} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu V^\alpha \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0$$

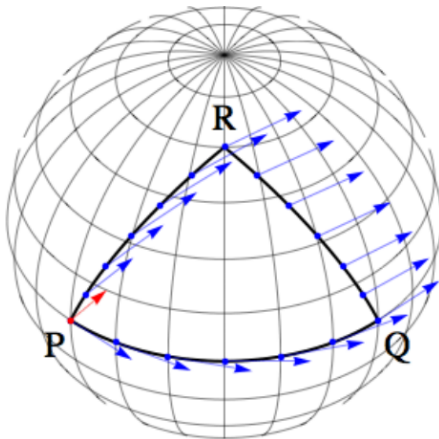
- ▶ Defina-se uma curva como autoparalela como $\nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{U} = 0$. Em componentes seria:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0,$$

- ▶ O conceito de transporte paralelo não precisa duma métrica para ser definido (paralelismo).

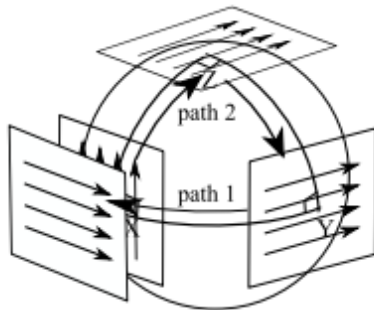
Transporte paralelo-II

- Em um espaçotempo curvo a diferença entre dois vetores arbitrários tem que levar em conta a mudança do vetor de base. E eles devem ser comparados no mesmo ponto.



Transporte paralelo-III

- ▶ Então, depois de ser transportado paralelamente ao longo de uma curva fechada, um vetor coincide consigo mesmo em um espaço plano enquanto muda de orientação em relação a si mesmo em um espaço curvo.



A linguagem matemática-I

- ▶ Como descrever o movimento em queda livre numa certa geometria?
- ▶ **Hipótese geodésica**: um referencial em queda livre segue um **caminho geodésico** num espaçotempo curvo!
- ▶ Qual é o significado disto? Caminho mais “retilíneo possível numa geometria curva”. Ou, é uma curva que extrema a distância entre dois pontos (precisa duma métrica).
- ▶ Seja um observador (físico) em queda livre então a linha de mundo $x^\mu(\tau)$ satisfaz a seguinte equação geodésica:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0,$$

- ▶ Onde $U^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}$ é a quavelocidade de dito observador e $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \Gamma_{\beta\alpha}^\mu$ (sem torção). O efeito de trabalhar com um sistema de referência não-inercial está codificado no termo $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$.

A linguagem matemática-II

Uma introdução à
Relatividade Geral

Martín G. W.
Richarte.
Universidade
Federal do Espírito
Santo-2021
16-21 Agosto, DM.

- **Teorema-LIF:** Sempre é possível fazer uma transformação de coordenadas tal que na vizinhança de um ponto P a métrica toma a forma do tensor de Minskowski.

$$g_{ab}(P) = \eta_{ab}, \quad g_{ab,c}(P) = 0.$$

- Dito observador chama-se de localmente inercial ou sistema de referência de lorentz, pois localmente, podemos dizer que $\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0$.
- Não é possível construir um sistema de referência tipo LIF globalmente para um espaço-tempo curvo!!!

Livros

Surgimento da
Relatividade
Restrita

Relatividade
Restrita

Por que precisamos
da Relatividade
Geral?

Formalismo

Testes
experimentais da
RG

Problemas/experime

Curvatura do espaçotempo-I

- ▶ Perceba-se que a eq. da geodésica não diz se temos gravidade ou se o espaçotempo é curvo ou não.
- ▶ A informação sobre a curvatura do espaçotempo está contida nas 2as derivadas da métrica.
- ▶ Para visualizar isto podemos calcular o commutador das derivadas covariantes:

$$(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) X^\alpha \equiv R^\alpha_{\beta\mu\nu} X^\beta$$

- ▶ O tensor de Riemann está definido como:

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\beta\nu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\beta\mu} + \Gamma^\alpha_{\mu\kappa} \Gamma^\kappa_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\kappa} \Gamma^\kappa_{\beta\mu}$$

Curvatura do espaçotempo-II

- ▶ Este tensor de 4 índices tem uma interpretação física bem clara. Nos indica se o ET é plano ou não.
- ▶ Algumas das propriedades do tensor de Riemann são as seguintes:
 1. Satisfaz a identidade de Bianchi: $\nabla_\sigma R_{\alpha\beta\mu\nu} + \nabla_\nu R_{\alpha\beta\sigma\mu} + \nabla_\mu R_{\alpha\beta\nu\sigma} = 0$.
 2. Antisimetrias nos índices: $R_{[\kappa\sigma]\mu\nu}, R_{\kappa\sigma[\mu\nu]}$.
 3. Invariante ante o intercambio de pares: $R_{\kappa\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\kappa\sigma}$.
 4. Permutação cíclica: $R_{\kappa[\sigma\mu\nu]} = 0$
 5. A parte totalmente antisimétrica é nula: $R_{[\kappa\sigma\mu\nu]} = 0$
 6. Em n-dimensões, o número de componentes indepentes é:

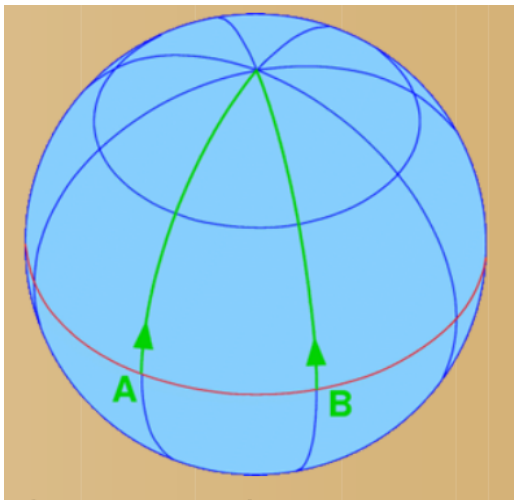
$$[R_{\kappa\sigma\mu\nu}] = \frac{n^2}{12}(n^2 - 1)$$

Curvatura do espaçotempo-III

- ▶ Para $n = 4$ o tensor de Riemann tem 20 componentes linearmente independentes.
- ▶ Por meio de sucesivas contrações do tensor de Riemann podemos definir outros tensores.
- ▶ Tensor de Ricci: $R_{\mu\nu} = g^{\kappa\sigma} R_{\kappa\sigma\mu\nu}$.
- ▶ Escalar de Ricci: $R = g^{\kappa\sigma} g^{\mu\nu} R_{\kappa\sigma\mu\nu}$.
- ▶ Se o tensor $g_{\mu\nu}$ tem componentes constantes então $R_{\kappa\sigma\mu\nu}$ zera.
- ▶ Se $R_{\kappa\sigma\mu\nu}$ zera então existe um sistema onde $g_{\mu\nu}$ tem componentes constantes (E.T. plano)

Curvatura do espaçotempo-III

- ▶ Curvas geodésicas que inicialmente eram paralelas podem se intersectar no E.T. curvo (deixa de valer o 5º postulado de Euclídes.)



Desvio geodésico-I

- ▶ O tensor de Riemann aparece quando analisamos o desvio entre duas curvas geodésicas.

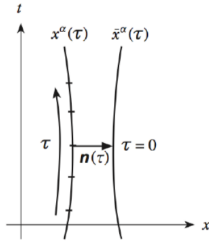
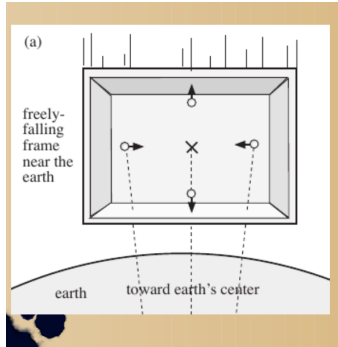


Figure 18.3. The worldlines of two objects following neighboring geodesics. The vector $\mathbf{n}$ connects the two objects at all times. The geodesics are parallel at $\tau = 0$.

Desvio geodésico-II

- ▶ O desvio geodésico sinaliza que a aceleração relativa entre partículas próximas é proporcional ao tensor de Riemann.

$$\left(\frac{d^2 \mathbf{n}}{d\tau^2}\right)^2 = -R_{\mu\nu\sigma}^{\alpha} U^{\sigma} U^{\mu} n^{\nu}$$

- ▶ A aceleração relativa entre curvas geodésicas é interpretado como uma manifestação das forças gravitacionais de maré.
- ▶ No limite newtoniano pode-se mostrar que $F^i \propto d^2 n^i / dt^2 = \eta^{ij} \partial_{ij} \Phi n^k \propto \partial_{ij} \Phi$. De fato, os efeitos de maré sobre a Terra devido a lua e ao Sol satisfaz a relação: $F_{lua}/F_{sol} \simeq 2.2$.



Figure 13.23 The tidal force is the difference between the gravitational force at the center and that elsewhere. In this figure, the tidal forces are shown at the ocean surface. These forces would diminish in size as you approach Earth's center.

Resumo

Uma introdução à Relatividade Geral

Martín G. W.
Richarte.
Universidade
Federal do Espírito
Santo-2021
16-21 Agosto, DM.

Livros

Surgimento da Relatividade Restrita

Relatividade Restrita

Por que precisamos da Relatividade Geral?

Formalismo

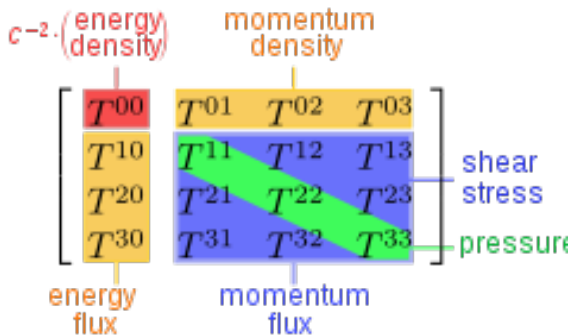
Testes experimentais da RG

Problemas/experimentos

Conceitos Básicos		
—	Newton	Geometria
Potencial	Φ	$g_{\mu\nu}$
Força	$\partial\Phi$	$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$
Maré	$\partial^2\Phi$	$R \propto \partial\Gamma$

Tensor energia-momento-I

- O tensor e-m, $T^{\mu\nu}$, indica o tipo de conteúdo material de caráter não gravitacional. Ou seja, ele contém a densidade de energia da matéria, a pressão, fluxo de energia, fluxo momento linear, etc.



Tensor energia-momento-II

Uma introdução à
Relatividade Geral

Martín G. W.
Richarte.
Universidade
Federal do Espírito
Santo-2021
16-21 Agosto, DM.

- ▶ Se o conteúdo material pode ser descrito por um fluido perfeito (cisalhamento nulo) então o tensor é:

$$T_{\nu}^{\mu} = (\rho + p)U^{\mu}U_{\nu} + pg_{\nu}^{\mu} = \text{diag}[-\rho, p, p, p]$$

- ▶ A condição física de conservação (local) do TEM implica que

$$\nabla_{\nu} T^{\mu\nu} = 0$$

Livros

Surgimento da
Relatividade
Restrita

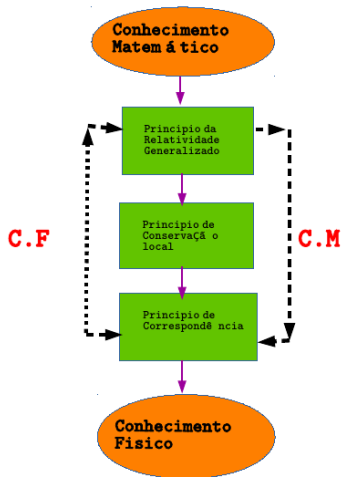
Relatividade
Restrita

Por que precisamos
da Relatividade
Geral?

Formalismo

Testes
experimentais da
RG

Problemas/experime



RG-II-(princípio de acoplamento mínimo)

- ▶ Quais são as condições físicas que deve satisfazer uma teoria da gravitação relativística?
- ▶ No limite newtoniano tem que cair na teoria da gravitação de Newton:
 $\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$.
- ▶ No limite de E.T plano tem que cair na teoria da R.R: $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$ e $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0 \rightarrow \partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$.
- ▶ As equações de campo devem ter uma caráter tensorial e ser válidas em todo o E.T. curvo.
- ▶ Guiados pelo princípio de correspondência, as eqns. de campo têm que vincular a geometria do E.T. curvo com o conteúdo material.
- ▶ **A primeira proposta do Einstein foi $R_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$.** Porém, não era consistente pois $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ implica $\nabla_\mu R^{\mu\nu} = 0$, que não é válido em geral. Além disso, pela identidade de Bianchi teríamos $\nabla^\mu R_{\mu\nu} = (1/2)\nabla_\nu R = (1/2)\nabla_\nu T = 0$. Isto equivale a dizer que $T = cte$, o que é só válido no vácuo!!!

- Martín G. W.
Richarte.
Universidade
Federal do Espírito
Santo-2021
16-21 Agosto, DM.

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$$

Surgimento da Relatividade Restrita

Relatividade Restrita

Por que precisamos da Relatividade Geral?

Formalismo

Testes experimentais da RG

Problemas/experimentos

844 Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse vom 25. November 1914

Die Feldgleichungen der Gravitation.

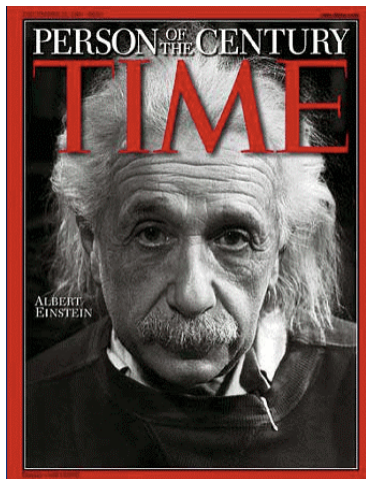
Von A. EGGERS.

In zwei vor kurzem erschienenen Mitteilungen¹ habe ich gezeigt, wie man zu Feldgleichungen der Gravitation gelangen kann, die dem Produkt allgemeiner Relativität entsprechen, d. h. die in ihrer allgemeinen Fassung beliebigen Substitutionen der Raumzeitvariablen gegenüber kovariant sind.

Der Entwicklungsgang war dabei folgender. Zunächst fand ich Gleichungen, welche die Nervosität *Theorie* mit der Nervosität *Experiment* und beliebigen Substitutionen von der Determinante Δ gegenseitig korrespondieren. Hierauf fand ich, daß diese Gleichungen allgemein kovariante ausfallen, falls der *Skalar* des Energiesystems der *Materie* verschwindet. Das Koordinatensystem war dann nach der einfachen Regel zu spezialisieren, daß $\epsilon = 1$ zu setzen war, wodurch die Gleichungen der *Theorie* eine gewisse Vereinfachung erfuhren. Dabei mußte aber, wie erwähnt, die Hypothese eingeführt werden, daß der *Skalar* des Energiesystems der *Materie* verschwindet.

Vorlesungs- und ich muß, daß man ohne Hypothese über den Energiezustand der Materie auskommen kann, wenn man die Energieform der Materie in etwas anderer Weise in die Feldgleichungen einsetzt, als das in meinen beiden früheren Mitteilungen geschehen ist. Die Feldgleichungen für das Vakuum, auf welche ich die Erklärung der Perihelienbewegung des Merkur gegründet habe, bleiben von dieser Modifikation unberührt, ich gebe hier nochmals die ganze Darstellung, damit der Leser nicht geirrt ist, die früheren Mitteilungen ungenutzt herauszuheulen.

Aus der bekannten RIEMANNSCHEN Kovariante vierten Ranges leitet man folgende Kovariante zweiten Ranges ab:



Uma introdução à Relatividade Geral

Martín G. W.
Richarte.
Universidade
Federal do Espírito
Santo-2021
16-21 Agosto, DM.

Livros

Surgimento da Relatividade Restrita

Relatividade Restrita

Por que precisamos da Relatividade Geral?

Formalismo

Testes experimentais da RG

Problemas/experimentos

Limite Newtoniano-I

- Supondo que as velocidades são pequenas ($v^i \ll c$) e trabalhando baixo as hipóteses de campos estáticos ($\partial_t g_{\mu\nu} = 0$) e fracos ($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, $\|h_{\mu\nu}\| \ll 1$) temos os seguintes resultados:

1. O único símbolo de Christoffel é $\Gamma_{00}^\mu = -\frac{1}{2}\partial^\mu h_{00}$

2. A eqn. da geodésica vira:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\partial^\mu h_{00} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2$$

3. Para $\mu = 0$ temos $dt/d\tau = cte$

- Para $\mu = i$ a eqn. da geodésica vira:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = \frac{1}{2}\partial_i h_{00}$$

- Comparando com a eqn. de Newton $\mathbf{a} = -\nabla\Phi$ chega-se a $h_{00} = -2\Phi$, ou seja:

$$g_{00} = -(1 + 2\Phi)$$

Limite Newtoniano-II

- ▶ Por outro lado, usando este resultado podemos inseri-lo na componente 00 da eqn. de Einstein

$$R_{00} = \kappa \left(T_{00} - \frac{1}{2} g_{00} T \right)$$

- ▶ Usando que $R_{00} = -\frac{1}{2} \nabla^2 h_{00}$ junto com $T_{00} = \rho$ e $T = -\rho$ obtemos:

$$\nabla^2 h_{00} = -\kappa \rho$$

- ▶ Comparando com a eqn. de Poisson $\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$ é possível obter a constante $\kappa = 8\pi G$.

Métrica de Schwarzschild-I

Uma introdução à
Relatividade Geral

Martín G. W.
Richarte.
Universidade
Federal do Espírito
Santo-2021
16-21 Agosto, DM.

Livros

Surgimento da
Relatividade
Restrita

Relatividade
Restrita

Por que precisamos
da Relatividade
Geral?

Formalismo

Testes
experimentais da
RG

Problemas/experime

- ▶ Nosso ponto de partida será considerar uma métrica com simetria esférica em $(3 + 1)$ dimensões:

$$ds^2 = -e^{\alpha(r,t)} dt^2 + e^{\beta(r,t)} dr^2 + r^2 e^{\gamma(r,t)} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

- ▶ Estamos considerando o exterior de um objeto compacto, logo no vácuo $R_{\mu\nu} = 0$.
- ▶ A componente R_{tr} é

$$R_{tr} = \frac{2}{r} \partial_t \beta(r, t) = 0 \implies \beta = \beta(r)$$

- ▶ É possível escolher um sistema de coordenadas $\bar{r} = \bar{r}(r)$ onde o fator $e^{\gamma(r,t)}$ some.

Métrica de Schwarzschild-II

- Combinando as componentes do tensor de Ricci chega-se a:

$$e^{2(\beta-\alpha)}R_{tt} + R_{rr} = \frac{2}{r}[\partial_r\beta + \partial_r\alpha] = 0 \implies \alpha = -\beta + k$$

- A constante k some al redefinir a coordenada temporal $t \mapsto te^{-k}$.
- Zerando a componente $R_{\theta\theta}$ obtemos uma eqn. diferencial:

$$R_{\theta\theta} = 0 \implies \partial_r(re^\alpha) = 1 \implies e^{2\alpha(r)} = 1 - \frac{R_s}{r}$$

- Onde R_s é uma constante de integração a determinar a posteriori.
- A métrica de Schwarzschild em coordendas esféricas é:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

Métrica de Schwarzschild-III

Uma introdução à
Relatividade Geral

Martín G. W.
Richarte.
Universidade
Federal do Espírito
Santo-2021
16-21 Agosto, DM.

Livros

Surgimento da
Relatividade
Restrita

Relatividade
Restrita

Por que precisamos
da Relatividade
Geral?

Formalismo

Testes
experimentais da
RG

Problemas/experime

- ▶ A métrica de Schwarzschild em coordenadas esféricas é:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

- ▶ A constante de integração pode ser obtida estudando o limite newtoniano. Lembrando que nesse limite $g_{00} = -(1 + 2\Phi) = -(1 - 2GM/r)$, logo o raio de Schwarzschild é

$$R_s = 2GM$$

- ▶ Quando $M \rightarrow 0$ recuperamos a métrica de Minkowski.
- ▶ Para $r \gg R_s$ o E.T. é **assintoticamente plano**.

Métrica de Schwarzschild-IV

- ▶ Schwarzschild escreveu uma carta ao Einstein enquanto estava na primeira guerra na frente contra Rússia-Dezembro de 1915. Era especialista em cálculos balísticos.
- ▶ "...como você vê, a guerra me tratou gentilmente o suficiente, apesar da artilharia pesada, para permitir-me ficar longe de tudo e aproveitar esta caminhada na terra de suas ideias..."
- ▶ "Li seu artigo com o maior interesse. Eu não esperava que alguém pudesse formular a solução exata do problema de uma forma tão simples. Gostei muito do seu tratamento matemático do assunto. Na próxima quinta-feira, apresentarei o trabalho à Academia com algumas palavras de explicação". A. Einstein.



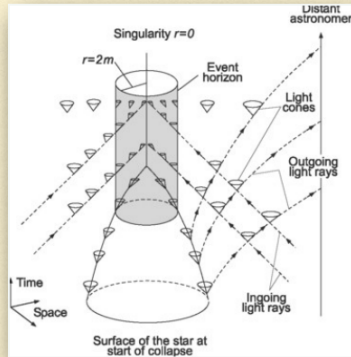
Teorema de Birkhoff-1923

- ▶ Começamos assumindo que $\alpha(r, t)$ e $\beta(r, t)$ mas terminamos com $\alpha(r) = -\beta(r)$.
- ▶ O campo fora de uma estrela esférica é estático, mesmo se a estrela realiza pulsação radial.
- ▶ **O teorema de Birkhoff afirma que qualquer solução esfericamente simétrica das equações do campo de vácuo deve ser estática e assintoticamente plana. Isso significa que a solução externa (ou seja, o espaço-tempo fora de um corpo esférico, não giratório e gravitante) deve ser dada pela métrica de Schwarzschild.**

Singularidades da metrica

- ▶ A métrica de Schwarzschild é singular para $r = 0$ e $r = R_s$.
- ▶ Tem-se uma singularidade física em $r = 0$ pois os invariantes divergem nessa superf. $R^{\mu\nu\kappa\sigma} R_{\mu\nu\kappa\sigma} = \frac{48G^2 M^2}{r^6}$. A singularidade física é escondida detrás da superfície $r = R_s$.
- ▶ Qual é a interpretação da superfície $r = R_s$? Se chama **horizonte de eventos** e os inv. não divergem nesse ponto. Mas define o tamanho típico de quando se forma um B.N. por colapso de uma estrela. Nada pode escapar do B.N., nem mesmo a luz.
- ▶ Uma estrela com a massa de Sol tem um raio $R_\odot = 10^6 R_s$ muito maior que $R_s = 2GM_\odot$. De fato, $\frac{R_s}{R_\odot} \simeq 10^{-6}$.
- ▶ Para uma estrela de Nêutrons com $M_\star = 1.4M_\odot$ e $R_\star = 15km$ temos que $\frac{R_s}{R_\star} \simeq 0.5$.

Buraco Negro



M87

Uma introdução à
Relatividade Geral

Martín G. W.
Richarte.
Universidade
Federal do Espírito
Santo-2021
16-21 Agosto, DM.

Livros

Surgimento da
Relatividade
Restrita

Relatividade
Restrita

Por que precisamos
da Relatividade
Geral?

Formalismo

Testes
experimentais da
RG

Problemas/experimentos

Geodésicas na métrica de Schwarzschild-I

- ▶ Vamos a estudar o comportamento de partículas massivas e não-massivas nas vizinhanças de um objeto compacto.
- ▶ Para simplificar nossa análise vamos a usar a métrica de Schwarzschild.
- ▶ A eqn. da geodésica pode ser escrita numa forma na qual as simetrias da métrica conduzem a quantidades conservadas:

$$\frac{d}{d\tau} \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) - \frac{\partial_\mu g_{\alpha\beta}}{2} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0.$$

1. Como $\partial_t g_{\mu\nu} = 0 \rightarrow e = -g_{tt} \frac{dt}{d\tau} = \text{cte}$ –energia por unidade de massa da partícula–
2. Como $\partial_\phi g_{\mu\nu} = 0 \rightarrow \ell = g_{\phi\phi} \frac{d\phi}{d\tau} = \text{cte}$ –momento angular por unidade de massa da partícula–

Geodésicas na métrica de Schwarzschild-II

- ▶ Outra constante de movimento ao longo das geodésicas é $\epsilon = g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu$. Para uma geodésica de tipo nula $\epsilon = 0$ e para uma tipo tempo $\epsilon = -1$ (observador físico).
- ▶ Levando em conta as quantidades conservadas é possível escrever a eqn. para um problema efetivo 1d:

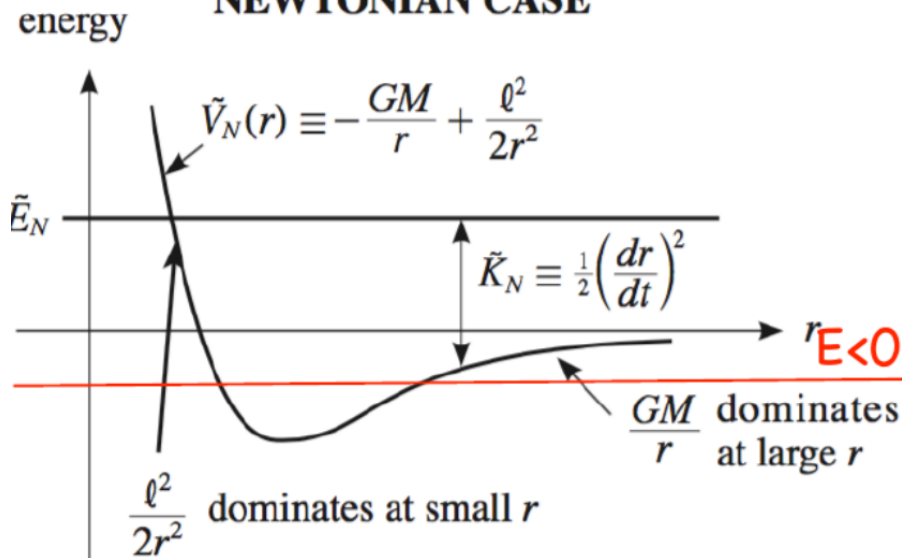
$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + \left(-\frac{GM}{r} + \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{GM\ell^2}{r^3} \right) = \tilde{E} = \frac{1}{2}(e^2 - 1)$$

- ▶ Perceba-se que tem-se uma correção relativística no potencial efetivo $\propto r^{-3}$. No caso newtoniano teríamos:

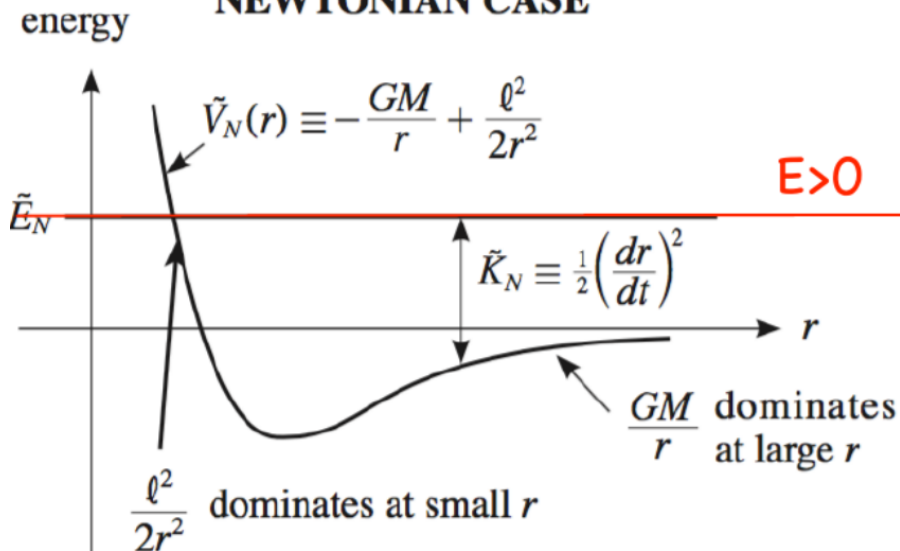
$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \left(-\frac{GM}{r} + \frac{\ell^2}{2r^2} \right) = \tilde{E}_N$$

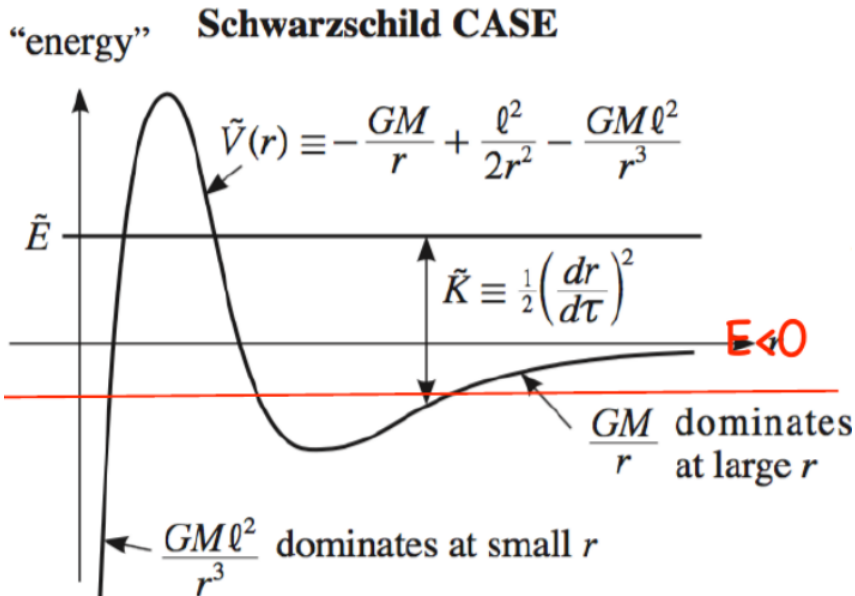
- ▶ Vamos a comparar a existência de órbitas ligadas e não ligadas em ambos casos.

NEWTONIAN CASE

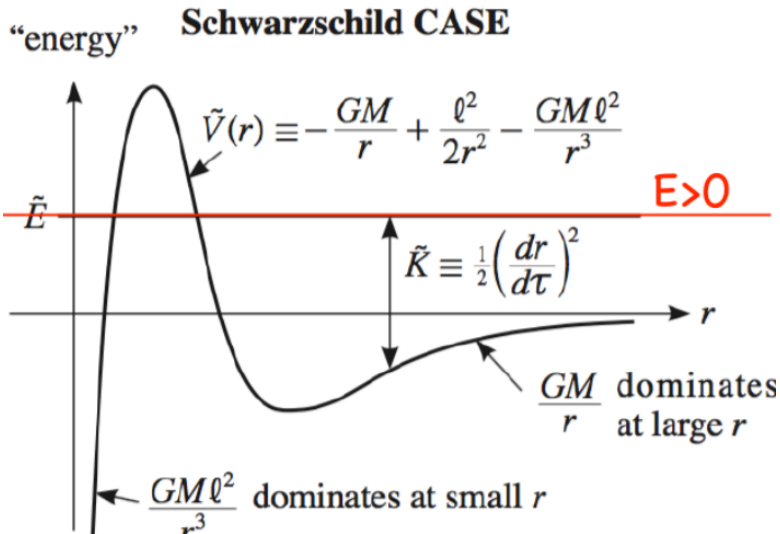


NEWTONIAN CASE



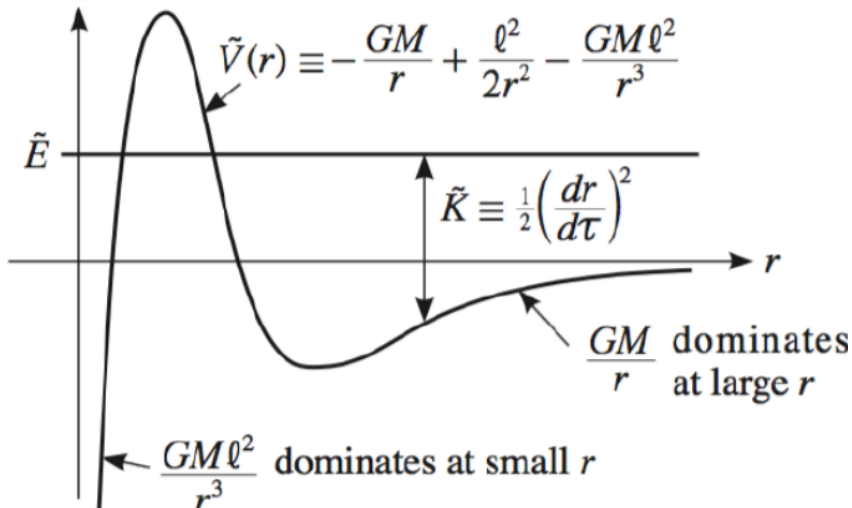


CR:Órbitas não ligadas



“energy” Schwarzschild CASE

$E > 0$



Geodésicas na métrica de Schwarzschild-III

Uma introdução à
Relatividade Geral

Martín G. W.
Richarte.
Universidade
Federal do Espírito
Santo-2021
16-21 Agosto, DM.

- ▶ Órbitas estáveis e instáveis são importantes em “discos de acreção” em torno de objetos compactos (estrela de nêutrons ou buracos negros).
- ▶ Para $r < 6GM$ não há qualquer órbita circular estável.
- ▶ $R_{ISCO} = 6GM$ é o raio da órbita circular estável mais interna.
- ▶ Objetos compactos com raio menor que R_{ISCO} podem acretar material do raio interno do disco ao redor deles.

Livros

Surgimento da
Relatividade
Restrita

Relatividade
Restrita

Por que precisamos
da Relatividade
Geral?

Formalismo

Testes
experimentais da
RG

Problemas/experime

Testes experimentais da RG

- ▶ A maioria dos testes experimentais de relatividade geral são baseados na geometria de Schwarzschild na região $r > R_s$.
- ▶ Alguns são baseados nas trajetórias de partículas massivas e outros nas trajetórias de fótons.
- ▶ A maioria dos testes "clássicos" estão no limite do campo fraco, mas observações mais recentes começaram a sondar o regime de campo forte mais discriminativo.
- ▶ Aqui nós focaremos em quatros casos:
 1. Precessão do periélio
 2. Deflexão da Luz
 3. o desvio gravitacional para o vermelho da luz
 4. Atraso do tempo de Shapiro

Martín G. W.
Richarte.
Universidade
Federal do Espírito
Santo-2021
16-21Agosto, DM.



Precessão do Periélio-III

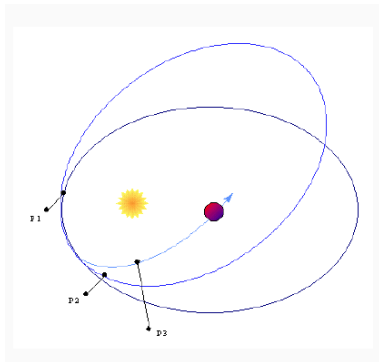
- ▶ Como $\eta = 3\left(\frac{GM}{bc}\right)^2 \ll 1$, nossa solução aproximada é:

$$u \simeq \frac{GM}{b^2} [1 + e \cos[\phi(1 - \eta)]]$$

- ▶ A órbita é periódica, mas com um período $P = 2\pi/(1 - \eta) > 2\pi$ e portanto a órbita não pode "fechar", e assim a elipse sofre precessão.
- ▶ Em uma revolução, a elipse irá girar em torno do foco por um certo valor $\Delta\phi = (2\pi/(1 - \eta) - 2\pi) \simeq 2\pi\eta$. Isto equivale a:

$$\Delta\phi = \frac{6\pi GM}{a(1 - e^2)c^2}$$

Precessão do Periélio-IV



- Usando que $GM_{\odot} = 1.48 \times 10^5 cm$, $a = 5.79 \times 10^{12} cm$, e $e = 0.2056$ chega-se a:

$$\Delta\phi_{\text{Mercúrio}} = 43.0''/\text{século}.$$

- Em pulsares binários separados por $10^6 km$, o avanço do periélio é extremamente importante e pode ser de até 2° por ano (cerca de 1000 rotações orbitais).

Deflexão da Luz-I

- ▶ A deflexão dos raios de luz devido à presença de um campo gravitacional é uma previsão de Einstein datada mesmo antes do GR.
- ▶ Esta previsão foi verificada em 1919 durante um eclipse solar total no Sobral-Brasil!!



Deflexão da Luz-II

- ▶ A curva geodésica para fótons na geometria de Schwarzschild no plano equatorial é:

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{3GM}{c^2} u^2,$$

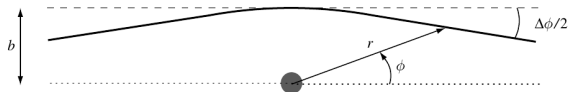
- ▶ Se $M = 0$ então a eqn. é uma reta em coordenadas polares $u_N = \sin \phi / b$ com $u = 1/r$.
- ▶ Resolvemos o problema em forma perturbativa, $u = u_N + \Delta u$:

$$\frac{d^2 \Delta u}{d\phi^2} + \Delta u = \frac{3GM}{c^2} u_N^2,$$

- ▶ A solução geral é dada por:

$$u = \frac{\sin \phi}{b} + \frac{3GM}{b^2 c^2} \left(1 + \frac{1}{3} \cos 2\phi\right).$$

Deflexão da Luz-III



- ▶ Para um observador no infinito deveria ter $u \rightarrow 0$ e usando que o ângulo é pequeno [$\sin \phi = \phi$, $\cos 2\phi = 1$], ou seja, a relação entre ϕ , M e b fica assim: $\phi = -\frac{2GM}{b^2 c^2}$
- ▶ O desvio total será $\Delta\phi = \frac{4M}{b^2 c^2}$
- ▶ Para um raio de luz traçando a superfície do Sol dá uma deflexão da 1,75".

Deflexão da Luz-IV-Sobral 1919

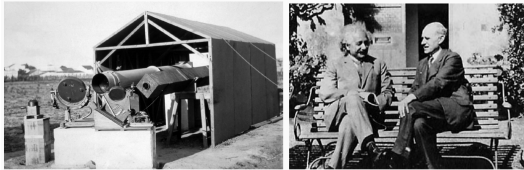


Figure 9: (Left): Instruments used to observe the 1919 total solar eclipse, Sobral, Brazil. Photograph: Science & Society Picture Library/SSPL via Getty Images. (Right): Einstein and Eddington, Photographed at the University of Cambridge Observatory, UK, in 1930.

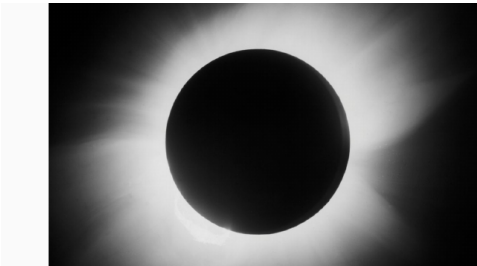


Figure 10: Total solar eclipse, 29 May 1919. Glass positive photograph of the corona, taken at Sobral in Brazil, with a telescope of 4in in aperture and 19ft focal length. Photograph: Science & Society Picture Library/SSPL via Getty Images.

Uma introdução à
Relatividade Geral

Martín G. W.
Richarte.
Universidade
Federal do Espírito
Santo-2021
16-21Agosto, DM.

Livros

Surgimento da
Relatividade
Restrita

Relatividade
Restrita

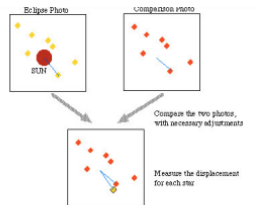
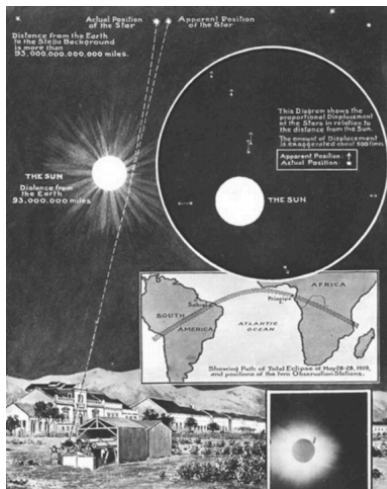
Por que precisamos
da Relatividade
Geral?

Formalismo

Testes
experimentais da
RG

Problemas/experime

Deflexão da Luz-IV-Ilha Príncipe



LIGHTS ALL ASKEW IN THE HEAVENS

Men of Science More or Less
Agog Over Results of Eclipse
Observations.

EINSTEIN THEORY TRIUMPHS

Stars Not Where They Seemed
or Were Calculated to be,
but Nobody Need Worry.

A BOOK FOR 12 WISE MEN

No More in All the World Could



Arthur Stanley
Eddington

Uma introdução à
Relatividade Geral

Martín G. W.
Richarte.
Universidade
Federal do Espírito
Santo-2021
16-21Agosto, DM.

Livros

Surgimento da
Relatividade
Restrita

Relatividade
Restrita

Por que precisamos
da Relatividade
Geral?

Formalismo

Testes
experimentais da
RG

Problemas/experime

Shadow of the Moon and general relativity: Einstein,
Dyson, Eddington and the 1919 light deflectionJosé P. S. Lemos^{*1}

¹Universidade de Lisboa, Instituto Superior Técnico - IST, Departamento de Física, Centro de de Astrofísica e Gravitação - CENTRA, Avenida Rovisco Pais 1, 1049-001, Lisboa, Portugal.

Received on September 23, 2019. Accepted on September 27, 2019.

The eclipse of the Sun of 1919 was fundamental in the development of physics and earns a high place in the history of science. Several players took part in this adventure. The most important are Einstein, Dyson, Eddington, the Sun, the Moon, Sobral, and Principe. Einstein's theory of gravitation, general relativity, had the prediction that the gravitational field of the Sun deflects an incoming light ray from a background star on its way to Earth. The calculation gave that the shift in the star's position was 1.75 arcseconds for light rays passing at the Sun's rim. So to test it definitely it was necessary to be in the right places on May 29, 1919, the day of the eclipse. That indeed happened, with a Royal Greenwich Observatory team composed of Crommelin and Davidson that went to Sobral, and that was led at a distance by the Astronomer Royal Frank Dyson, and with Eddington of Cambridge University that went to Principe with his assistant Cottingham. The adventure is fascinating, from the preparations, to the day of the eclipse, the data analysis, the results, and the history that has been made. It confirmed general relativity, and marked an epoch that helped in delineating science in the post eclipse era up to now and into the future. This year of 2019 we are celebrating this enormous breakthrough.

Keywords: Light deflection, General relativity, Eclipse 1919

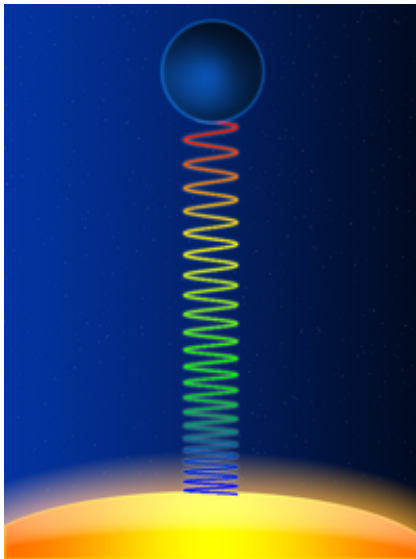
O desvio gravitacional para o vermelho da luz-I

- ▶ Seja uma fonte M que irradia luz. Seja O_1 um observador está perto da fonte M e seu relógio mede $d\tau_1 = (1 - 2M/r_1)^{1/2} dt$. Seja O_2 outro observador que está na terra e seu relógio mede $d\tau_2 = (1 - 2M/r_2)^{1/2} dt$.
- ▶ O_1 envia sinais de luz em um comprimento de onda específico, $c = \lambda_1/d\tau_1$.
- ▶ A relação entre as frequências $[\nu \propto 1/\tau]$ de O_2 e O_1 será:

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{(1 - 2M/r_2)^{1/2}}{(1 - 2M/r_1)^{1/2}} \equiv 1 + z$$

- ▶ Onde z é o corremento para o vermelho. Ou seja, $\nu_{obs} = \nu \times (1 + z)$. Perceba-se que $z \simeq M(1/r_2 - 1/r_1)$.

O desvio gravitacional para o vermelho da luz-III



Uma introdução à
Relatividade Geral

Martín G. W.
Richarte.
Universidade
Federal do Espírito
Santo-2021
16-21 Agosto, DM.

Livros

Surgimento da
Relatividade
Restrita

Relatividade
Restrita

Por que precisamos
da Relatividade
Geral?

Formalismo

Testes
experimentais da
RG

Problemas/experime

O desvio gravitacional para o vermelho da luz-III

Uma introdução à
Relatividade Geral

Martín G. W.
Richarte.
Universidade
Federal do Espírito
Santo-2021
16-21 Agosto, DM.

- ▶ Einstein previu o desvio gravitacional para o vermelho da luz, pensando que esse efeito poderia ser medido nas linhas espectrais de uma estrela anã branca, que tem um campo gravitacional muito alto.
- ▶ O desvio para o vermelho de Sirius B foi finalmente medido por Greenstein et al. em 1971, obtendo o valor para o redshift gravitacional de $89 \pm 19 \text{ km/s}$, com medições mais precisas pelo Telescópio Espacial Hubble mostrando $80,4 \pm 4,8 \text{ km/s}$.

Livros

Surgimento da
Relatividade
Restrita

Relatividade
Restrita

Por que precisamos
da Relatividade
Geral?

Formalismo

Testes
experimentais da
RG

Problemas/experime

O desvio gravitacional para o vermelho da luz-IV

Uma introdução à
Relatividade Geral

Martín G. W.
Richarte.
Universidade
Federal do Espírito
Santo-2021
16-21 Agosto, DM.



The gravitational redshift of Sirius B

S. R. G. Joyce,^{1★} M. A. Barstow,^{1★} J. B. Holberg,² H. E. Bond,^{3,4} S. L. Casewell¹ and M. R. Burleigh¹

¹*Dept. of Physics & Astronomy, Leicester Institute of Space and Earth Observation, University of Leicester, University Road, Leicester LE1 7RH, UK*

²*University of Arizona, LPL, Tucson, AZ 85721, USA*

³*Department of Astronomy & Astrophysics, Pennsylvania State University, University Park, PA 16802, USA*

⁴*Space Telescope Science Institute, 3700 San Martin Dr., Baltimore, MD 21218, USA*

Livros

Surgimento da
Relatividade
Restrita

Relatividade
Restrita

Por que precisamos
da Relatividade
Geral?

Formalismo

Testes
experimentais da
RG

Problemas/experime

Atraso temporal de Shapiro-II

- Combinando a eqn. do elemento de linha pra um raio de luz $ds^2 = 0$ no plano equatorial junto com a condição de como está definido r_0 — $(dr/dt)_{r_0} = 0$ — é possível mostrar que

$$\frac{dr}{dt} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \left(\frac{1 - \frac{2M}{r}}{1 - \frac{2M}{r_0}}\right)\right]^{1/2} = f(r, r_0, M)$$

- Para um dado intervalo de tempo fixo entre a Terra e o Sol, digamos t_1 , podemos integrar entre r_0 e r_1

$$t_1(r_1, r_0) = \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{f(r, r_0, M)} \simeq r_1 + 2M \ln\left(\frac{2r_1}{r_0}\right) + M$$

- Onde usamos que $r_1 \gg r_0$. Se $M = 0$ (E.T. plano) $t_1 = r_1$.
- Fazendo o mesmo tipo de cálculo para a trajetória entre r_0 e r_2 com $r_2 \gg r_0$, o tempo t_2 é:

$$t_2(r_2, r_0) = \int_{r_0}^{r_2} \frac{dr}{f(r, r_0, M)} \simeq r_2 + 2M \ln\left(\frac{2r_2}{r_0}\right) + M$$

Atraso temporal de Shapiro-III

- ▶ Assim, o "tempo extra" total calculado pelo Shapiro fica:

$$\Delta T = 2(\bar{t}_1 + \bar{t}_2) = 2M \left[1 + \ln \left(\frac{4r_1 r_2}{r_0^2} \right) \right]$$



Figure 17: I.I. Shapiro

Atraso temporal de Shapiro-IV

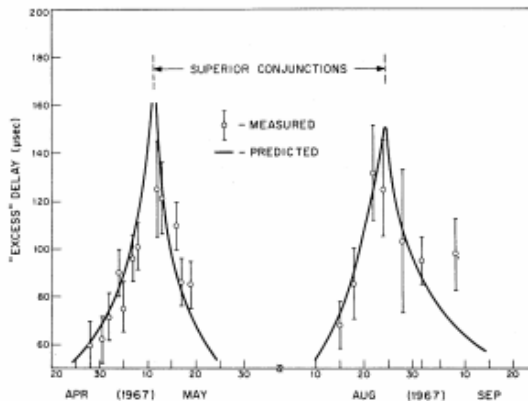


FIG. 3. Comparison of measured and predicted effects of general relativity on Earth-Mercury time delays. Predictions are based on orbits determined from other data.

Uma introdução à
Relatividade Geral

Martín G. W.
Richarte.
Universidade
Federal do Espírito
Santo-2021
16-21 Agosto, DM.

Livros

Surgimento da
Relatividade
Restrita

Relatividade
Restrita

Por que precisamos
da Relatividade
Geral?

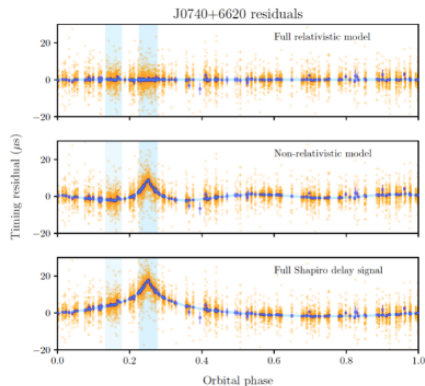
Formalismo

Testes
experimentais da
RG

Problemas/experime

Atraso temporal de Shapiro-V

- ▶ O atraso de Shapiro foi amplamente medido no sistema solar e em pulsares binários, permitindo testes rigorosos de relatividade geral (GR).
- ▶ Também é possível usar medições de temporização de pulsar do atraso relativístico de Shapiro no pulsar $J0740 + 6620$, para medir a massa da estrela de nêutrons 2,14 massas solares.



Relativistic Shapiro delay measurements of an extremely massive millisecond pulsar

H. T. Cromartie^{1,4}, E. Fonseca², S. M. Ransom³, P. B. Demorest⁴, Z. Arzoumanian⁵,
H. Blumer^{6,7}, P. R. Brook^{6,7}, M. E. DeCesar⁶, T. Dolch⁶, J. A. Ellis¹⁰, R. D. Ferdman¹¹, E. C. Ferrara^{12,13},
N. Garver-Daniels^{4,7}, P. A. Gentile^{4,7}, M. L. Jones^{4,7}, M. T. Lam^{4,7}, D. R. Lorimer^{4,7}, R. S. Lynch¹⁴,
M. A. McLaughlin^{4,7}, C. Ng^{15,16}, D. J. Nice¹⁷, T. T. Pennucci¹⁷, R. Spiewak¹⁸, I. H. Stairs¹⁵, K. Stovall¹⁴,
J. K. Swiggum¹⁹ and W. W. Zhu²⁰

Despite its importance to our understanding of physics at supranuclear densities, the equation of state (EoS) of matter deep within neutron stars remains poorly understood. Millisecond pulsars (MSPs) are among the most useful astrophysical objects in the Universe for testing fundamental physics, and place some of the most stringent constraints on this high-density EoS. Pulsar timing—the process of accounting for every rotation of a pulsar over long time periods—can precisely measure a wide variety of physical phenomena, including those that allow the measurement of the masses of the components of a pulsar binary system¹. One of these, called relativistic Shapiro delay², can yield precise masses for both an MSP and its companion; however, it is only easily observed in a small subset of high-precision, highly inclined (nearly edge-on) binary pulsar systems. By combining data from the North American Nanohertz Observatory for Gravitational Waves (NANOGrav) 12.5-yr data set with recent orbital-phase-specific observations using the Green Bank Telescope, we have measured the mass of the MSP J0740+6620 to be $2.14^{+0.10}_{-0.09} M_{\odot}$ (68.3% credibility interval; the 95.4% credibility interval is $2.14^{+0.22}_{-0.11} M_{\odot}$). It is highly likely to be the most massive neutron star yet observed, and serves as a strong constraint on the neutron star interior EoS.

Relativistic Shapiro delay, which is observable when a pulsar passes behind its stellar companion during orbital conjunction, manifests as a small delay in pulse arrival times induced by the curvature of spacetime in the vicinity of the companion star. For a highly inclined MSP—whose dwarf binary the full delay is on the order of $\sim 10 \mu\text{s}$. The relativistic effect is characterized by two parameters, ‘shape’ and ‘range’. In general relativity, shape (s) is the sine of the angle of inclination of the binary orbit (i), while range (r) is proportional to the mass of the companion, m_2 . When combined with the Keplerian mass function, measurements of r and s also constrain the pulsar mass (m_1 ; ref.¹ provides a detailed overview and an alternative parameterization).

Precise neutron star mass measurements are an effective way to constrain the EoS of the ultradense matter in neutron star interiors. Although radio pulsar timing cannot directly determine neutron star radii, the existence of pulsars with masses exceeding the maximum mass allowed by a given model can straightforwardly rule out that EoS.

In 2010, Demorest et al. reported the discovery of a $2 M_{\odot}$ MSP [1614–2230 (ref.³)] (though the originally reported mass was $1.97 \pm 0.04 M_{\odot}$, confirmed timing has led to a more precise mass measurement of $1.928 \pm 0.017 M_{\odot}$ by Fonseca et al.⁴). This Shapiro-delay-enabled measurement disproved the plausibility of some hyperon, baryon and free quark models in nuclear-density environments. In 2013, Antoniadis et al. used optical techniques in combination with pulsar timing to yield a mass measurement of $2.01 \pm 0.04 M_{\odot}$ for the pulsar J0348+0432 (ref.⁵). These two observational results (along with others⁶) encouraged a reconsideration of the canonical $1.4 M_{\odot}$ neutron star. Gravitational-wave astrophysics has also begun to provide EoS constraints; for example, the Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory (LIGO) detection of a double neutron star merger constrains permissible EoSs, suggesting that the upper limit on neutron star mass is $2.17 M_{\odot}$ (90% credibility⁷). Though the existence of extremely massive ($> 2.4 M_{\odot}$) neutron stars has been suggested through optical spectroscopic and photometric observations (for example ref.⁸), radio timing can provide much more precise constraints on the existence of $\geq 2 M_{\odot}$ neutron stars.

NANOGrav employs pulsar timing for an important general relativistic application: the detection of low-frequency gravitational waves primarily from supermassive black hole binaries. The collaborations observing programme consists of high-cadence, multi-frequency radio observations of ~ 75 MSPs using the Green Bank and Arecibo telescopes (GBT and AO; see ref.¹⁰ and the upcoming 12.5-yr data release). Additionally, NANOGrav has begun using the Karl G. Jansky Very Large Array as the third

Problemas atuais e outros experimentos

- ▶ A teoria tem uma série de problemas: 1-Existência de singularidades (S.I, S.F), 2-Não possui uma formulação quântica.
- ▶ O universo a escala cosmológica precisa de componentes de origem dúvidosa (DM, DE) ou modificar o setor de curvatura.
- ▶ Por outro lado, existem muitos experimentos que estão mostrando o sólido que é a RG:
 1. O satélite Gravity Probe B-2005 detectou o arrasto de sistema devido a efeitos geodésicos.
 2. A detecção de ondas gravitacionais-2016-LIGO.
 3. Primeira imagem de um B.N. na galáxia M87 detectado pelo Event Horizon Telescope (EHT)-2019
 4. Existem muitos outros experimentos que testaram o P.E. e a teoria no limite de campo forte!!!

O fim? Não, agora temos que estudar GR com maior profundidade!!!

Uma introdução à Relatividade Geral

Martín G. W.
Richarte.
Universidade
Federal do Espírito
Santo-2021
16-21 Agosto, DM.

Livros

Surgimento da Relatividade Restrita

Relatividade Restrita

Por que precisamos da Relatividade Geral?

Formalismo

Testes experimentais da RG

Problemas/experimentos

