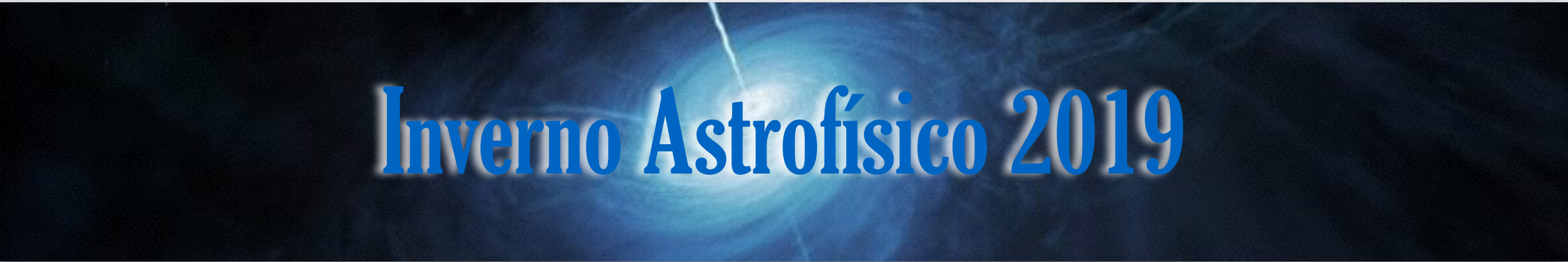


ONDAS GRAVITACIONAIS

Júnior Diniz Toniato

Núcleo Cosmo-ufes & PPGCosmo
Universidade Federal do Espírito Santo



Inverno Astrofísico 2019

Fazenda do Centro
Castelo - ES



ROTEIRO DAS AULAS

♦ **Aula 1**

- **Introdução**
- **Revisão do Eletromagnetismo**

♦ Aula 2

- Relatividade Geral e Ondas Gravitacionais

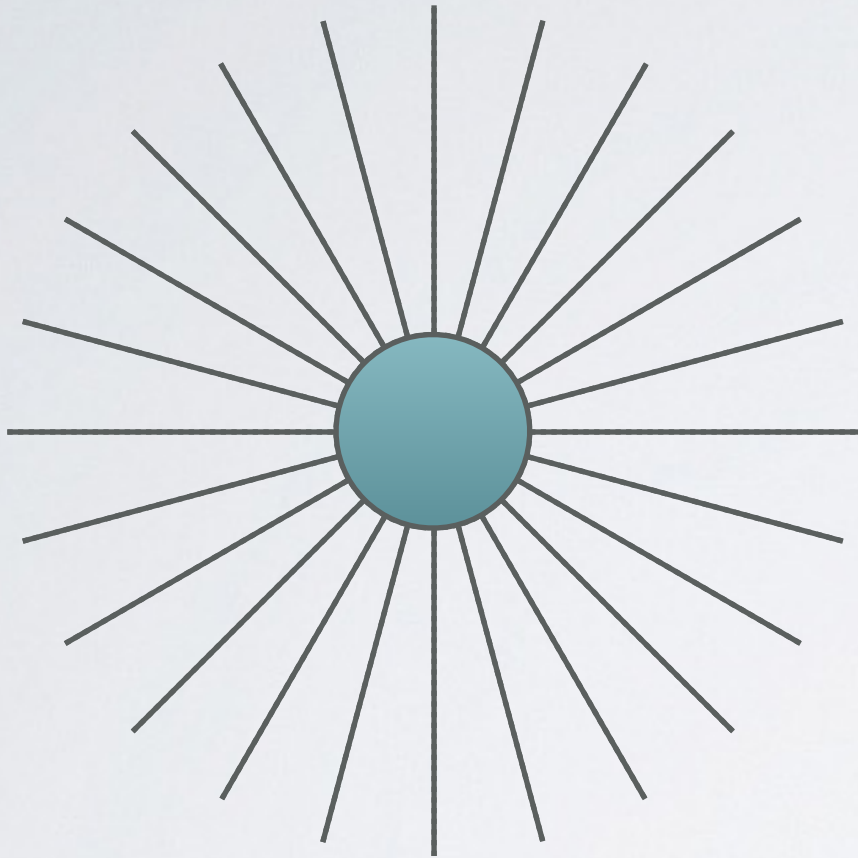
♦ Aula 3

- Energia e Momento das Ondas Gravitacionais
- Pulsar Binário e a Primeira Evidência Indireta de Ondas Gravitacionais
- A Busca Pela Detecção Direta de Ondas Gravitacionais

INTRODUÇÃO

O QUE SÃO ONDAS GRAVITACIONAIS?

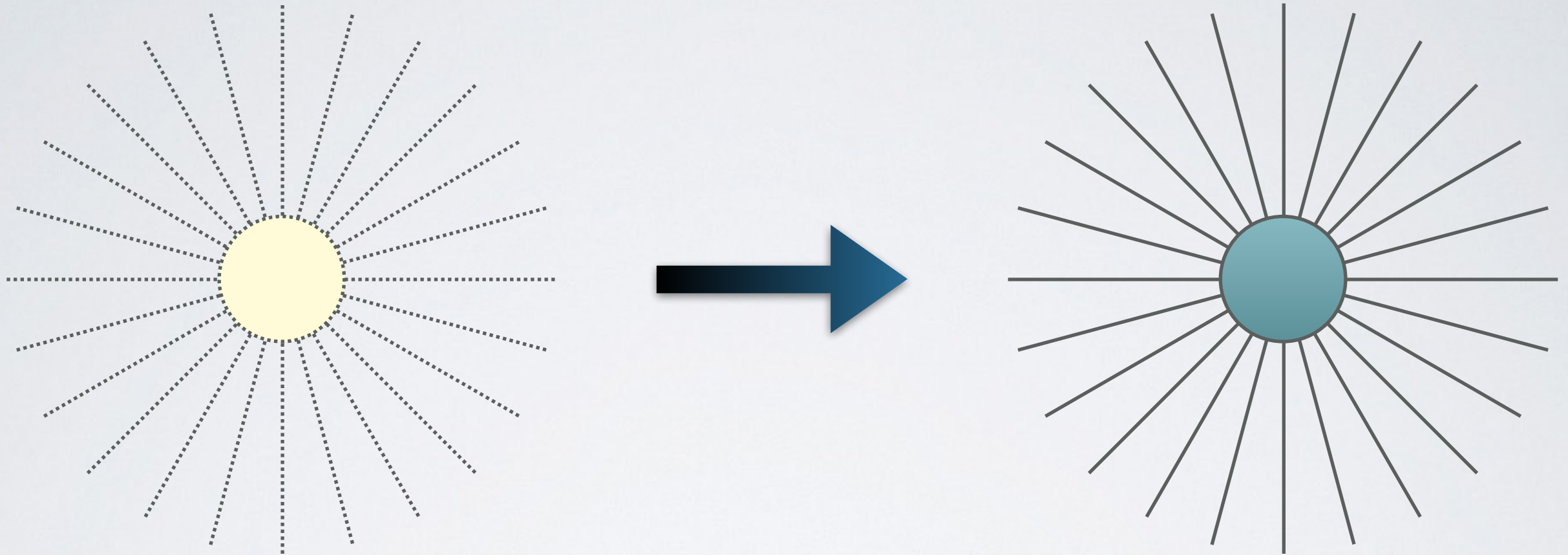
- Recapitulando aspectos da gravitação Newtoniana



Linhas do campo gravitacional

○ QUE SÃO ONDAS GRAVITACIONAIS?

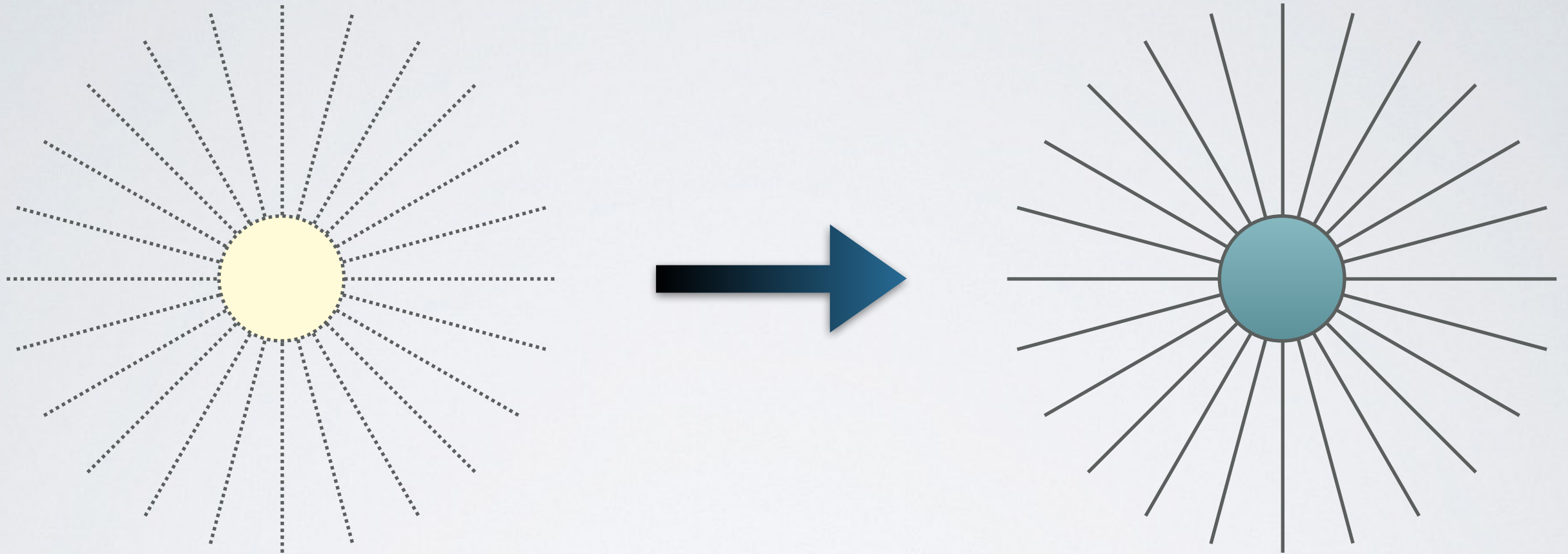
- Recapitulando aspectos da gravitação Newtoniana



As linhas de campo se adequam à nova posição da massa instantaneamente

O QUE SÃO ONDAS GRAVITACIONAIS?

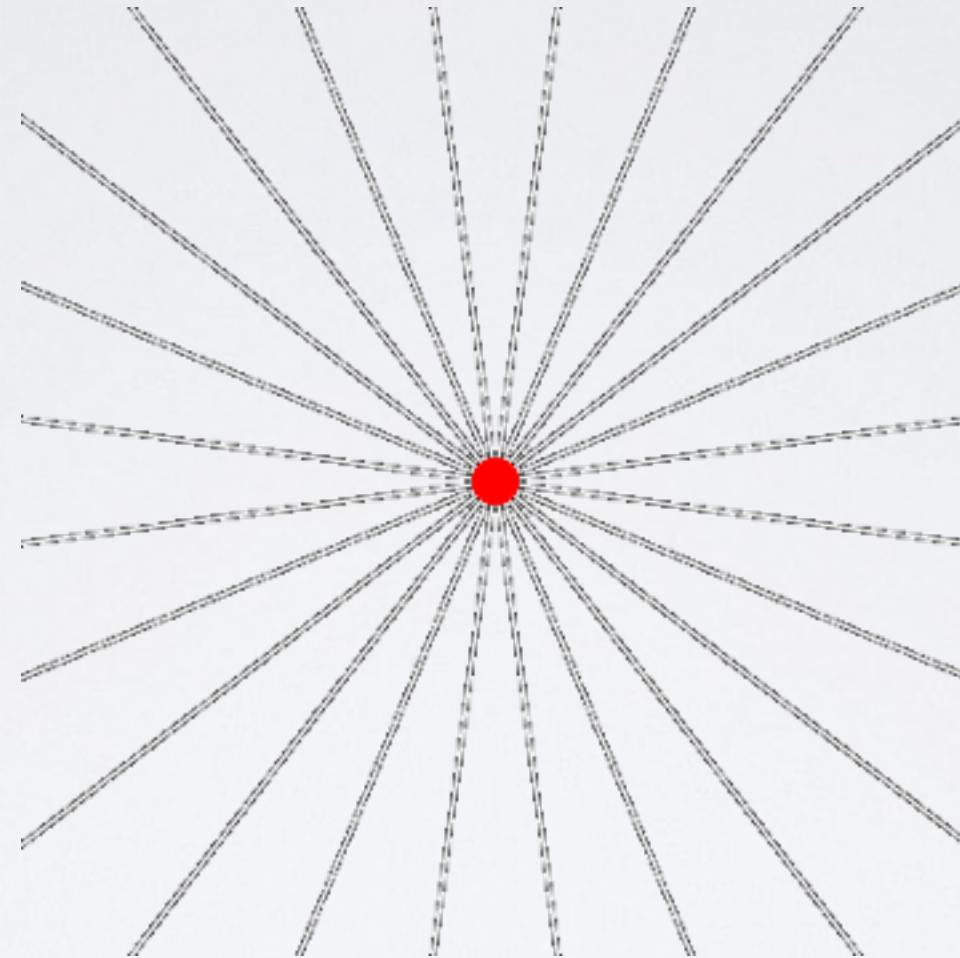
- Recapitulando aspectos da gravitação Newtoniana



**Isso contradiz a relatividade de Einstein:
nada viaja mais rápido que a luz**

O QUE SÃO ONDAS GRAVITACIONAIS?

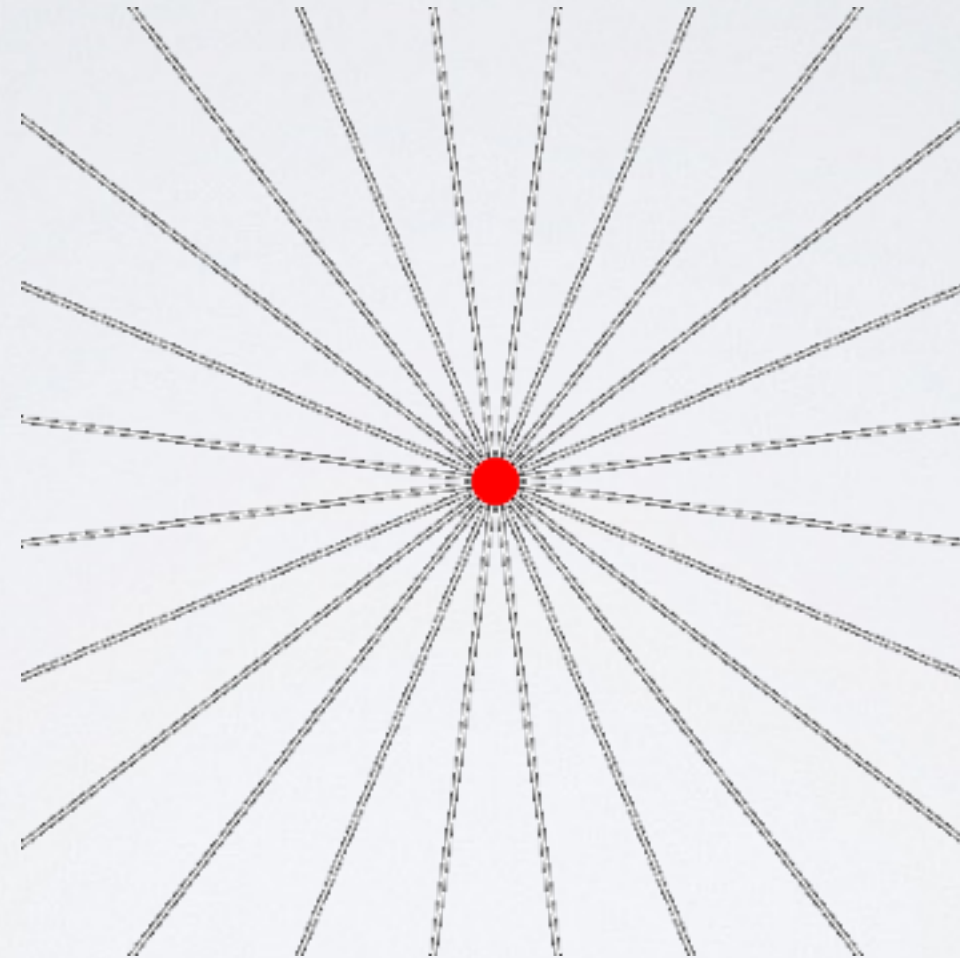
- No eletromagnetismo as coisas são diferentes



A informação viaja na velocidade da luz na forma de uma onda eletromagnética

O QUE SÃO ONDAS GRAVITACIONAIS?

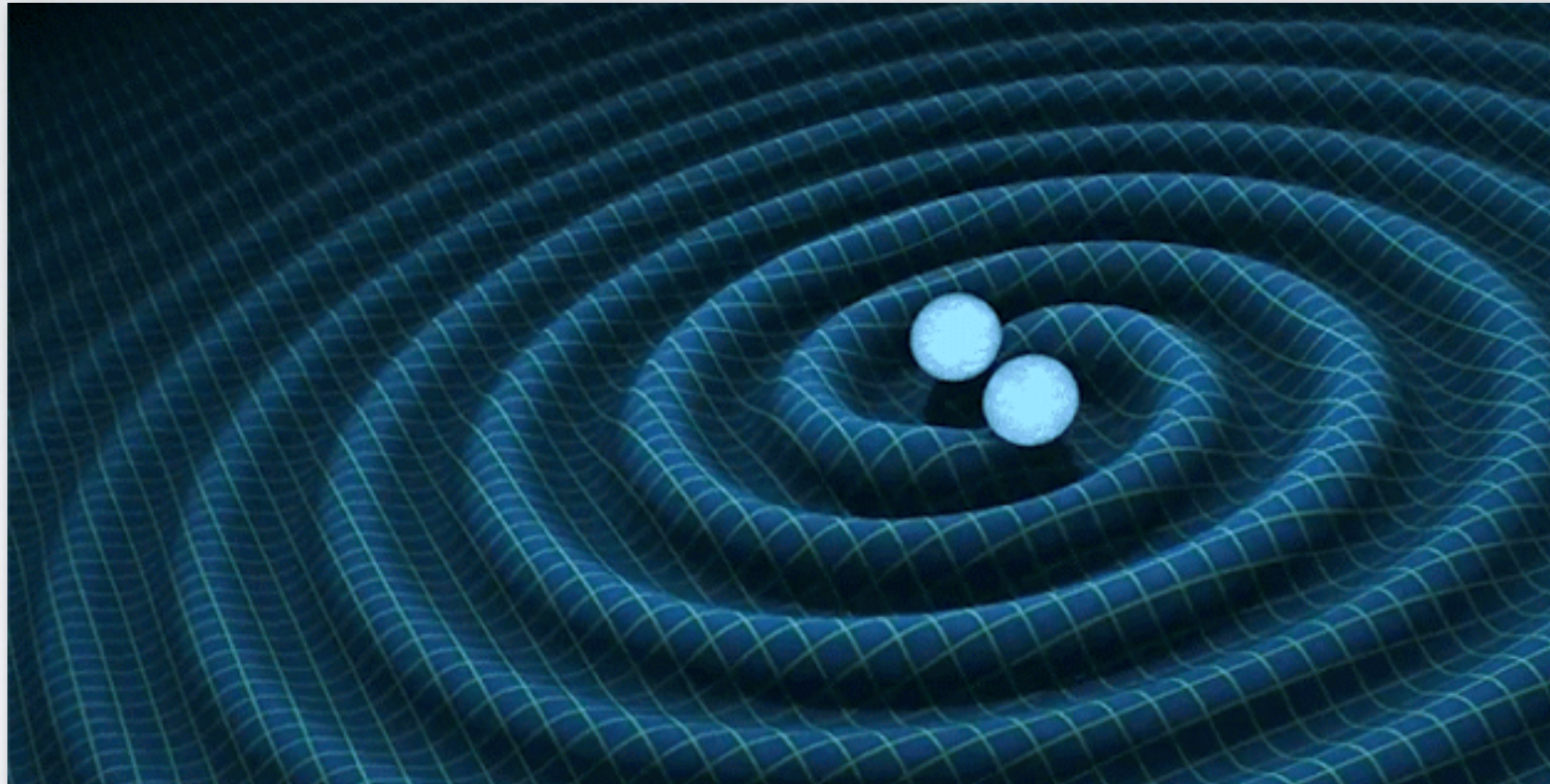
- No eletromagnetismo as coisas são diferentes



A informação viaja na velocidade da luz na forma de uma onda eletromagnética

O QUE SÃO ONDAS GRAVITACIONAIS?

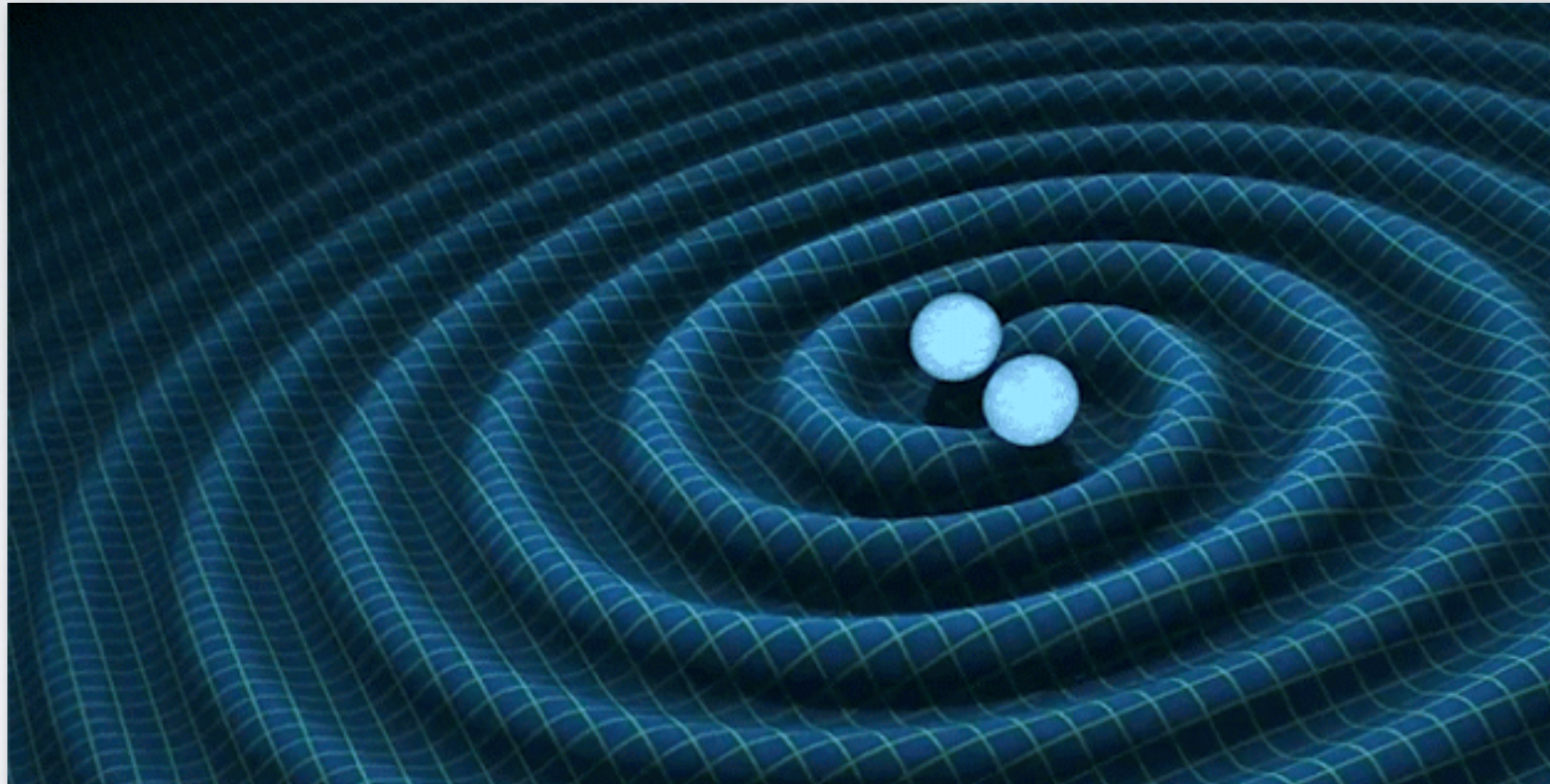
- A relatividade geral resolve esse problema;



- A informação no campo gravitacional também se propaga como um onda

O QUE SÃO ONDAS GRAVITACIONAIS?

- A relatividade geral resolve esse problema;



- A informação no campo gravitacional também se propaga como um onda

OBJETIVOS DO CURSO

- Entender como o conceito de onda gravitacional surge das equações de Einstein;
- Compreender os fenômenos da radiação gravitacional à partir da analogia com o eletromagnetismo;
- Consequências da emissão de ondas gravitacionais em sistemas binários

REVISÃO DO ELETROMAGNETISMO

- Equações de Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \dots \text{Lei de Gauss}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \dots \text{Lei de Gauss do magnetismo}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \dots \text{Lei de Faraday}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{J}. \dots \text{Lei de Ampère}$$

- Força de Lorentz:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

- Conservação da carga

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

- Potenciais escalar e vetor

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

- Potenciais escalar e vetor

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$


$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \longrightarrow \quad \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

- Potenciais escalar e vetor

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$


$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \longrightarrow \quad \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$


$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

- Potenciais escalar e vetor

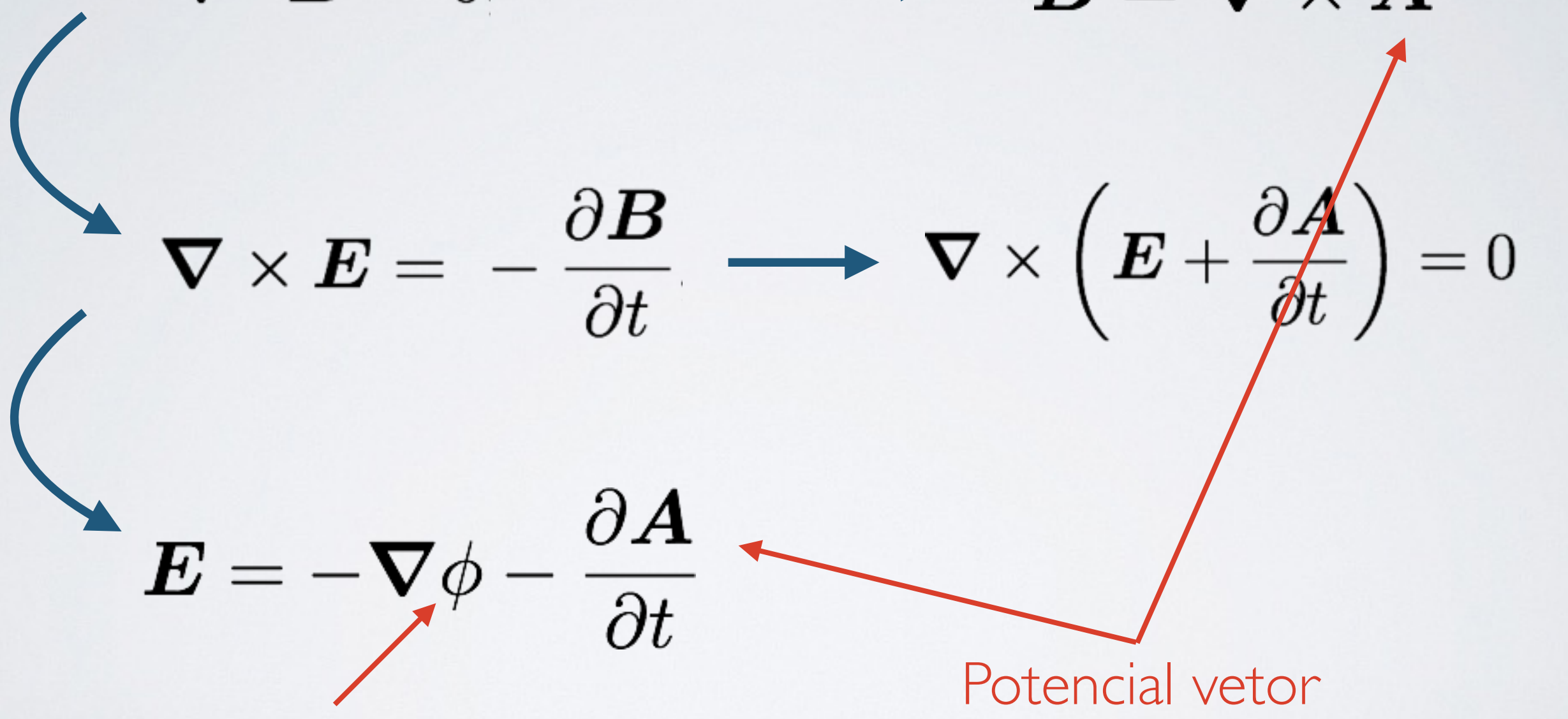
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \longrightarrow \quad \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

Potencial escalar

Potencial vetor



- Leis de Gauss e Ampère em termos dos potenciais

$$\nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\mu_0 \mathbf{J}$$

- Essas equações pode ser simplificadas com uma escolha apropriada de **calibre**

- ***Transformações de calibre no eletromagnetismo***

Os campos E e B são invariantes pelas transformações dos potenciais abaixo:

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \nabla \lambda, \quad \bar{\phi} = \phi - \frac{\partial \lambda}{\partial t}$$

A função λ é arbitrária, dando origem à liberdade de calibre do eletromagnetismo.

- *Transformações de calibre no eletromagnetismo*

Os campos E e B são invariantes pelas transformações dos potenciais abaixo:

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \nabla \lambda, \quad \bar{\phi} = \phi - \frac{\partial \lambda}{\partial t}$$

Exercício:

Mostre que os campos E e B não mudam com as transformações acima

- Calibre de Lorentz

$$\nabla^2 \lambda = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} \quad \rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

- Isso simplifica as equações dinâmicas dos potenciais

$$\nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\mu_0 \mathbf{J}$$

Antes

- Calibre de Lorentz

$$\nabla^2 \lambda = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} \quad \rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

- Isso simplifica as equações dinâmicas dos potenciais

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

Depois

- Calibre de Lorentz

$$\nabla^2 \lambda = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} \quad \rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

- Isso simplifica as equações dinâmicas dos potenciais

**Equações
da onda**


$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$


$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

- Calibre de Lorentz

$$\nabla^2 \lambda = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} \quad \rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

- Isso simplifica as equações dinâmicas dos potenciais

Equações da onda

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

Velocidade da onda

$$c^2 = 1/\mu_0 \epsilon_0$$

- Calibre de Lorentz

$$\nabla^2 \lambda = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} \quad \rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

- Simplificamos as equações de onda com o operador d'Alembertiano

$$\square \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

- obtendo

$$\square \phi = -\rho/\varepsilon_0, \quad \square \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

- Soluções: método de funções de Green (veja livro do Jackson de eletromagnetismo)

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{x}', t_R)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}', t_R)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'$$

com $t_R = t - R/c$ sendo o tempo retardado e leva em conta a velocidade finita da onda eletromagnética.

O volume de integração é sobre toda a fonte.

- Expansão multipolar

Vamos estudar os potenciais retardados longe da fonte $x \gg x'$

- Expansão multipolar

Vamos estudar os potenciais retardados longe da fonte $x \gg x'$

$$\begin{aligned} |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| &= \sqrt{r^2 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' + r'^2}, \quad r = |\mathbf{x}| \\ &\approx r - \mathbf{x} \cdot \left(\frac{\mathbf{x}'}{r} \right) + \frac{r}{2} \left(\frac{r'^2}{r^2} \right) \end{aligned}$$

- Expansão multipolar

Vamos estudar os potenciais retardados longe da fonte $x \gg x'$

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = \sqrt{r^2 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' + r'^2}, \quad r = |\mathbf{x}|$$
$$\approx r - \mathbf{x} \cdot \left(\frac{\mathbf{x}'}{r} \right) + \frac{r}{2} \left(\frac{r'^2}{r^2} \right)$$

- Expansão multipolar

Vamos estudar os potenciais retardados longe da fonte $x \gg x'$

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = \sqrt{r^2 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' + r'^2}, \quad r = |\mathbf{x}|$$
$$\approx r - \mathbf{x} \cdot \left(\frac{\mathbf{x}'}{r} \right) + \frac{r}{2} \left(\frac{r'^2}{r^2} \right)$$

As fontes também devem ser expandidas em série de Taylor sobre o ponto $t_r = t - r/c$

$$\rho(\mathbf{x}', t_R) \approx \rho(\mathbf{x}', t_r) + \frac{\dot{\rho}(\mathbf{x}', t_r)}{c} \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}', \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}}{r}$$

e o mesmo vale para a fonte do potencial vetor.

- Expansão multipolar

Potencial escalar

$$\phi(\mathbf{x}, t) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\int \rho(\mathbf{x}', t_r) d^3x' + \frac{\mathbf{n}}{r} \cdot \int \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}', t_r) d^3x' + \frac{\mathbf{n}}{c} \cdot \frac{d}{dt} \int \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}', t_r) d^3x' \right)$$

- Expansão multipolar

Potencial escalar

$$\phi(x, t) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\int \rho(x', t_r) d^3x' + \frac{\mathbf{n}}{r} \cdot \int \mathbf{x}' \rho(x', t_r) d^3x' + \frac{\mathbf{n}}{c} \cdot \frac{d}{dt} \int \mathbf{x}' \rho(x', t_r) d^3x' \right)$$

carga total q

momento de dipolo elétrico $\mathbf{p}$

- Expansão multipolar

Potencial escalar

$$\phi(x, t) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\int \rho(x', t_r) d^3x' + \frac{\mathbf{n}}{r} \cdot \int \mathbf{x}' \rho(x', t_r) d^3x' + \frac{\mathbf{n}}{c} \cdot \frac{d}{dt} \int \mathbf{x}' \rho(x', t_r) d^3x' \right)$$

Diagram illustrating the multipole expansion of the scalar potential $\phi(x, t)$. The expansion is shown as a sum of three terms inside large parentheses, all multiplied by $\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}$.
1. The first term is $\int \rho(x', t_r) d^3x'$. A red arrow points from the text "carga total q " to this term.
2. The second term is $\frac{\mathbf{n}}{r} \cdot \int \mathbf{x}' \rho(x', t_r) d^3x'$. A red arrow points from the text "momento de dipolo elétrico" to this term.
3. The third term is $\frac{\mathbf{n}}{c} \cdot \frac{d}{dt} \int \mathbf{x}' \rho(x', t_r) d^3x'$. A red arrow points from the symbol $\mathbf{p}$ to this term.

$$\phi \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r} + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}(t_r)}{r^2} + \frac{\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{p}}(t_r)}{cr} \right)$$

- Expansão multipolar

Potencial escalar

$$\phi(x, t) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\int \rho(x', t_r) d^3x' + \frac{\mathbf{n}}{r} \cdot \int \mathbf{x}' \rho(x', t_r) d^3x' + \frac{\mathbf{n}}{c} \cdot \frac{d}{dt} \int \mathbf{x}' \rho(x', t_r) d^3x' \right)$$

carga total q
momento de dipolo elétrico $\mathbf{p}$

$$\phi \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r} + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}(t_r)}{r^2} + \frac{\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{p}}(t_r)}{cr} \right)$$

**Potencial de Coulomb
constante no tempo**

**Termos dominantes
na radiação**

- Expansão Multipolar

No caso do potencial vetor o primeiro termo não é constante,

- Expansão Multipolar

No caso do potencial vetor o primeiro termo não é constante,

$$\mathbf{A}(x, t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi r} \int \mathbf{J}(x', t_r) d^3x' = -\frac{\mu_0}{4\pi r} \int \mathbf{x}' (\nabla' \cdot \mathbf{J}') d^3x'$$

- Expansão Multipolar

No caso do potencial vetor o primeiro termo não é constante,

$$\mathbf{A}(x, t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi r} \int \mathbf{J}(x', t_r) d^3x' = -\frac{\mu_0}{4\pi r} \int \mathbf{x}' (\nabla' \cdot \mathbf{J}') d^3x'$$

e, usando a equação da continuidade,

$$\mathbf{A}(x, t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{\dot{\mathbf{p}}(t_r)}{r}$$

- Expansão Multipolar

No caso do potencial vetor o primeiro termo não é constante,

$$\mathbf{A}(x, t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi r} \int \mathbf{J}(x', t_r) d^3x' = -\frac{\mu_0}{4\pi r} \int \mathbf{x}' (\nabla' \cdot \mathbf{J}') d^3x'$$

e, usando a equação da continuidade,

$$\mathbf{A}(x, t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{\dot{\mathbf{p}}(t_r)}{r}$$

Portanto, os termos dominantes da radiação eletromagnética estão associados ao momento de dipolo da distribuição de cargas.

- Campos elétrico e magnético:

O cálculo do campo é direto e, após certa álgebra vetorial, os termos dominantes são

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \approx \frac{\mu_0}{4\pi r} \mathbf{n} \times \mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{p}} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi cr} \mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{p}}$$

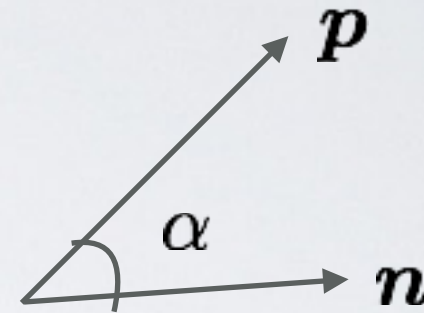
Nota-se que os campos elétricos e magnéticos são perpendiculares entre si e transversais à direção radial. Na verdade,

$$\mathbf{E} = c\mathbf{n} \times \mathbf{B}$$

- Potencia irradiada

Vetor de Poynting

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0} \approx \frac{\mu_0 \ddot{p}^2}{16\pi^2 c} \frac{\sin^2 \alpha}{r^2} \mathbf{n}$$



Potência irradiada é proporcional ao quadrado da segunda derivada do momento de dipolo elétrico da fonte.

RECAPITULANDO

- Ondas eletromagnéticas são previstas pelas equações de Maxwell;
- Conservação da carga elétrica impede o termo de monopólio de irradiar;
- Energia irradiada por unidade de tempo é proporcional ao quadrado da segunda variação temporal do momento de dipolo elétrico da fonte.

ROTEIRO DAS AULAS

♦ Aula 1

- Introdução
- Revisão do Eletromagnetismo

♦ **Aula 2**

- **Relatividade Geral e Ondas Gravitacionais**

♦ Aula 3

- Energia e Momento das Ondas Gravitacionais
- Pulsar Binário e a Primeira Evidência Indireta de Ondas Gravitacionais
- A Busca Pela Detecção Direta de Ondas Gravitacionais

RELATIVIDADE GERAL E ONDAS GRAVITACIONAIS

Matemática da Relatividade:

Invariância por transformações de Lorentz: espaço e tempo, individualmente, não são absolutos, mas sim a união espaço-tempo. Por exemplo, em coord. cartesianas

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Matemática da Relatividade:

Invariância por transformações de Lorentz: espaço e tempo, individualmente, não são absolutos, mas sim a união espaço-tempo. Por exemplo, em coord. cartesianas

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad \longrightarrow \quad ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Matemática da Relatividade:

Invariância por transformações de Lorentz: espaço e tempo, individualmente, não são absolutos, mas sim a união espaço-tempo. Por exemplo, em coord. cartesianas

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$



$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

métrica

coordenadas

Matemática da Relatividade:

Invariância por transformações de Lorentz: espaço e tempo, individualmente, não são absolutos, mas sim a união espaço-tempo. Por exemplo, em coord. cartesianas

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$



$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

métrica

coordenadas

Índice de tensores: $\mu = (0, 1, 2, 3)$

Matemática da Relatividade:

Invariância por transformações de Lorentz: espaço e tempo, individualmente, não são absolutos, mas sim a união espaço-tempo. Por exemplo, em coord. cartesianas

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$



$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Índice de tensores: $\mu = (0, 1, 2, 3)$

métrica

coordenadas

Métrica de Minkowski: $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$

Matemática da Relatividade:

Invariância por transformações de Lorentz: espaço e tempo, individualmente, não são absolutos, mas sim a união espaço-tempo. Por exemplo, em coord. cartesianas

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$



$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

métrica

coordenadas

Índice de tensores: $\mu = (0, 1, 2, 3)$

Métrica de Minkowski: $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$

Notação de Einstein: índices repetidos implicam soma sobre todos seus valores.

Matemática da Relatividade:

Invariância por transformações de Lorentz: espaço e tempo, individualmente, não são absolutos, mas sim a união espaço-tempo. Por exemplo, em coord. cartesianas

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$



$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

métrica

coordenadas

Índice de tensores: $\mu = (0, 1, 2, 3)$

Métrica de Minkowski: $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$

Notação de Einstein: índices repetidos implicam soma sobre todos seus valores.

Matemática da Relatividade:

Invariância por transformações de Lorentz: espaço e tempo, individualmente, não são absolutos, mas sim a união espaço-tempo. Por exemplo, em coord. cartesianas

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$



$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

métrica

coordenadas

Índice de tensores: $\mu = (0, 1, 2, 3)$

Métrica de Minkowski: $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$

Notação de Einstein: índices repetidos implicam soma sobre todos seus valores.

A métrica do espaço-tempo é responsável por “subir” e “descer” índices:

$$A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu$$

Eletromagnetismo em notação tensorial

Campos elétrico e magnético são representados de forma unificada pelo tensor de Maxwell

$$F^{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Eletrromagnetismo em notação tensorial

Campos elétrico e magnético são representados de forma unificada pelo tensor de Maxwell

$$F^{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Fontes no tensor de corrente

$$J^\mu = (\rho c, \mathbf{J})$$

Eletromagnetismo em notação tensorial

Campos elétrico e magnético são representados de forma unificada pelo tensor de Maxwell

$$F^{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Fontes no tensor de corrente

$$J^\mu = (\rho c, \mathbf{J})$$

Equações de Maxwell

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu \rightarrow \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

$$\partial_\alpha F^{\mu\nu} + \partial_\mu F^{\nu\alpha} + \partial_\nu F^{\alpha\mu} = 0$$

Eletrromagnetismo em notação tensorial

Potenciais escalar e vetor unificados em um quadri-vetor

$$A^\mu = (\phi/c, \mathbf{A})$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

Eletromagnetismo em notação tensorial

Potenciais escalar e vetor unificados em um quadri-vetor

$$A^\mu = (\phi/c, \mathbf{A})$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

Invariância de calibre

$$\bar{A}_\mu = A_\mu + \partial_\mu \lambda$$

Eletromagnetismo em notação tensorial

Potenciais escalar e vetor unificados em um quadri-vetor

$$A^\mu = (\phi/c, \mathbf{A}) \qquad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

Invariância de calibre

$$\bar{A}_\mu = A_\mu + \partial_\mu \lambda$$

Calibre de Lorentz

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

Eletromagnetismo em notação tensorial

Potenciais escalar e vetor unificados em um quadri-vetor

$$A^\mu = (\phi/c, \mathbf{A}) \qquad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

Invariância de calibre

$$\bar{A}_\mu = A_\mu + \partial_\mu \lambda$$

Calibre de Lorentz

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

Equações de Maxwell

$$\square A^\mu = -\mu_0 J^\mu$$

Eletromagnetismo em notação tensorial

Potenciais escalar e vetor unificados em um quadri-vetor

$$A^\mu = (\phi/c, \mathbf{A}) \qquad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

Invariância de calibre

$$\bar{A}_\mu = A_\mu + \partial_\mu \lambda$$

Calibre de Lorentz

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

Equações de Maxwell

$$\square A^\mu = -\mu_0 J^\mu$$

Operador d'Alembertiano

$$\square = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \nabla^2 - \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2}$$

Relatividade Geral

Equações de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Tensor de curvatura ou tensor de Riemann

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \partial_\gamma \Gamma^\alpha_{\beta\delta} - \partial_\delta \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + \Gamma^\alpha_{\mu\gamma} \Gamma^\mu_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha_{\mu\delta} \Gamma^\mu_{\beta\gamma}$$

Tensor de Ricci escalar de Ricci

$$R_{\beta\delta} = R^\alpha_{\beta\alpha\delta} \qquad R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

Conexão

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\mu g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\beta\mu} - \partial_\beta g_{\mu\nu})$$

Relatividade Geral

Equações de Einstein

Derivadas segunda
da métrica

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Fonte:
matéria/energia e
momento

Tensor de curvatura ou tensor de Riemann

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = \partial_{\gamma}\Gamma^{\alpha}_{\beta\delta} - \partial_{\delta}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma}\Gamma^{\mu}_{\beta\delta} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\delta}\Gamma^{\mu}_{\beta\gamma}$$

Tensor de Ricci escalar de Ricci

$$R_{\beta\delta} = R^{\alpha}_{\beta\alpha\delta}$$

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

Conexão

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_{\mu} g_{\beta\nu} + \partial_{\nu} g_{\beta\mu} - \partial_{\beta} g_{\mu\nu})$$

Relatividade Geral

Equações de Einstein

Derivadas segunda
da métrica

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Fonte:
matéria/energia e
momento

Tensor de curvatura ou tensor de Riemann

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = \partial_{\gamma}\Gamma^{\alpha}_{\beta\delta} - \partial_{\delta}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma}\Gamma^{\mu}_{\beta\delta} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\delta}\Gamma^{\mu}_{\beta\gamma}$$

Tensor de Ricci escalar de Ricci

$$R_{\beta\delta} = R^{\alpha}_{\beta\alpha\delta}$$

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

Conexão

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_{\mu} g_{\beta\nu} + \partial_{\nu} g_{\beta\mu} - \partial_{\beta} g_{\mu\nu})$$

Teoria altamente não linear!

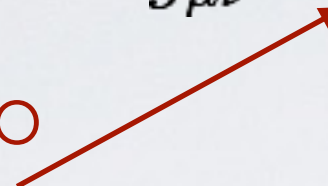
- Aproximação de campo fraco

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

- Aproximação de campo fraco

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

Espaço-tempo plano
(Minkowski)

A red arrow points from the text 'Espaço-tempo plano (Minkowski)' to the $\eta_{\mu\nu}$ term in the equation above.

Pequena
perturbação

A red arrow points from the text 'Pequena perturbação' to the $h_{\mu\nu}$ term in the equation above.

- Aproximação de campo fraco

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

Espaço-tempo plano (Minkowski) $\nearrow$ $\eta_{\mu\nu}$
 $\nwarrow$ $h_{\mu\nu}$ Pequena perturbação

Na equação de Einstein, mantemos somente termos lineares de h

$$\partial_\gamma \partial_\nu \bar{h}_\mu^\gamma + \partial^\gamma \partial_\mu \bar{h}_{\gamma\nu} - \square \bar{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial_\gamma \partial_\delta \bar{h}^{\gamma\delta} = \frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h \qquad h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} \qquad \square = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$$

- Liberdade de calibre

Uma transformação de coordenadas infinitesimal

$$\tilde{x}^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu \quad \text{com} \quad \epsilon^\mu \ll 1$$

implica

$$\tilde{\bar{h}}_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \partial_\mu \epsilon_\nu - \partial_\nu \epsilon_\mu + \eta_{\mu\nu} \partial_\gamma \epsilon^\gamma$$

mas o tensor de Riemann (linear) permanece inalterado.

Podemos escolher ϵ^μ tal que as equações de Einstein assumam uma forma mais conveniente.

- Liberdade de calibre

Uma transformação de coordenadas infinitesimal

$$\tilde{x}^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu \quad \text{com} \quad \epsilon^\mu \ll 1$$

implica

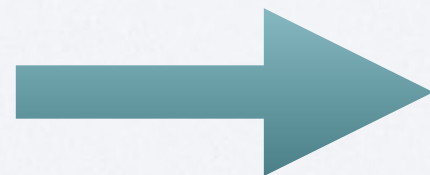
$$\tilde{\tilde{h}}_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \partial_\mu \epsilon_\nu - \partial_\nu \epsilon_\mu + \eta_{\mu\nu} \partial_\gamma \epsilon^\gamma$$

mas o tensor de Riemann (linear) permanece inalterado.

Podemos escolher ϵ^μ tal que as equações de Einstein assumam uma forma mais conveniente.

Calibre harmônico

$$\partial_\mu \tilde{\tilde{h}}^\mu{}_\nu = 0$$



Equação de Einstein

$$\square \tilde{\tilde{h}}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

- Liberdade de calibre residual

- Liberdade de calibre residual

Note que, para termos o calibre harmônico as transformações devem satisfazer a equação

$$\tilde{\tilde{h}}_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \partial_\mu \epsilon_\nu - \partial_\nu \epsilon_\mu + \eta_{\mu\nu} \partial_\gamma \epsilon^\gamma \longrightarrow \partial_\mu \tilde{\tilde{h}}^\mu{}_\nu = 0 \longrightarrow \square \epsilon_\nu = \partial_\mu \bar{h}^\mu{}_\nu$$

- Liberdade de calibre residual

Note que, para termos o calibre harmônico as transformações devem satisfazer a equação

$$\tilde{h}_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \partial_\mu \epsilon_\nu - \partial_\nu \epsilon_\mu + \eta_{\mu\nu} \partial_\gamma \epsilon^\gamma \longrightarrow \partial_\mu \tilde{h}^\mu{}_\nu = 0 \longrightarrow \square \epsilon_\nu = \partial_\mu \bar{h}^\mu{}_\nu$$

Essa equação permanece válida se somarmos à ϵ_ν uma quantidade ξ_ν que satisfaça a equação

$$\square \xi_\nu = 0$$

- Liberdade de calibre residual

Note que, para termos o calibre harmônico as transformações devem satisfazer a equação

$$\tilde{h}_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \partial_\mu \epsilon_\nu - \partial_\nu \epsilon_\mu + \eta_{\mu\nu} \partial_\gamma \epsilon^\gamma \longrightarrow \partial_\mu \tilde{h}^\mu{}_\nu = 0 \longrightarrow \square \epsilon_\nu = \partial_\mu \bar{h}^\mu{}_\nu$$

Essa equação permanece válida se somarmos à ϵ_ν uma quantidade ξ_ν que satisfaça a equação

$$\square \xi_\nu = 0$$

Temos, então, mais quatro funções livres para simplificar a métrica. Uma escolha conveniente é

$$\tilde{h}_{0\mu} = 0 \quad \tilde{h} = 0 \quad \longrightarrow \quad \bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$$

Essas condições constituem o chamado calibre transverse-traceless. **Somente válido no vácuo!**

SUGESTÃO DE EXERCÍCIOS

- Reproduzir os resultados da aproximação de campo fraco da relatividade geral,
- Todo livro texto de RG detalha esses cálculos,
- Em especial, sugiro o livro *Gravitation: Foundations and Frontiers*, de T. Padmanabhan (seção 6.4)

- Ondas planas no vácuo

Longe das fontes, podemos tratar a onda gravitacional como sendo plana. Supondo uma propagação na direção z

$$\square h_{\mu\nu} = 0 \quad \longrightarrow \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) h_{\mu\nu} = 0 \quad \longrightarrow \quad h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}(t - z)$$

solução

- Ondas planas no vácuo

Longe das fontes, podemos tratar a onda gravitacional como sendo plana. Supondo uma propagação na direção z

$$\square h_{\mu\nu} = 0 \longrightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) h_{\mu\nu} = 0 \longrightarrow h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}(t - z)$$

solução

No calibre TT, sobram apenas as componentes

$$h_{xx}^{TT} = -h_{yy}^{TT} \equiv h_+$$

$$h_{xy}^{TT} = h_{yx}^{TT} \equiv h_\times$$

- Efeito sobre partículas testes

- Efeito sobre partículas testes

Considere duas partículas posicionadas em $(0, 0, 0)$ e $(\ell, 0, 0)$, por onde passa a onda gravitacional plana viajando na direção z .

- Efeito sobre partículas testes

Considere duas partículas posicionadas em $(0, 0, 0)$ e $(\ell, 0, 0)$, por onde passa a onda gravitacional plana viajando na direção z .

Calculemos a distância própria entre elas

- Efeito sobre partículas testes

Considere duas partículas posicionadas em $(0, 0, 0)$ e $(\ell, 0, 0)$, por onde passa a onda gravitacional plana viajando na direção z .

Calculemos a distância própria entre elas

$$\begin{aligned} L &= \int_0^\ell ds = \int_0^\ell \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = \int_0^\ell \sqrt{1 + h_+} dx \\ &= l\sqrt{1 + h_+} \approx l \left(1 + \frac{1}{2} h_+ \right) \end{aligned}$$

- Efeito sobre partículas testes

Considere duas partículas posicionadas em $(0, 0, 0)$ e $(\ell, 0, 0)$, por onde passa a onda gravitacional plana viajando na direção z .

Calculemos a distância própria entre elas

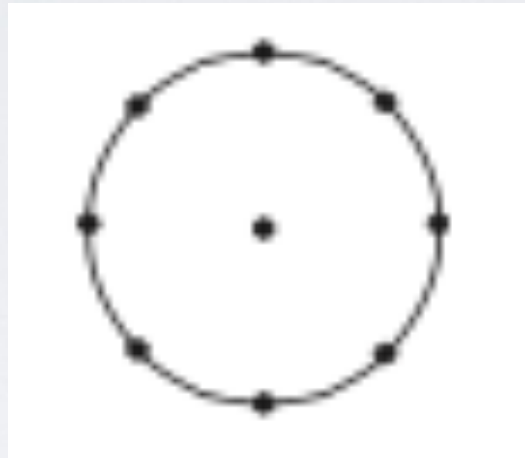
$$\begin{aligned} L &= \int_0^\ell ds = \int_0^\ell \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = \int_0^\ell \sqrt{1 + h_+} dx \\ &= l\sqrt{1 + h_+} \approx l \left(1 + \frac{1}{2} h_+ \right) \end{aligned}$$

A distância entre as partículas oscila



- Efeito sobre partículas testes

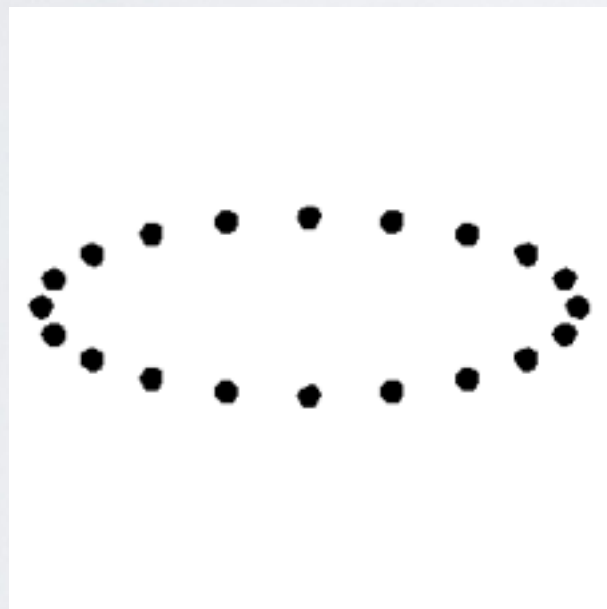
O resultado anterior pode ser generalizado para o caso de um anel de partículas.



- Efeito sobre partículas testes

O resultado anterior pode ser generalizado para o caso de um anel de partículas.

Cada uma das componentes independentes da métrica é responsável por um modo de polarização da onda.



h_+



h_x

- Solução com fontes

- Solução com fontes

Já conhecemos a solução da equação de onda em termos de potenciais retardados

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad \longrightarrow \quad \bar{h}_{\mu\nu} = \frac{4G}{c^4} \int \frac{T_{\mu\nu}(x', t_R)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'$$

relembrando que $t_R = t - R/c$ e $R = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$

- Solução com fontes

Já conhecemos a solução da equação de onda em termos de potenciais retardados

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad \longrightarrow \quad \bar{h}_{\mu\nu} = \frac{4G}{c^4} \int \frac{T_{\mu\nu}(x', t_R)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'$$

relembrando que $t_R = t - R/c$ e $R = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$

Por conta da condição de calibre harmônica, temos que

$$\partial_0 \bar{h}^0_0 = -\partial_k \bar{h}^k_0 \quad \text{e} \quad \partial_0 \bar{h}^0_i = -\partial_k \bar{h}^k_i$$

Podemos nos concentrar somente nas componentes puramente espaciais

- Expansão multipolar

- Expansão multipolar

Já conhecemos a solução da equação de onda em termos de potenciais retardados

$$\bar{h}_{ij} \approx \frac{4G}{c^4 r} \int T_{ij}(x', t_r) d^3 x'$$

- Expansão multipolar

Já conhecemos a solução da equação de onda em termos de potenciais retardados

$$\bar{h}_{ij} \approx \frac{4G}{c^4 r} \int T_{ij}(x', t_r) d^3 x'$$

Manipulando a equação de conservação do tensor de energia e momento

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

- Expansão multipolar

Já conhecemos a solução da equação de onda em termos de potenciais retardados

$$\bar{h}_{ij} \approx \frac{4G}{c^4 r} \int T_{ij}(x', t_r) d^3 x'$$

Manipulando a equação de conservação do tensor de energia e momento

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad \begin{cases} \frac{1}{c} \partial_t T^{00} + \partial_k T^{k0} = 0 \\ \frac{1}{c} \partial_t T^{0i} + \partial_k T^{ki} = 0 \end{cases}$$

- Expansão multipolar

Já conhecemos a solução da equação de onda em termos de potenciais retardados

$$\bar{h}_{ij} \approx \frac{4G}{c^4 r} \int T_{ij}(x', t_r) d^3 x'$$

Manipulando a equação de conservação do tensor de energia e momento

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \begin{cases} \rightarrow \frac{1}{c} \partial_t T^{00} + \partial_k T^{k0} = 0 \\ \rightarrow \frac{1}{c} \partial_t T^{0i} + \partial_k T^{ki} = 0 \end{cases} \rightarrow \frac{1}{c^2} \partial_t^2 T^{0i} = \partial_{ki} T^{ki}$$

- Expansão multipolar

Já conhecemos a solução da equação de onda em termos de potenciais retardados

$$\bar{h}_{ij} \approx \frac{4G}{c^4 r} \int T_{ij}(x', t_r) d^3 x'$$

Manipulando a equação de conservação do tensor de energia e momento

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \begin{cases} \rightarrow \frac{1}{c} \partial_t T^{00} + \partial_k T^{k0} = 0 \\ \rightarrow \frac{1}{c} \partial_t T^{0i} + \partial_k T^{ki} = 0 \end{cases} \rightarrow \frac{1}{c^2} \partial_t^2 T^{0i} = \partial_{ki} T^{ki}$$

note que

$$x^j x^l \partial_{ki} T^{ki} = \partial_{ki} (x^j x^l T^{ki}) - 2 \partial_k (x^j T^{lk} + x^l T^{jk}) + 2 T^{jl}$$

- Expansão multipolar

Já conhecemos a solução da equação de onda em termos de potenciais retardados

$$\bar{h}_{ij} \approx \frac{4G}{c^4 r} \int T_{ij}(x', t_r) d^3 x'$$

Manipulando a equação de conservação do tensor de energia e momento

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \begin{cases} \rightarrow \frac{1}{c} \partial_t T^{00} + \partial_k T^{k0} = 0 \\ \rightarrow \frac{1}{c} \partial_t T^{0i} + \partial_k T^{ki} = 0 \end{cases} \rightarrow \frac{1}{c^2} \partial_t^2 T^{0i} = \partial_{ki} T^{ki}$$

note que

$$x^j x^l \partial_{ki} T^{ki} = \partial_{ki} (x^j x^l T^{ki}) - 2 \partial_k (x^j T^{lk} + x^l T^{jk}) + 2 T^{jl}$$

Substituindo na solução acima (descartando divergências totais)

$$\bar{h}_{ij} \approx \frac{2G}{c^4 r} \int x'^i x'^j \partial'_{kl} T^{kl}(x', t_r) d^3 x' = \frac{2G}{c^6 r} \frac{d^2}{dt^2} \int x'^i x'^j T^{00}(x', t_r) d^3 x'$$

- Expansão multipolar

- Expansão multipolar

Podemos escrever $T^{00} = \rho c^2 \longrightarrow$ densidade de matéria/energia

$$\bar{h}_{ij} \approx \frac{2G}{c^4 r} \frac{d^2}{dt^2} \int \rho(x', t_r) x'^i x'^j d^3 x' = \frac{2G}{c^4 r} \frac{d^2 I_{ij}}{dt^2}$$

$I_{ij} = \int \rho(x', t_r) x'^i x'^j d^3 x' \longrightarrow$ momento de quadrupolo da distribuição de matéria/energia

- Expansão multipolar

Podemos escrever $T^{00} = \rho c^2 \longrightarrow$ densidade de matéria/energia

$$\bar{h}_{ij} \approx \frac{2G}{c^4 r} \frac{d^2}{dt^2} \int \rho(x', t_r) x'^i x'^j d^3 x' = \frac{2G}{c^4 r} \frac{d^2 I_{ij}}{dt^2}$$

$I_{ij} = \int \rho(x', t_r) x'^i x'^j d^3 x' \longrightarrow$ momento de quadrupolo da distribuição de matéria/energia

Contrário ao eletromagnetismo, o termo dominante na radiação gravitacional é o quadrupolo, e não o dipolo.

EM $\longrightarrow$ Conservação da carga $\longrightarrow$ dipolo

RG $\longrightarrow$ Conservação da massa/momento $\longrightarrow$ quadrupolo

- Momento de quadrupolo irreductível

A solução anterior não está no calibre TT.

Mas os graus de liberdade são representados pela parte transversa e sem traço da métrica.

$$h_{ij}^{TT} \approx \frac{2G}{c^4 r} \frac{d^2 \mathcal{I}_{ij}}{dt^2} \longrightarrow \mathcal{I}_{ij} = \int \rho(x') \left(x'_i x'_j - \frac{r'^2}{3} \delta_{ij} \right) d^3 x'$$

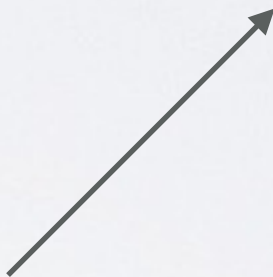
- Momento de quadrupolo irreductível

A solução anterior não está no calibre TT.

Mas os graus de liberdade são representados pela parte transversa e sem traço da métrica.

$$h_{ij}^{TT} \approx \frac{2G}{c^4 r} \frac{d^2 \mathcal{I}_{ij}}{dt^2} \longrightarrow \mathcal{I}_{ij} = \int \rho(x') \left(x'_i x'_j - \frac{r'^2}{3} \delta_{ij} \right) d^3 x'$$

Momento de quadrupolo irreductível



- Momento de quadrupolo irreductível

A solução anterior não está no calibre TT.

Mas os graus de liberdade são representados pela parte transversa e sem traço da métrica.

$$h_{ij}^{TT} \approx \frac{2G}{c^4 r} \frac{d^2 \mathcal{I}_{ij}}{dt^2} \longrightarrow \mathcal{I}_{ij} = \int \rho(x') \left(x'_i x'_j - \frac{r'^2}{3} \delta_{ij} \right) d^3 x'$$

Momento de quadrupolo irreductível

Esse é o termo da fonte que fundamentalmente gera as ondas gravitacionais lineares

ROTEIRO DAS AULAS

♦ Aula 1

- Introdução
- Revisão do Eletromagnetismo

♦ Aula 2

- Relatividade Geral e Ondas Gravitacionais

♦ **Aula 3**

- **Energia e Momento das Ondas Gravitacionais**
- **Pulsar Binário e a Primeira Evidência Indireta de Ondas Gravitacionais**
- **A Busca Pela Detecção Direta de Ondas Gravitacionais**

- Energia das ondas gravitacionais

Não é possível, na RG, definir um tensor que represente a energia e momento do campo gravitacional.

- Energia das ondas gravitacionais

Não é possível, na RG, definir um tensor que represente a energia e momento do campo gravitacional.

↳ Porque a gravidade pode ser sempre anulada localmente

- Energia das ondas gravitacionais

Não é possível, na RG, definir um tensor que represente a energia e momento do campo gravitacional.

↳ Porque a gravidade pode ser sempre anulada localmente

Mas no regime aproximativo podemos construir uma quantidade que represente a energia das ondas gravitacionais. Recapitulando,

com
$$g_{ab} = g_{ab}^{(0)} + \epsilon g_{ab}^{(1)} + \epsilon^2 g_{ab}^{(2)} + \dots$$

obtemos para o tensor de Einstein,

$$G_{ab} = G_{ab}^{(0)}[g_{ab}^{(0)}] + \epsilon G_{ab}^{(1)}[g_{ab}^{(1)}; g_{ab}^{(0)}] + \epsilon^2 G_{ab}^{(1)}[g_{ab}^{(2)}; g_{ab}^{(0)}] + \epsilon^2 G_{ab}^{(2)}[g_{ab}^{(1)}; g_{ab}^{(0)}] + \dots$$

- Energia das ondas gravitacionais

Quando usamos as equações de Einstein no vácuo obtemos para a ordem zero e primeira ordem,

$$G_{ab}^{(0)}[g_{ab}^{(0)}] = 0; \quad G_{ab}^{(1)}[g_{ab}^{(1)}; g_{ab}^{(0)}] = 0.$$

- Energia das ondas gravitacionais

Quando usamos as equações de Einstein no vácuo obtemos para a ordem zero e primeira ordem,

$$G_{ab}^{(0)}[g_{ab}^{(0)}] = 0; \quad G_{ab}^{(1)}[g_{ab}^{(1)}; g_{ab}^{(0)}] = 0.$$

Dinâmica do fundo



- Energia das ondas gravitacionais

Quando usamos as equações de Einstein no vácuo obtemos para a ordem zero e primeira ordem,

$$G_{ab}^{(0)}[g_{ab}^{(0)}] = 0; \quad G_{ab}^{(1)}[g_{ab}^{(1)}; g_{ab}^{(0)}] = 0.$$

Dinâmica do fundo



Dinâmica das perturbações de 1ª ordem
Ondas gravitacionais lineares



- Energia das ondas gravitacionais

Quando usamos as equações de Einstein no vácuo obtemos para a ordem zero e primeira ordem,

$$G_{ab}^{(0)}[g_{ab}^{(0)}] = 0; \quad G_{ab}^{(1)}[g_{ab}^{(1)}; g_{ab}^{(0)}] = 0. \longrightarrow \square h_{\mu\nu} = 0$$

Dinâmica do fundo

Dinâmica das perturbações de 1ª ordem
Ondas gravitacionais lineares

- Energia das ondas gravitacionais

Quando usamos as equações de Einstein no vácuo obtemos para a ordem zero e primeira ordem,

$$G_{ab}^{(0)}[g_{ab}^{(0)}] = 0; \quad G_{ab}^{(1)}[g_{ab}^{(1)}; g_{ab}^{(0)}] = 0. \longrightarrow \square h_{\mu\nu} = 0$$

Dinâmica do fundo

Dinâmica das perturbações de 1ª ordem
Ondas gravitacionais lineares

e para a segunda ordem,

$$G_{ab}^{(1)}[g_{ab}^{(2)}; g_{ab}^{(0)}] = -G_{ab}^{(2)}[g_{ab}^{(1)}; g_{ab}^{(0)}]$$

- Energia das ondas gravitacionais

Quando usamos as equações de Einstein no vácuo obtemos para a ordem zero e primeira ordem,

$$G_{ab}^{(0)}[g_{ab}^{(0)}] = 0; \quad G_{ab}^{(1)}[g_{ab}^{(1)}; g_{ab}^{(0)}] = 0. \longrightarrow \square h_{\mu\nu} = 0$$

Dinâmica do fundo

Dinâmica das perturbações de 1ª ordem
Ondas gravitacionais lineares

e para a segunda ordem,

$$G_{ab}^{(1)}[g_{ab}^{(2)}; g_{ab}^{(0)}] = -G_{ab}^{(2)}[g_{ab}^{(1)}; g_{ab}^{(0)}]$$

Dinâmica das perturbações
de 2ª ordem

- Energia das ondas gravitacionais

Quando usamos as equações de Einstein no vácuo obtemos para a ordem zero e primeira ordem,

$$G_{ab}^{(0)}[g_{ab}^{(0)}] = 0; \quad G_{ab}^{(1)}[g_{ab}^{(1)}; g_{ab}^{(0)}] = 0. \longrightarrow \square h_{\mu\nu} = 0$$

Dinâmica do fundo

Dinâmica das perturbações de 1ª ordem
Ondas gravitacionais lineares

e para a segunda ordem,

$$G_{ab}^{(1)}[g_{ab}^{(2)}; g_{ab}^{(0)}] = -G_{ab}^{(2)}[g_{ab}^{(1)}; g_{ab}^{(0)}]$$

Dinâmica das perturbações
de 2ª ordem

Fonte para as perturbações
de 2ª ordem

- Energia das ondas gravitacionais

Quando usamos as equações de Einstein no vácuo obtemos para a ordem zero e primeira ordem,

$$G_{ab}^{(0)}[g_{ab}^{(0)}] = 0; \quad G_{ab}^{(1)}[g_{ab}^{(1)}; g_{ab}^{(0)}] = 0. \longrightarrow \square h_{\mu\nu} = 0$$

Dinâmica do fundo

Dinâmica das perturbações de 1ª ordem
Ondas gravitacionais lineares

e para a segunda ordem,

$$G_{ab}^{(1)}[g_{ab}^{(2)}; g_{ab}^{(0)}] = -G_{ab}^{(2)}[g_{ab}^{(1)}; g_{ab}^{(0)}] \longrightarrow \frac{8\pi G}{c^4} t_{\mu\nu}^{eff}$$

Dinâmica das perturbações
de 2ª ordem

Fonte para as perturbações
de 2ª ordem

- Energia das ondas gravitacionais

Portanto, devemos calcular o tensor de Einstein de segunda ordem para obter um tensor de energia e momento das ondas lineares.

No entanto, o resultado deve ser invariante de calibre. Para isso, é necessário tomar um valor médio sobre uma região muito maior que o comprimento de onda da radiação.

Esse processo é simples mas trabalhoso. Veja seus detalhes no livro do *T. Padmanabhan, Gravitation*, seção 9.5.

O resultado será

$$t_{\mu\nu}^{eff} = \frac{c^4}{32\pi G} \langle \partial_\mu h_{ij}^{TT} \partial_\nu h_{TT}^{ij} \rangle$$

- Potência irradiada

- Potência irradiada

Podemos calcular também a energia emitida por uma fonte com um dado momento de quadrupolo;

- Potência irradiada

Podemos calcular também a energia emitida por uma fonte com um dado momento de quadrupolo;

Calcula-se o fluxo de energia passando por uma superfície esférica por unidade de tempo

$$\frac{dE}{dt} = \int ct_{00}^{eff} r^2 d\Omega$$

- Potência irradiada

Podemos calcular também a energia emitida por uma fonte com um dado momento de quadrupolo;

Calcula-se o fluxo de energia passando por uma superfície esférica por unidade de tempo

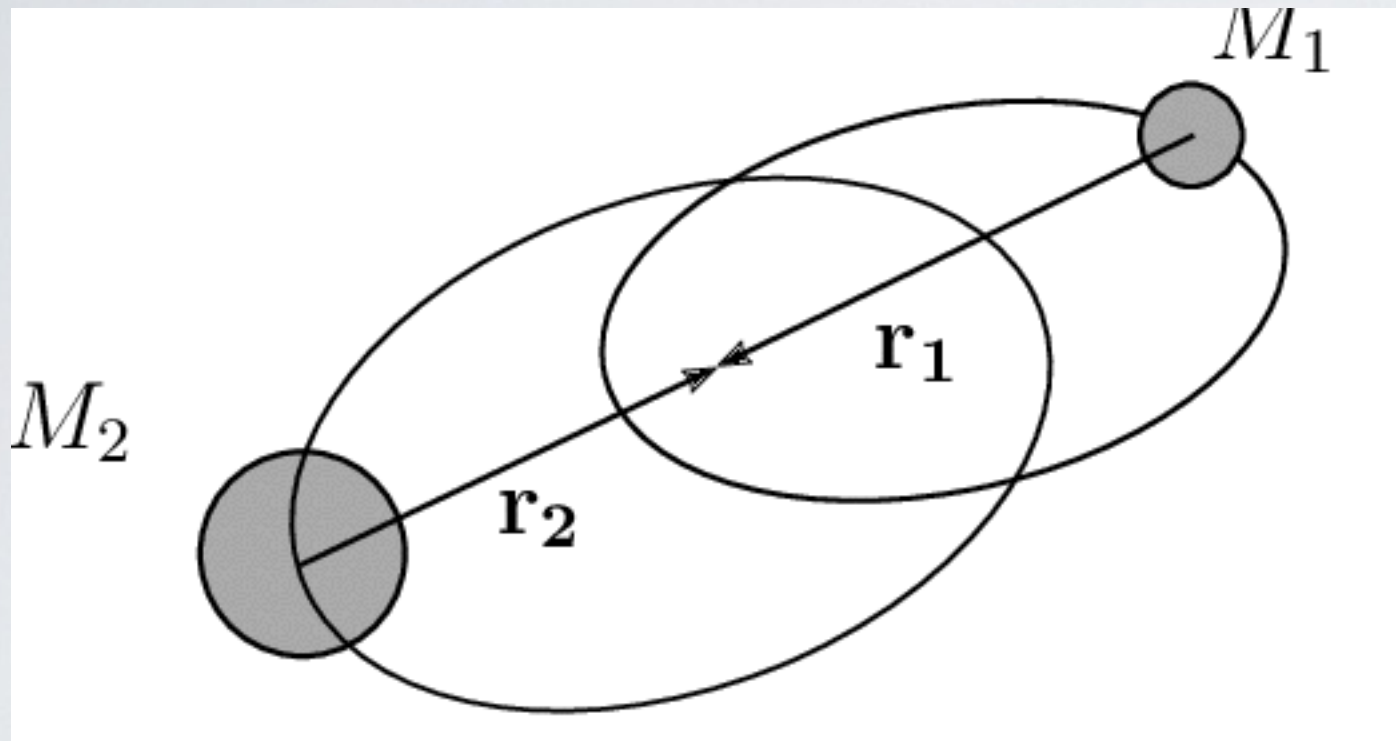
$$\frac{dE}{dt} = \int ct_{00}^{eff} r^2 d\Omega$$

Usando os resultados anteriores, teremos

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{G}{5c^5} \frac{d^3 \mathcal{I}_{ij}}{dt^3} \frac{d^3 \mathcal{I}^{ij}}{dt^3}$$

- Aplicação: Sistema binário

Em primeira ordem, as orbitas são elípticas e classificadas pelo semi-eixo maior e a excentricidade

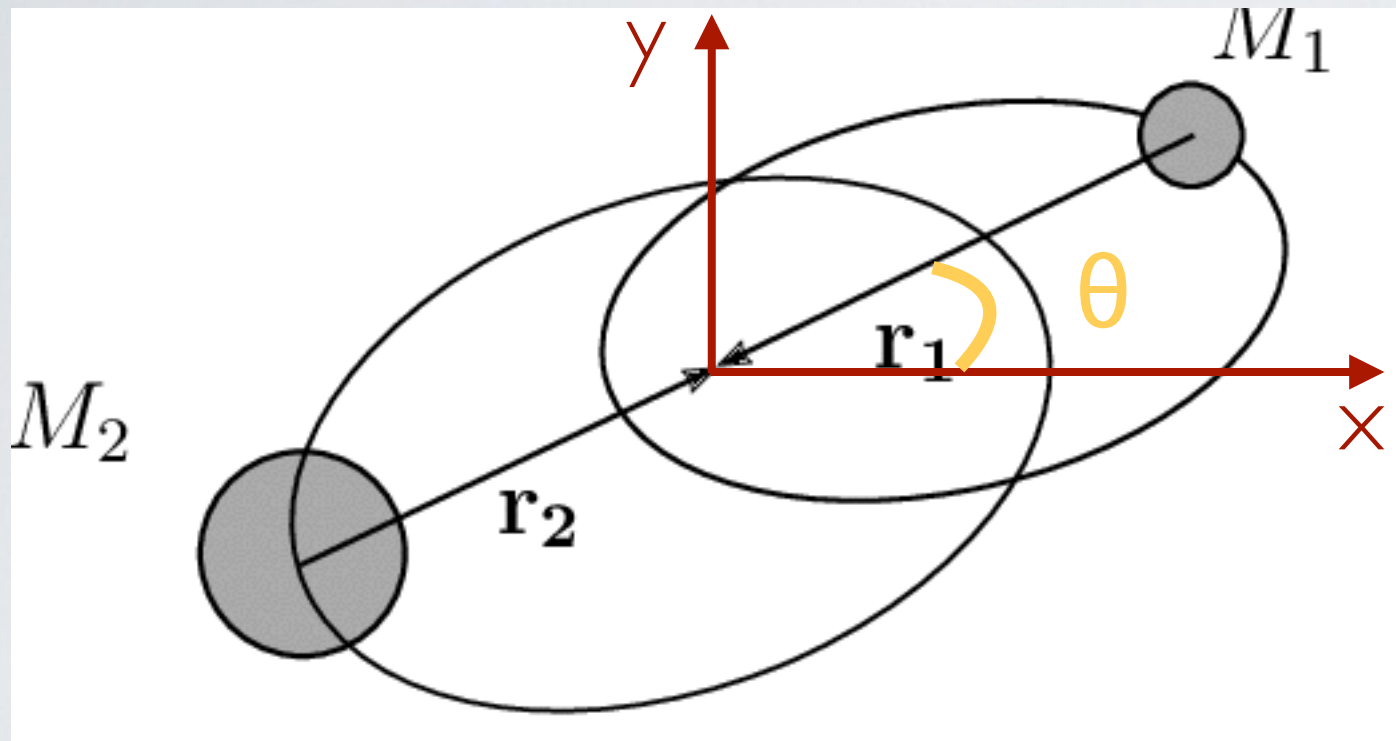


$$a = -\frac{m_1 m_2}{2E};$$

$$e^2 = 1 + \frac{2EL^2(m_1 + m_2)}{m_1^3 m_2^3}.$$

- Aplicação: Sistema binário

Em primeira ordem, as órbitas são elípticas e classificadas pelo semi-eixo maior e a excentricidade



$$a = -\frac{m_1 m_2}{2E};$$

$$e^2 = 1 + \frac{2EL^2(m_1 + m_2)}{m_1^3 m_2^3}.$$

Suponha que as órbitas estão no plano x-y

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}$$

$$r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} r$$

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r$$

- Aplicação: Sistema binário

A variação temporal do raio e do ângulo também são conhecidas

$$\dot{\theta} = \frac{[(m_1 + m_2)a(1 - e^2)]^{1/2}}{r^2}; \quad \dot{r} = e \sin \theta \left[\frac{m_1 + m_2}{a(1 - e^2)} \right]^{1/2}$$

- Aplicação: Sistema binário

A variação temporal do raio e do ângulo também são conhecidas

$$\dot{\theta} = \frac{[(m_1 + m_2)a(1 - e^2)]^{1/2}}{r^2}; \quad \dot{r} = e \sin \theta \left[\frac{m_1 + m_2}{a(1 - e^2)} \right]^{1/2}$$

Com isso podemos calcular o momento de quadrupolo

$$\begin{aligned} \ddot{I}_{xx} &= \frac{2m_1m_2}{a(1 - e^2)} (2 \sin 2\theta + 3e \cos^2 \theta \sin \theta) \dot{\theta} \\ \ddot{I}_{yy} &= -\frac{2m_1m_2}{a(1 - e^2)} (2 \sin 2\theta + e \sin \theta + 3e \cos^2 \theta \sin \theta) \dot{\theta} \\ \ddot{I}_{xy} &= -\frac{2m_1m_2}{a(1 - e^2)} (2 \cos 2\theta - e \cos \theta + 3e \cos^3 \theta) \dot{\theta}. \end{aligned}$$

- Aplicação: Sistema binário

Por fim, obtemos a energia média emitida em um período orbital

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dE}{dt} dt = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \frac{dE}{dt} \frac{1}{\dot{\theta}} d\theta \\ &= -\frac{32G^4}{5c^5} \frac{m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{a^5 (1 - e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right).\end{aligned}$$

- Aplicação: Sistema binário

Por fim, obtemos a energia média emitida em um período orbital

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dE}{dt} dt = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \frac{dE}{dt} \frac{1}{\dot{\theta}} d\theta \\ &= -\frac{32G^4}{5c^5} \frac{m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{a^5 (1 - e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right) \end{aligned}$$

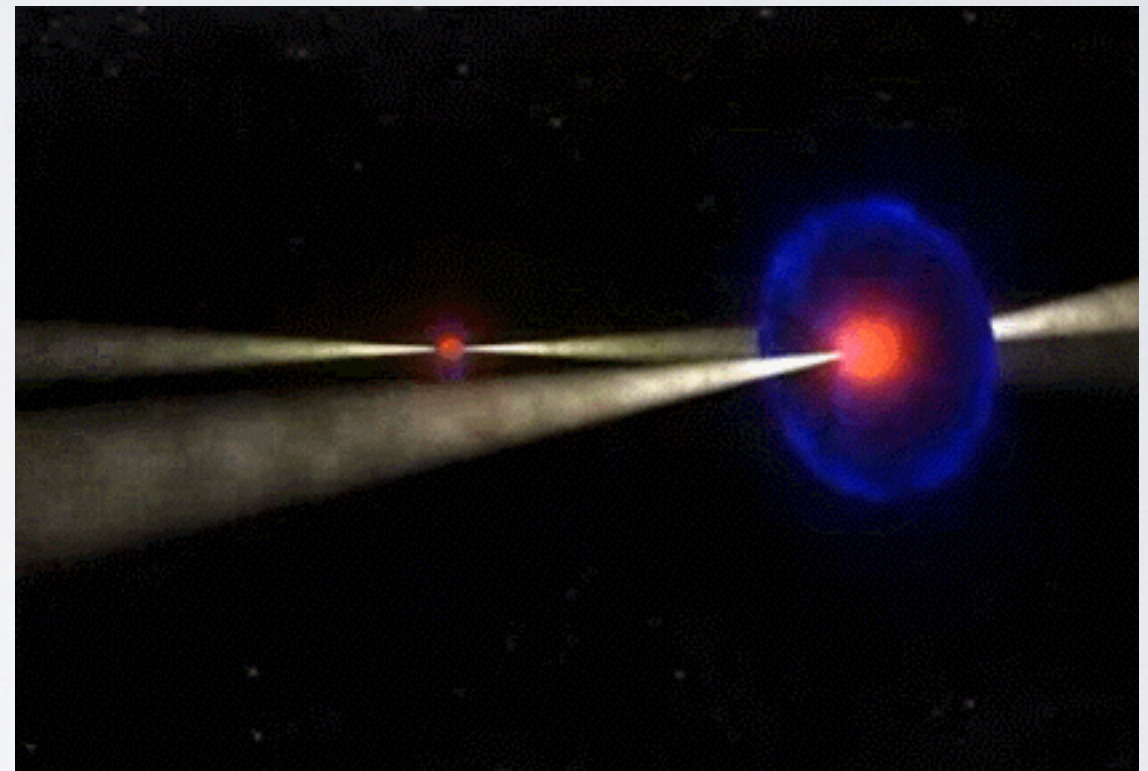
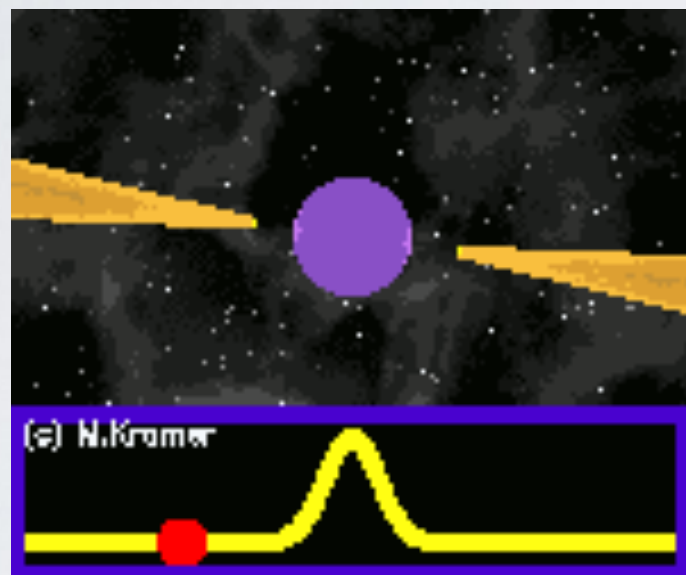
Essa perda de energia causa uma variação no período orbital do sistema.

$$\dot{T} = -\frac{192\pi}{5} \frac{G^{5/3} m_1 m_2 f(e)}{c^5 (m_1 + m_2)^{1/3}} \left(\frac{2\pi}{T} \right)^{5/3}$$

$$f(e) \equiv \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right) (1 - e^2)^{-7/2}$$

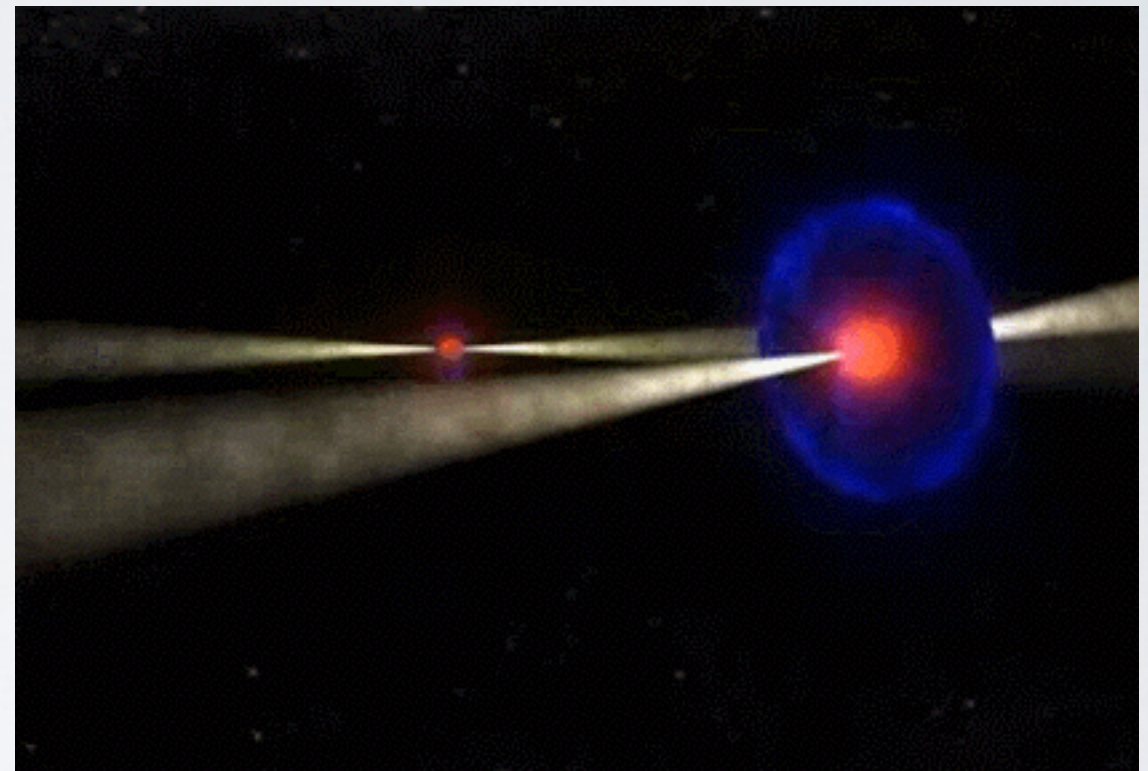
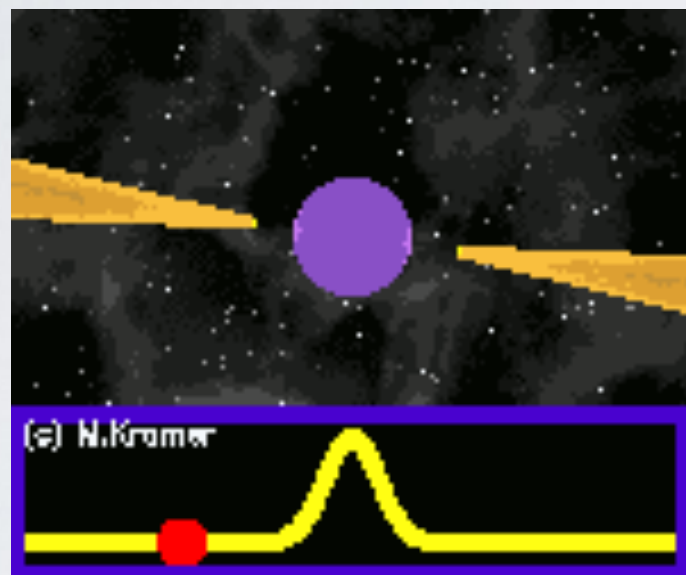
- Observação: Pulsar binário PSR B1913+16

Os resultados anteriores podem ser aplicados para a análise de do pulsar binário de Hulse and Taylor.



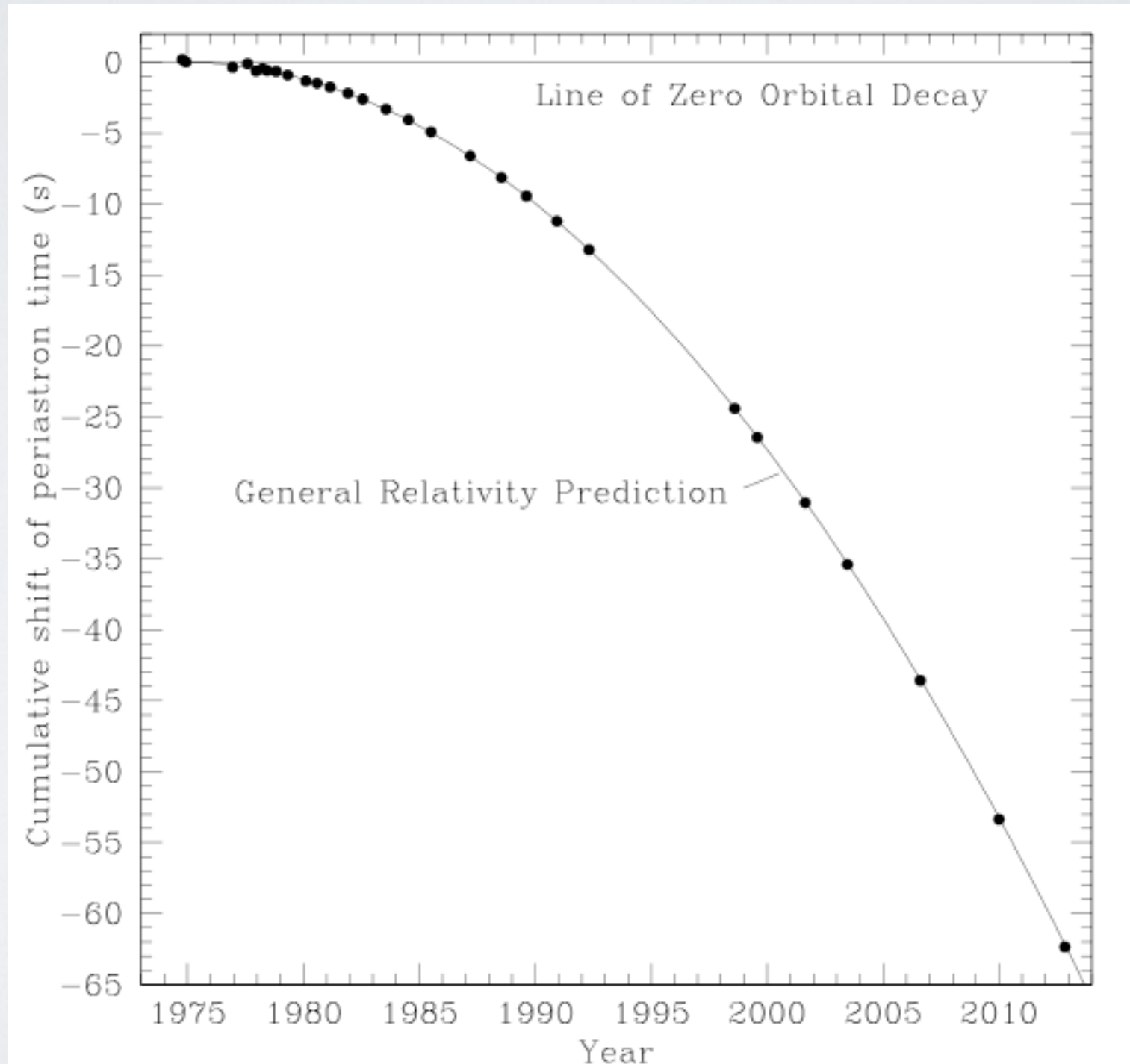
- Observação: Pulsar binário PSR B1913+16

Os resultados anteriores podem ser aplicados para a análise de do pulsar binário de Hulse and Taylor.



- Observação: Pulsar binário PSR B1913+16

Os resultados anteriores podem ser aplicados para a análise de do pulsar binário de Hulse and Taylor.



- Observação: Pulsar binário PSR B1913+16

Table 3
Comparison of Gravitational Radiation-Induced Orbital Decay
with GR Prediction in Binary Pulsars

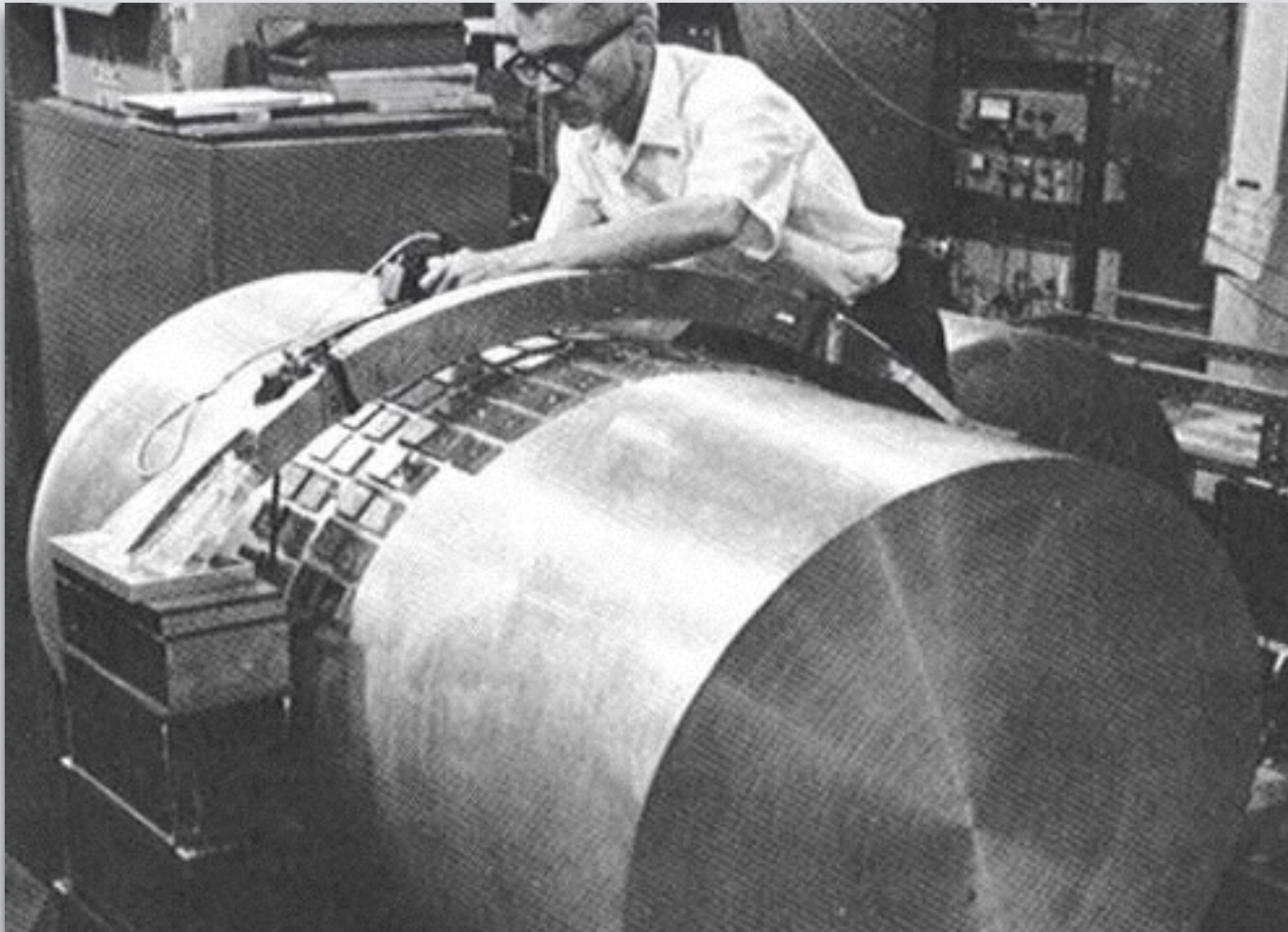
PSR	$\dot{P}_b^{\text{intr}} / \dot{P}_b^{\text{GR}}$	Ref.
J0348+0432	1.05 ± 0.18	Antoniadis et al. (2013)
J0737-3039	1.003 ± 0.014	Kramer et al. (2006)
J1141-6545	1.04 ± 0.06	Bhat, Bailes, & Verbiest (2008)
B1534+12	0.91 ± 0.06	Stairs et al. (2002)
J1738+0333	0.94 ± 0.13	Freire et al. (2012)
J1756-2251	1.08 ± 0.03	Ferdman et al. (2014)
J1906+0746	1.01 ± 0.05^a	van Leeuwen et al. (2015)
B1913+16	0.9983 ± 0.0016	This work
B2127+11C	1.00 ± 0.03	Jacoby et al. (2006)

^a Assumes negligible proper motion.



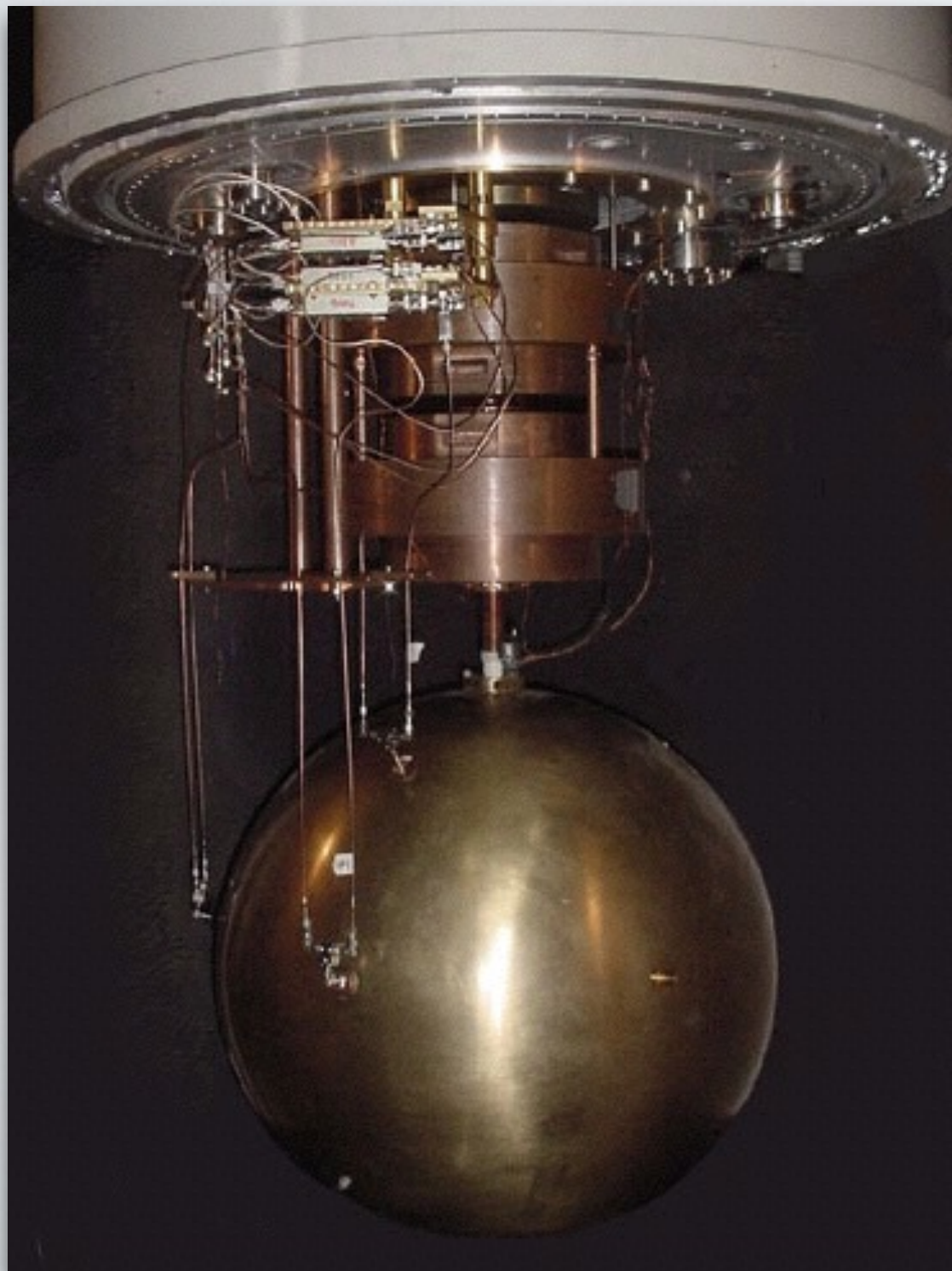
- Detecção direta de ondas gravitacionais

A procura por ondas gravitacionais começa na década de 1960, com o trabalho pioneiro de Weber.



- Detecção direta de ondas gravitacionais

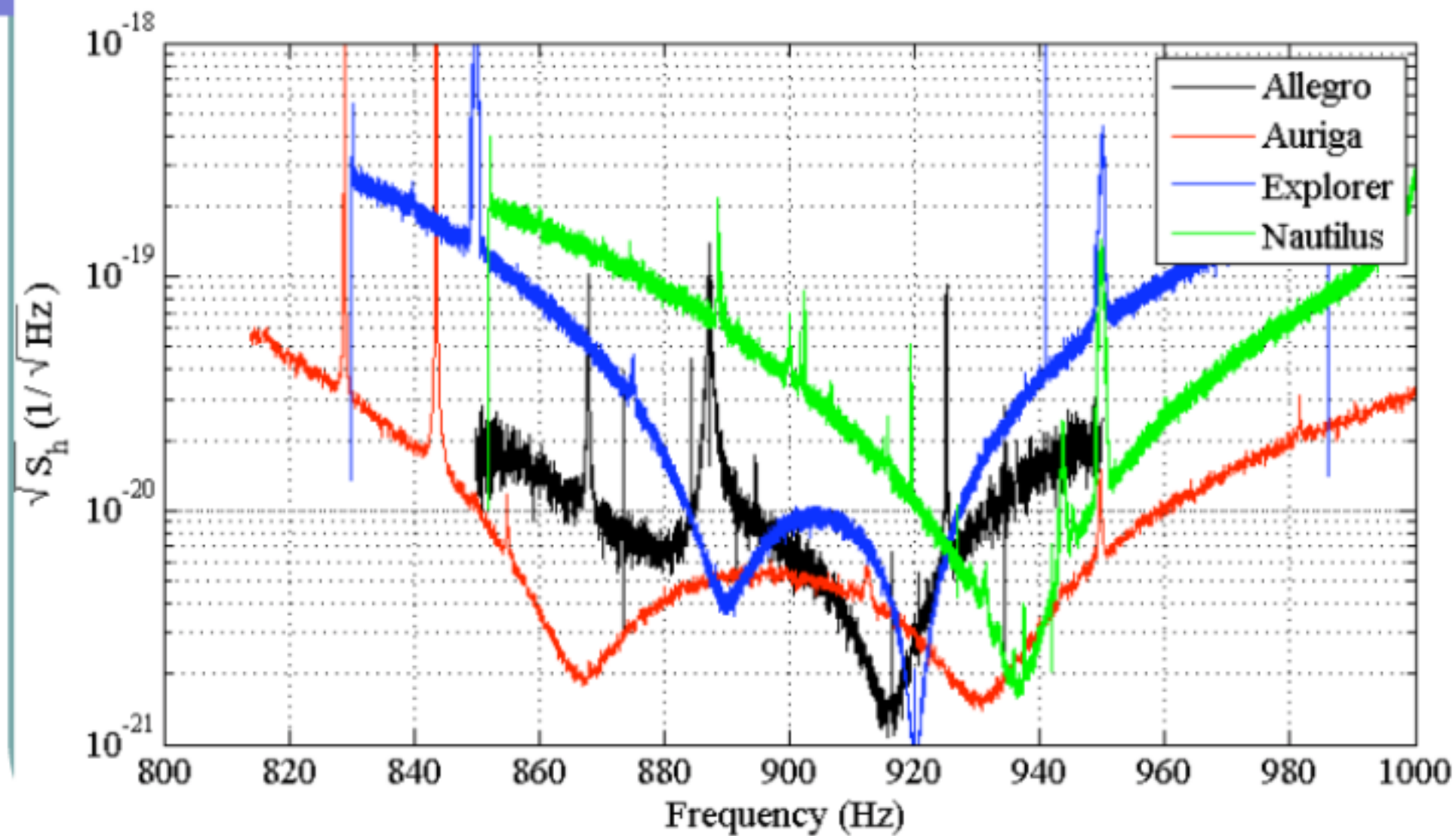
Antena Mario Schenberg - SP/Brasil



Modelo mais atual, que opera em baixíssimas temperaturas;

Sensibilidade ainda baixa para eventos típicos de ondas gravitacionais

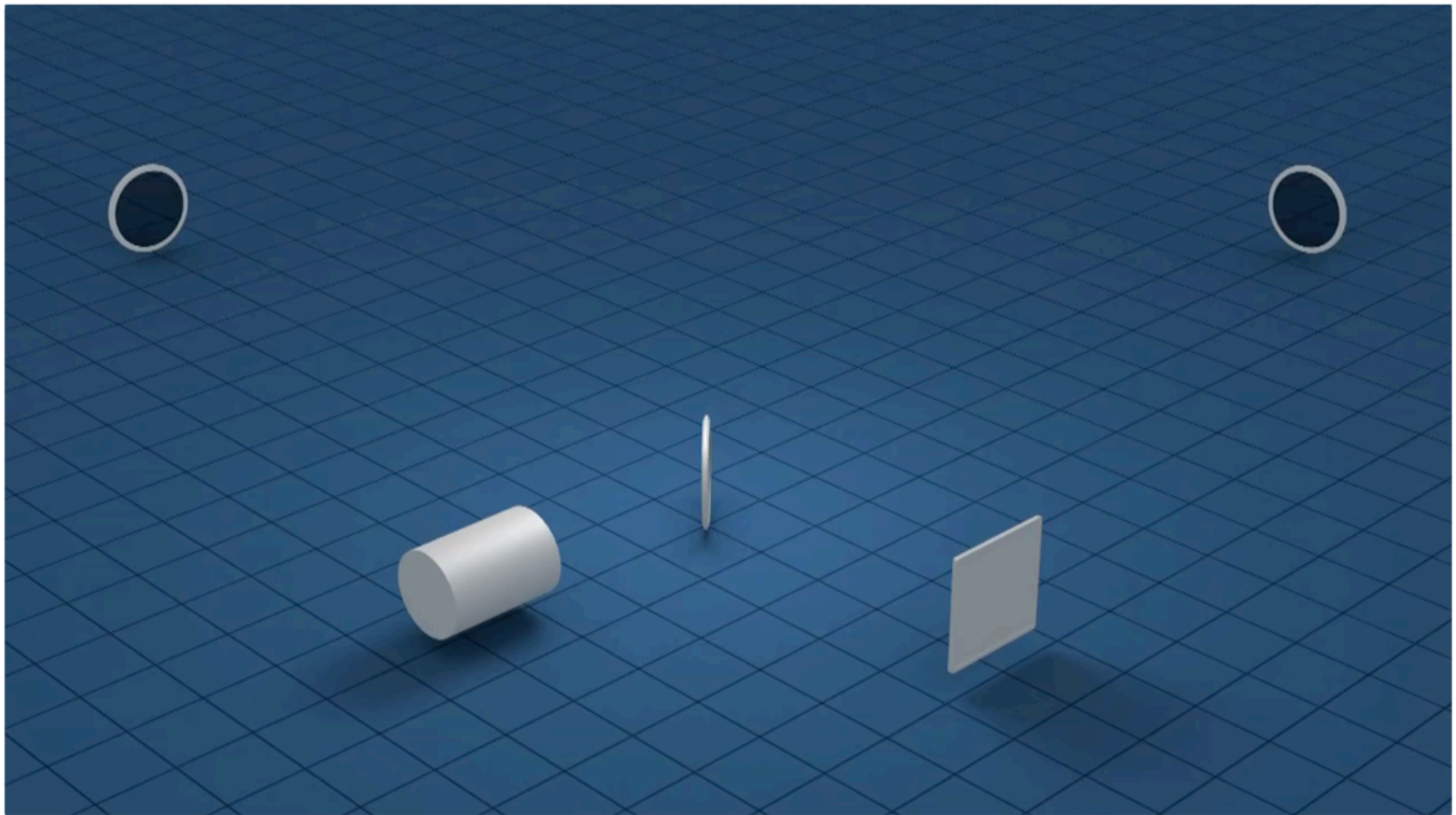
Sensitivity of Resonant Detectors



credit: Kostas Kokkotas

- Detecção direta de ondas gravitacionais

Interferômetros



- Detecção direta de ondas gravitacionais

Interferômetros

