

INSTABILIDADE GRAVITACIONAL NA TEORIA NEWTONIANA

Laura P. de Carvalho e Oliver F. Piattella

Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Espírito Santo

Introdução

Este trabalho aborda a instabilidade gravitacional e o processo de formação de estruturas na teoria newtoniana. Num primeiro momento, faremos uma aproximação linear para pequenas perturbações na densidade de matéria de um universo estático, utilizando a Teoria de Jeans. Em seguida, incorporaremos efeitos da expansão do universo e da presença de radiação e energia escura em sua composição. Por último, analisaremos o modelo de Zel'dovich para uma descrição não linear desse processo.

Equações fundamentais

Em largas escalas, o universo pode ser aproximado por um fluido ideal, caracterizado por sua densidade ρ , seu campo de velocidades $\mathbf{v}$ e sua pressão p . Como qualquer fluido ideal, o universo deve obedecer às equações da hidrodinâmica: a equação da continuidade, de Euler e de Poisson.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{\nabla p}{\rho} + \nabla \phi = 0, \quad (2)$$

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho. \quad (3)$$

Nosso objetivo será perturbar essas três equações em cada um dos regimes de estudos.

Teoria de Jeans

No modelo de Jeans, o plano de fundo é um universo estático. Mesmo não sendo o modelo mais realista, este é útil para determinar quais tipos de perturbações podem existir em um meio homogêneo e isotrópico e introduzir métodos para analisá-los em outros modelos. Adicionando um termo de perturbação a cada componente das equações fundamentais e mantendo apenas termos lineares de perturbações, encontramos

$$\frac{\partial^2 \delta \rho}{\partial t^2} - c_s^2 \nabla^2 \delta \rho - 4\pi G \rho_0 \delta \rho = 0. \quad (4)$$

Fazendo a transformada de Fourier de $\delta \rho(t)$,

$$\delta \dot{\rho}_{\mathbf{k}}(t) + (c_s^2 k^2 - 4\pi G \rho_0) \delta \rho_{\mathbf{k}}(t) = 0 \quad (5)$$

e definindo

$$\omega(k) = \sqrt{c_s^2 k^2 - 4\pi G \rho_0}, \quad (6)$$

a solução é

$$\delta \rho_{\mathbf{k}}(t) \propto e^{\pm i \omega(k) t}. \quad (7)$$

O comprimento de onda de Jeans

$$\lambda_J = \frac{2\pi}{k_J} = c_s \sqrt{\frac{\pi}{G \rho_0}}, \quad (8)$$

separa duas situações fisicamente distintas: $\lambda < \lambda_J$, a solução é uma solução de onda, já para $\lambda > \lambda_J$, as perturbações evoluem de maneira exponencial.

Os efeitos da expansão do universo, da radiação e da constante cosmológica

Baseando-nos na Teoria de Jeans, incorporaremos aqui alguns efeitos ainda não considerados: primeiro a expansão do universo e em seguida a influência da radiação e da constante cosmológica em sua estrutura. Para adicionarmos nos cálculos a expansão do universo, utilizaremos as coordenadas comóveis $\mathbf{q}$, as quais podemos relacionar às coordenadas usuais $\mathbf{x}$ por meio de

$$\mathbf{x} = a(t) \mathbf{q}, \quad (9)$$

onde $a(t)$ é denominado fator de escala. Aplicando as perturbações e definindo o contraste $\delta \equiv \frac{\delta \rho}{\rho_0}$, encontramos, em termos das coordenadas comóveis, em aproximação

linear, a equação

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - \frac{c_s^2}{a^2} \nabla^2 \delta - 4\pi G \rho_0 \delta = 0, \quad (10)$$

com H dado pela equação de Friedmann

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{4\pi G \rho_0}{3}. \quad (11)$$

Essa é a equação que descreve a instabilidade gravitacional, em aproximação linear, em um universo que se expande. No limite de largas escalas, podemos escrever

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - 4\pi G \rho_0 \delta = 0, \quad (12)$$

que, para um universo dominado pela matéria, com $a \propto t^{2/3}$ e $H = 2/3t$, tem como solução

$$\delta = C_1 t^{2/3} + C_2 t^{-1}. \quad (13)$$

Comparando com o resultado da Teoria de Jeans, que é exponencial, percebemos que para um universo em expansão a instabilidade gravitacional é muito menos eficiente. Para incorporarmos os fluidos relativísticos, utilizaremos resultados da RG. Nesse caso, a equação de Friedmann é

$$H^2 = \frac{8\pi G \rho_{eq}}{6} \left(\left(\frac{a_{eq}}{a} \right)^3 + \left(\frac{a_{eq}}{a} \right)^{3(1+\omega)} \right), \quad (14)$$

onde a_{eq} é o fator de escala em no momento em que ambos os componentes possuíam a mesma densidade ρ_{eq} . Definindo $\alpha \equiv \frac{a}{a_{eq}}$, podemos reescrever a evolução das perturbações como

$$\alpha^2(1+\alpha^{-3\omega}) \frac{d^2 \delta}{d\alpha^2} + \frac{3}{2} \alpha(1+(1-\omega)\alpha^{-3\omega}) \frac{d\delta}{d\alpha} - \frac{3}{2} \delta = 0. \quad (15)$$

Para a constante cosmológica, $\omega = -1$ e podemos encontrar a solução para dois momentos diferentes: quando $\alpha \ll 1$ (universo é dominado pela poeira)

$$\delta(\alpha) = C_1 \alpha^{-3/2} + \frac{2}{5} C_2 \alpha + \mathcal{O}(\alpha^{3/2}), \quad (16)$$

agora, para $\alpha \gg 1$, quando a constante cosmológica domina,

$$\delta(\alpha) = (C_1 + I C_2) - \frac{1}{2} C_2 \alpha^{-2} + \mathcal{O}(\alpha^{-3}). \quad (17)$$

Ou seja, quando a constante cosmológica ultrapassa a densidade de matéria, o crescimento cessa e δ é congelada. Fazendo um processo análogo para a radiação, $\left(\omega = \frac{1}{3} \right)$, quando $\alpha \ll 1$, no período de dominação da radiação,

$$\delta(\alpha) = (C_1 - 3C_2) - C_2 \ln \left(\frac{\alpha}{4} \right) + \mathcal{O}(\alpha), \quad (18)$$

e quando a matéria domina, $\alpha \gg 1$ e

$$\delta(\alpha) = C_1 \left(1 + \frac{3}{2} \alpha \right) + \frac{4}{15} C_2 \alpha^{-3/2} + \mathcal{O}(\alpha^{-5/2}). \quad (19)$$

Ou seja, a forte influência da radiação suprime o crescimento das inomogeneidades na poeira, que crescem significativamente apenas no período de dominação da matéria. Esse resultado corrobora a existência de uma outra forma de matéria, não acoplada aos fótons, capaz de se aglomerar antes da matéria bariônica, já que, para explicar as estruturas existentes hoje no universo, seria necessário que as perturbações comessem a crescer ainda no período em que a radiação dominava o universo.

Evolução não linear de estruturas

Enquanto as flutuações na componente de matéria δ são pequenas, isto é, $|\delta| \ll 1$, podemos utilizar os resultados previstos no capítulo anterior. Todavia, quando $\delta \sim 1$, precisamos de novas técnicas para estudar a evolução não linear das perturbações. Para isso, introduziremos uma nova maneira de escrever as equações fundamentais, utilizando o *tensor de deformações*

$$J_k^i(\mathbf{q}, t) \equiv \frac{\partial x^i}{\partial q^k}, \quad (20)$$

e, por meio dele, é possível escrever, respectivamente, a equação da continuidade e uma combinação das equações de Euler e de Poisson como

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{tr}(\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^{-1}) = 0, \quad (21)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\operatorname{tr}(\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^{-1}) \right] + \operatorname{tr} \left[\left(\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^{-1} \right)^2 \right] + 4\pi G \rho = 0. \quad (22)$$

O modelo de Zel'dovich

Este modelo descreve a evolução de uma perturbação que, além de seguir o fluxo de Hubble, pode ter também uma velocidade peculiar própria. Considerando o caso unidimensional, podemos escrever

$$x^i = a(t)(q^i - f^i(q^j, t)), \quad (23)$$

onde f é o termo relacionado às velocidades peculiares. Nesse caso, substituindo

$$\mathbf{J} = a(R, t) \begin{pmatrix} 1 - \lambda(q^1, t) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (24)$$

em (21) e (22), temos, com $\lambda = \frac{\partial f^1}{\partial q^1}$,

$$3H^2(1-\lambda) + 3\dot{H}(1-\lambda) - \ddot{\lambda} - 2H\dot{\lambda} + 4\pi G \rho_0 = 0, \quad (25)$$

que pode ser separada em duas equações independentes para o fundo e para a perturbação

$$H^2 + \dot{H} = -\frac{4\pi G \rho_0}{3}, \quad (26)$$

$$\ddot{\lambda} + 2H\dot{\lambda} - 4\pi G \rho_0 \lambda = 0. \quad (27)$$

A primeira equação é a equação de Friedmann, enquanto a segunda coincide com a (12), com a vantagem de que nessa derivação não houve a hipótese de que se tratavam de perturbações pequenas, ou seja, é possível utilizá-la para o regime não-linear. Assumindo que $\lambda \propto \delta$, da equação da continuidade é possível encontrar o contraste crítico para o colapso que, no caso considerado, é unidimensional e produz uma estrutura bidimensional denominada “panqueca”. Zel'dovich propôs generalizar esse cálculo para o caso tridimensional com

$$\rho(q, t) = \frac{\rho_0(t)}{(1 - \alpha \delta(t))(1 - \beta \delta(t))(1 - \gamma \delta(t))}. \quad (28)$$

Nesse caso, a forma com que a perturbação crescerá depende da relação entre α , β e γ . Nas regiões em que $\alpha \gg \beta, \gamma$, por exemplo, o colapso é unidimensional e produz panquecas, enquanto nos lugares onde $\alpha \sim \beta, \gamma$, é esperado um colapso bidimensional, levando à formação de um filamento unidimensional. Para $\alpha \sim \beta \sim \gamma$, o colapso é aproximadamente esférico. Em largas escalas, o que vemos é uma estrutura de teia cósmica, formada por esses três tipos de colapso. bucher

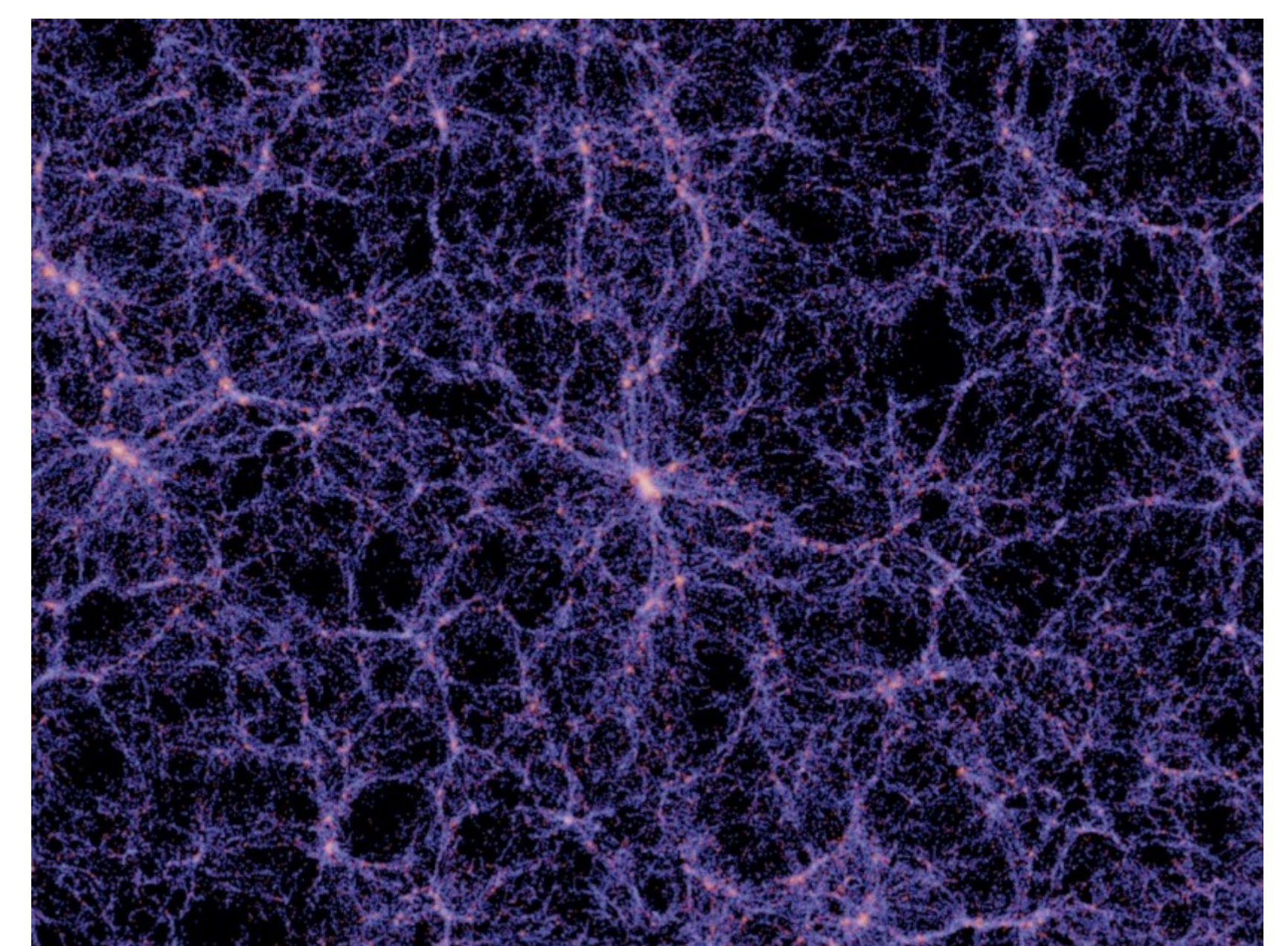


Fig. 1: Estrutura de Teia Cósmica pela simulação Millenium Run.

References

- [1] COLES, Peter; LUCCHIN, Francesco. **Cosmology: The origin and evolution of cosmic structure.** John Wiley & Sons, 2003.
- [2] CROTON, Darren J. et al. The many lives of active galactic nuclei: cooling flows, black holes and the luminosities and colours of galaxies. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 365, n. 1, p. 11-28, 2006.
- [3] LIDDLE, Andrew. **An introduction to modern cosmology.** John Wiley & Sons, 2015.
- [4] MUKHANOV, Viatcheslav. **Physical foundations of cosmology.** Cambridge university press, 2005.