Potencial de Yukawa como um potencial gravitacional

Projeto de IC orientado por Júlio C. Fabris

Vitor Petri Silva

Universidade Federal do Espírito Santo

29/11/2022

Sumário

Termo de Yukawa

Potencial Newtoniano

$$V(r) = -\frac{GMm}{r} \tag{1}$$

Potencial modificado com termo Yukawa

$$V(r) = -\frac{GMm}{r}e^{-br} \tag{2}$$

onde G é a constante gravitacional, M e m são as massas no sistema, r é a separação e b é uma constante com unidade de inverso de distância

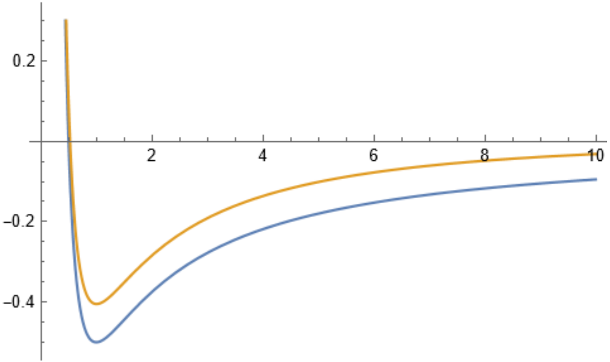

Figura: Comparação entre o potencial Newtoniano (Azul) e o de Yukawa (laranja); Valores de eixo fora de escala.

Força de Yukawa

Pelo fato do potencial ser conservativo, podemos deduzir a função de força pela equação

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V \tag{3}$$

que resulta

$$\vec{F} = -\frac{GMme^{-br}}{r^2}(br+1)\hat{r} \tag{4}$$

Função Trajetória

Igualando a equação da força de Yukawa a 2ª lei de Newton podemos tentar encontrar a função trajetória do objeto que sofre ação dessa força. Essa função será solução da equação diferencial

$$\ddot{r} = -\frac{GMe^{-br}}{r^2}(br+1) + \frac{l^2}{r^3} \tag{5}$$

onde l é o momento angular.

Usando o software Mathematica, foi calculado uma solução numérica que produz o gráfico

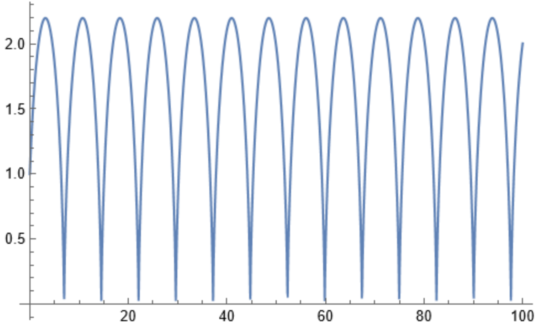

Figura: Posição em função do tempo sobre a força de Yukawa; Valores dos eixos fora de escala

as características desse gráfico ainda estão em análise.

Outra solução é implícita em função do ângulo θ. Transformar $\ddot{r}$ em uma derivação implícita em função do ângulo θ, definindo $dr/d\theta = r'$ temos

$$\ddot{r} = \frac{l^2}{r^2}\left(-\left(\frac{1}{r}\right)''\right) \tag{6}$$

fazendo $u = 1/r$, (4) se torna

$$u'' + u = \frac{GMe^{-b/u}}{l^2}(b/u + 1) \tag{7}$$

A solução implícita ainda está sendo buscada.

Elipse

Outra frente de análise é usando as bem conhecidas soluções para o problema de dois corpos, da mecânica celeste [4], as leis de Kepler e as relações geométricas da elipse.

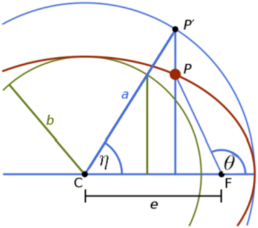

Figura: Diferença entre anomalia média η e anomalia verdadeira θ. A curva vermelha é o movimento do corpo celeste e a curva azul é o circulo teórico que circunda o movimento elíptico

A equação paramétrica da elipse é dada por

$$\frac{r}{a} = 1 - eCos(\eta) \tag{8}$$

A solução da equação da conservação de energia Newtoniana é descrita pelas conhecidas relações:

$$\frac{2\pi}{T}(t - t_0) = \eta - eSen(\eta) \tag{9}$$

$$\theta = 2tg^{-1}\left[\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}tg\left(\frac{\eta}{2}\right)\right] \tag{10}$$

onde e é a excentricidade, a é o semi-eixo maior e $n = 2\pi/T$ é a frequência.

Essas quantidades estão relacionadas a energia e ao momento angular pelas equações

$$a = \sqrt{\left(\frac{GM}{-2\epsilon}\right)} \tag{11}$$

$$e^2 = 1 + 2l^2\epsilon \tag{12}$$

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{-2\epsilon^{3/2}}{GM} = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} \tag{13}$$

que correspondem a 3ª lei de Kepler.

Energia

As relações a seguir são inspiradas principalmente em [4]. A energia total por massa reduzida é dada por

$$\epsilon = \frac{\dot{r}}{2} - \frac{GMe^{-br}}{r} + \frac{l^2}{2r^2} \tag{14}$$

Com objetivo de encontrar de encontrar a relação entre a energia e o momento angular à excentricidade e o semi-eixo maior, usamos a condição de extremidade:

$$\dot{r}[a(1 \pm e)] = 0 \tag{15}$$

Aplicando (15) em (14), encontramos, por enquanto, somente a relação do momento angular ao semi-eixo e a excentricidade:

$$\frac{l^2}{GMa(1-e^2)} = 1 - k(1-e^2) \tag{16}$$

onde $k = b^2a^2/2$ e foi feito uma aproximação até segunda ordem.

Conclusão e agradecimentos

Conclusão

Ao encontrarmos as relações necessárias, buscamos uma previsão da precessão orbital que um sistema de dois corpos deve sofrer sobre o regime desse potencial. Com o desenvolvimento dos cálculos e futuras análises, utilizando de dados experimentais e observacionais, buscaremos reproduzir os dados da literatura.

Agradecimentos

UFES

FAPES
FUNDAÇÃO DE AMPARO À PESQUISA E INOVAÇÃO DO ESPÍRITO SANTO

Referências

1. FABRIS, Júlio C.; TONIATO, Júnior D.; VELTEN, Hermano. **Gravitação**. Editora Livraria da Física, 2021.
2. KITTEL, Charles; KNIGHT, Walter D.; RUDERMAN, Malvin A. **Curso de Física de Berkeley**: Volume 1 - Mecânica. Editora Edgard Blucher Ltda.
3. BROUWER, Dirk; CLEMENCE, Gerald M. **Methods of Celestial Mechanics**. Academic Press, 1961.
4. BENISTY, David. Testing modified gravity via Yukawa potential in two body problem: Analytical solution and observational constraints. Julho, 2022. Disponível em: arXiv:2207.08235 [gr-qc]