

Cosmologia Quântica Aplicada a um Universo com Matéria Rígida e uma Constante Cosmológica Negativa.

Gil de Oliveira Neto – DF/UFJF

Tópicos

1. Relatividade Geral Quântica;
2. Cosmologia Quântica;
3. Um Modelo para o Início do Universo;
4. Conclusões.

1. Relatividade Geral Quântica

- 1. Motivações e Domínio de Validade
- 2. Formalismo ADM
- 3. Quantização de Dirac

1.1 – Motivações e Domínio de Validade

- Para resolver o problema das singularidades, uma alternativa é a quantização da Relatividade Geral.
- O domínio de validade dessa teoria é:
 1. escala de distâncias $\leq 10^{-33}$ cm;
 2. escala de energias $\geq 10^{28}$ eV;
 3. escala de tempos $\leq 10^{-34}$ s

1.2 – Formalismo ADM

- Foi desenvolvido para obter-se uma formulação Hamiltoniana da Relatividade Geral.
- A Relatividade Geral é uma teoria com vínculos.
- Das componentes do tensor métrico $g_{\alpha\beta}$ obtemos as variáveis dinâmicas da teoria.
- Nesse formalismo separamos a métrica em 3 partes: (i) 6 componentes independentes das métricas, simétricas h_{ij} , de hipersuperfícies 3D; (ii) função lapso N ; (iii) vetor deslocamento N_i .
- Os ' h_{ij} ' representam as variáveis dinâmicas da teoria.

- O espaço-tempo 4D é formado pela “evolução” de seções espaciais com métricas h_{ij} .

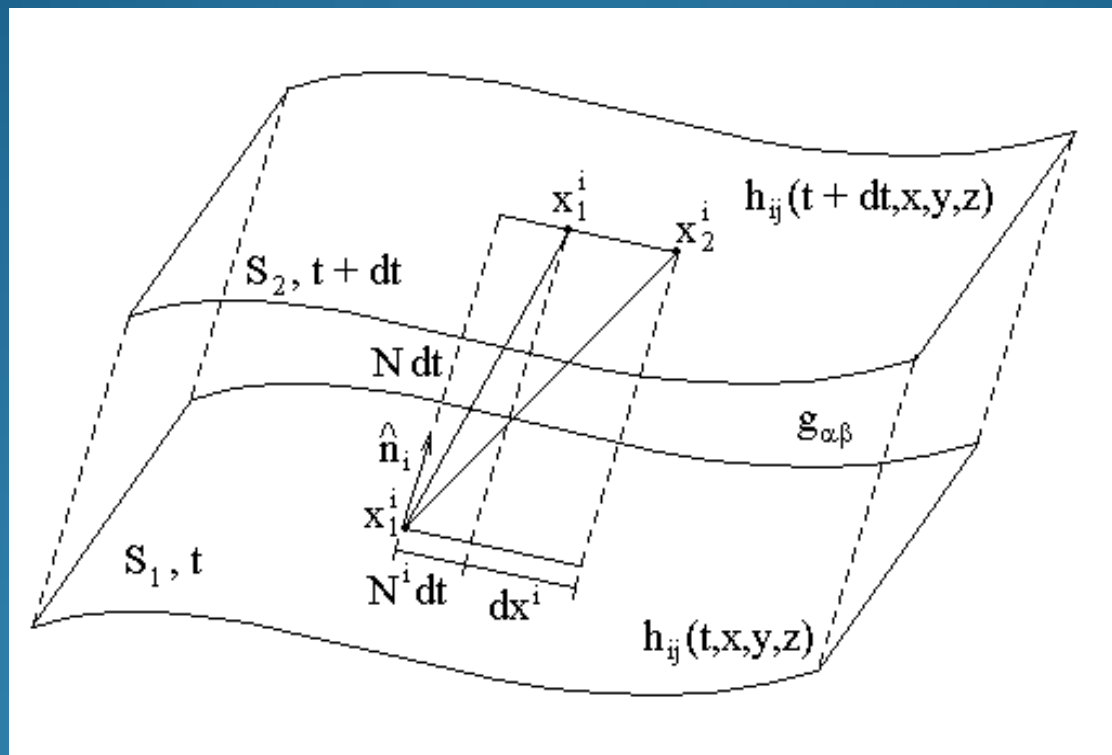


Figura 1. Representação pictórica da “evolução” das seções espaciais de um espaço tri-dimensional dando origem a um espaço-tempo quadri-dimensional.

- Vamos reescrever a métrica $g_{\alpha\beta}$ em função de N_i , N e h_{ij}

$$g_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} N_j N^j - N^2 & N_k \\ N_i & h_{ik} \end{bmatrix}$$

- A Hamiltoniana da teoria é dada por,

$$\mathcal{H}_G = N \left[G_{ijkl} \Pi^{ij} \Pi^{kl} - \sqrt{h} {}^{(3)}R \right] + N_j \left[-2 \Pi^{ij}{}_{|i} \right]$$

1.3 – Quântização de Dirac

- Quantização da Relatividade Geral
- Relatividade Geral: teoria vinculada
- Formalismo de Dirac; transformar vínculos em operadores e impormos tais vínculos como condições a serem satisfeitas pela função-de-onda do sistema.

- Aplicando o formalismo de Dirac para a RG:

$$[h_{jk}(X^i), h_{lm}((X^i)')] = [\Pi^{jk}(X^i), \Pi^{lm}((X^i)')] = 0$$

$$[h_{jk}(X^i), \Pi^{lm}((X^i)')] = \frac{1}{2}i (\delta_j^l \delta_k^m + \delta_j^m \delta_k^l) \delta(X^i, (X^i)')$$

- Introduzimos a função-de-onda

$$\Psi = \Psi[h_{ij}(X^k)]$$

- Superhamiltoniana e supermomentum

$$H_G = G_{ijkl} \Pi^{ij} \Pi^{kl} - \sqrt{h} {}^{(3)}R \quad \text{e} \quad H_G^i = -2 \Pi^{ij}{}_{|j}$$

- Vínculos para Relatividade Geral

$$H_G = 0 \quad , \quad H_G^i = 0$$

- Substituindo o operador,

$$\Pi^{ik}(X^m) = -i \frac{\delta}{\delta h_{ik}(X^m)}$$

na superhamiltoniana e no supermomentum, temos,

$$G_{iklm}(X^j) \frac{\delta^2 \Psi}{\delta h_{ik}(X^j) \delta h_{lm}(X^j)} + h^{\frac{1}{2}}(X^i) R(X^i) \Psi = 0$$

$$\left(\frac{\delta \Psi}{\delta h_{ik}(X^m)} \right)_{|k} = 0$$

- A primeira é equação de Wheeler-DeWitt a qual descreve a dinâmica da função de onda.

2. Cosmologia Quântica

- Aplicação do formalismo de Relatividade Geral Quântica para o estudo do Universo.
- Solução do problema da singularidade inicial ou 'Big Bang'.
- Podemos mencionar dois exemplos de como resolver esse problema.
- (i) Resolvendo-se a equação de Wheeler-DeWitt para modelos simples de universo observa-se que o valor esperado do 'tamanho' do universo nunca é zero.

- (ii) Podemos, também, calcular a evolução do estado inicial para o final do universo via integral de caminhos.
- Em alguns modelos observa-se que existem caminhos que correspondem a métricas com assinatura inicialmente Euclidianas e posteriormente Minkowskianas que explicam de forma não singular o aparecimento do Universo do nada.
- Nesses modelos o Universo teve origem no equivalente quadri-dimensional do pólo Sul de uma esfera bi-dimensional.

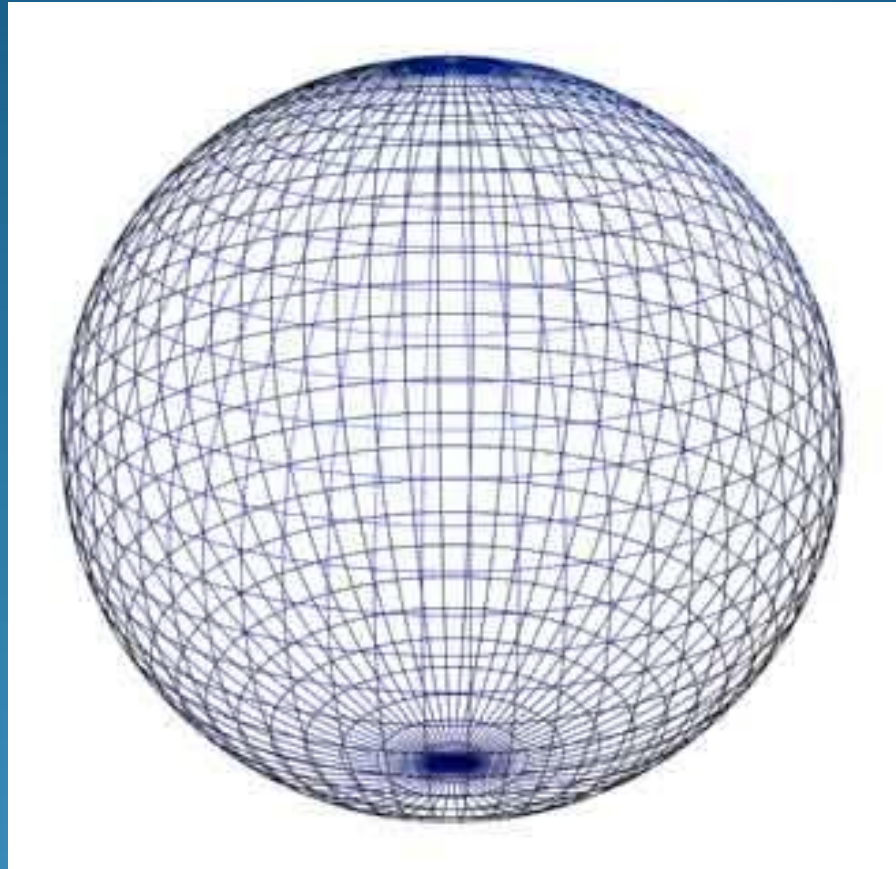


Figura 2. Superfície esférica bi-dimensional representando o universo inicialmente sem singularidades.

3 – Um Modelo para o Início do Universo.

3.1 – Introdução.

3.2 – O Modelo Clássico.

3.3 – A Quantização do Modelo.

3.4 – Espectro de Energia, Pacote de Onda e Valor Médio do Fator de Escala.

3.1 - Introdução

- Nesse modelo, vamos estudar a cosmologia quântica aplicada a um modelo com geometria FRW, seções espaciais com curvatura constante negativa, constituído de matéria rígida e uma constante cosmológica negativa.
- Um fluido perfeito de matéria rígida tem uma equação de estado na forma $p = \alpha\omega$, com $\alpha = 1$, onde ω e p , são respectivamente, a densidade de energia e a pressão do fluido.

- A densidade de energia desse fluído é proporcional a $1/a(t)^6$. Assim, deve ter existido uma fase anterior aquela dominada pela radiação, no nosso Universo, que foi dominada pela matéria rígida.
- Uma importante conjectura proveniente da *teoria das supercordas* e formulada por J. Maldacena, indica que no início o Universo deve ter tido um setor anti-DeSitter com cinco dimensões.
- Devido a esta conjectura e uma vez que nós estamos interessados em descrever os momentos iniciais do Universo, vamos considerar uma constante cosmológica negativa.

3.2 – O Modelo Clássico

- O elemento de linha do presente modelo é,

$$(1) \quad ds^2 = -N(t)^2 dt^2 + a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 d\Omega^2 \right),$$

onde $a(t)$ é o fator de escala, $N(t)$ é a função *lapse*, $d\Omega^2$ é o elemento de linha da superfície esférica bi-dimensional com raio unitário e nós estamos usando o sistema de unidades onde $\hbar/2\pi = c = 8\pi G = 1$.

- Nesse modelo, as seções espaciais são sólidos tridimensionais, compactos com curvatura constante negativa, localmente isomórficos ao H^3 .



Figura 3. Exemplo de superfície bidimensional que representa as seções espaciais do modelo

- O tensor momento-energia do fluido perfeito é dado por,

$$(2) \quad T_{\mu\nu} = (\omega + p) U_\mu U_\nu - p g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu},$$

onde $U^\mu = \delta^\mu_0$ é a quadri-velocidade do fluido em um sistema de coordenadas co-moventes e Λ é a constante cosmológica.

- Usando Eqs. (1) e (2) e o formalismo canônico de Schutz, nós podemos escrever a hamiltoniana total do modelo $N(t)H$, como,

$$(3) \quad H = P_a^2 / 12 a + 3 a + \Lambda a^3 + P_T / a^3 .$$

- As variáveis P_a e P_T são os momentos canonicamente conjugados as variáveis a e T , respectivamente. A variável T é associada com o fluido perfeito.
- Nós podemos ter uma idéia do comportamento clássico de $a(t)$ observando a equação de Friedmann do modelo,

$$(4) \quad (da(\tau)/d\tau)^2 + V_c(a) = 0.$$

Onde o potencial $V_c(a)$ é igual a,

$$(5) \quad V_c(a) = -a^2 - \Lambda a^4 / 3 - P_T / 3 a^2 ,$$

e τ é o tempo conforme que no presente gauge $N = a$ é igual a at .

- Observando $V_c(a)$ notamos que, na presente situação onde $\Lambda < 0$, as soluções para $a(\tau)$ são ligadas.
- Vamos considerar somente o caso em que as energias do fluido perfeito são negativas, isso significa que $P_T < 0$. É interessante observarmos que nesse caso o fator de escala nunca se anula. O universo não tem início em um 'Big Bang', esse é um universo do tipo *bouncing*.
- Um exemplo de $V_c(a)$, com $\Lambda = -0.1$ e $P_T = -100$, e dado na Figura 4.

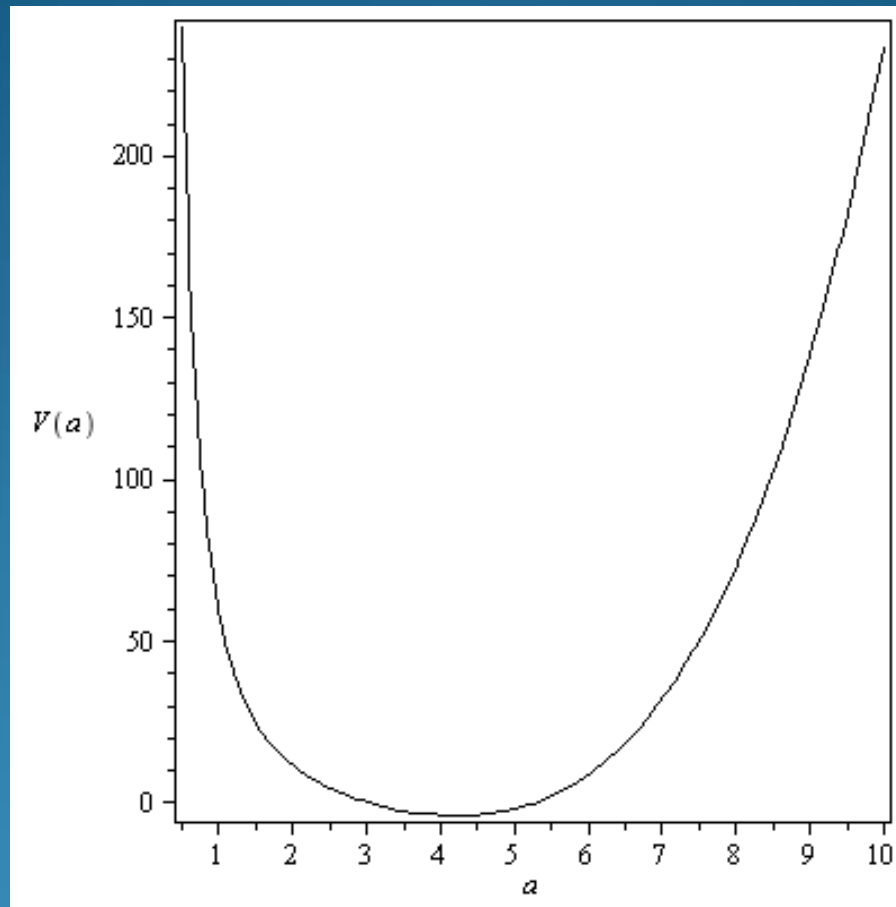


Figura 4. $V_c(a)$ para $\Lambda = -0.1$ e $P_T = -100$

3.3 – A Quantização do Modelo

- Nós iremos quantizar o modelo seguindo o formalismo de Dirac para quantização de sistemas vinculados.
- Aplicando esse formalismo para a superhamiltoniana (3), nós obtemos a equação de Wheeler-DeWitt,

$$(6) \quad \left(-\frac{1}{12} \frac{\partial^2}{\partial a^2} - (3a^2 + \Lambda a^4) \right) \Psi(a, \tau) = i \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial \tau} \Psi(a, \tau),$$

onde introduzimos a nova variável $\tau = -T$.

- As funções de onda, soluções da eq. (6), satisfazem o produto interno,

$$(7) \quad (\Psi, \Phi) = \int_0^{\infty} da \frac{1}{a^2} \Psi(a, \tau) * \Phi(a, \tau).$$

- Nós vamos restringir as soluções da eq.(6) ao conjunto de funções que satisfazem: $\Psi(0, \tau) = 0$.
- Nós vamos resolver a eq.(6) escrevendo o $\Psi(a, \tau)$ como,

$$(8) \quad \Psi(a, \tau) = e^{-iE\tau} \eta(a)$$

- Assim, $\eta(a)$ satisfará a seguinte equação de autovalores,

$$(9) \quad -\frac{d^2 \eta(a)}{da^2} + V(a) \eta(a) = 12E \frac{1}{a^2} \eta(a)$$

- O potencial $V(a)$ é dado por, $V(a) = -36 a^2 - 12 \Lambda a^4$.
- As energias E , eq. (9), são negativas e formam um conjunto discreto de autovalores E_n , onde $n = 1, 2, 3, \dots$. Para cada autovalor E_n existe um autovetor correspondente $\eta_n(a)$.
- A solução geral para a equação de Wheeler-DeWitt (6) é uma combinação linear desses autovetores.
- Nós vamos usar o método de Galerkin ou espectral (ME), para resolver a equação de autovalor (9).
- No ME, nós escolhemos uma base de funções orthonormais e expandimos a solução da equação de autovalor.
- As soluções da eq. (9) devem ir a zero suficientemente rápido para valores grandes do fator de escala.

- Logo, nós devemos restringir a , para um domínio finito. Digamos, $0 < a < L$, onde L é um número finito que deve ser fixado.
- É conveniente escolhermos nossas funções de base como sendo senos. Assim,

$$(10) \quad \eta_n(a) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right),$$

- onde os A_n 's serão determinados pelo ME.
- No mesmo domínio de a , nós podemos também expandir, na mesma base, as outras duas importantes funções de a que aparecem na eq. (9). Explicitamente, $V(a)$ e $12/a^2$.

- Para podermos obter resultados numéricos, nós devemos fixar um número finito de funções de base, digamos N .
- Desta forma, a eq. (9) pode ser escrita em uma notação compacta como,

$$(11) \quad D'^{-1} D A = E A,$$

- onde D and D' são matrizes quadradas $N \times N$ com todos os elementos conhecidos.
- A solução da eq. (11) dá os autovalores e seus correspondentes autovetores para os estados ligados do nosso modelo.

3.4 - Espectro de Energia, Pacote de Onda e Valor Médio do Fator de Escala

- Para obtermos soluções numéricas da eq. (11), nós devemos fixar valores para N , λ e L .
- Depois de alguns estudos numéricos da eq. (11), nós decidimos resolver a eq. (11) para $N = 100$. Desses 100 níveis nós usaremos somente as 18 primeiras autofunções para construir o pacote de onda $\Psi(a, \tau)$.
- Fizemos isso pois, somente os primeiros 18 autovalores são negativos.
- Depois de estudos numéricos da eq. (11), descobrimos que quanto menor é o valor absoluto de λ menor é o valor de N que devemos usar para obtermos a mesma precisão.

- Levando em conta que $\Lambda < 0$, escolhemos $\Lambda = -0.1$.
- Baseados em comparações com resultados de outros modelos estudados com o ME, escolhemos $L = 6$.
- Usando todos esses valores na eq. (11), nós calculamos os 100 autovalores de energia e mostramos os 18 primeiros na tabela abaixo.

$E_1 = -380.2201284331828$	$E_2 = -342.1147751350869$	$E_3 = -305.9147225014253$
$E_4 = -271.6319016521779$	$E_5 = -239.2791871064332$	$E_6 = -208.8705235210961$
$E_7 = -180.4210774184946$	$E_8 = -153.9474207233139$	$E_9 = -129.4677552918257$
$E_{10} = -107.0021912238143$	$E_{11} = -86.57309703051190$	$E_{12} = -68.20554802882278$
$E_{13} = -51.92791264850499$	$E_{14} = -37.77263895532904$	$E_{15} = -25.77734426711615$
$E_{16} = -15.98638945709977$	$E_{17} = -8.453288958554614$	$E_{18} = -3.244733126937446$

- Para termos uma idéia de como o espectro de energia depende de Λ , nós mostramos na próxima figura, Figura 5, a curva de E_l versus Λ .
- Nós notamos que E_l diminui quando Λ aumenta.

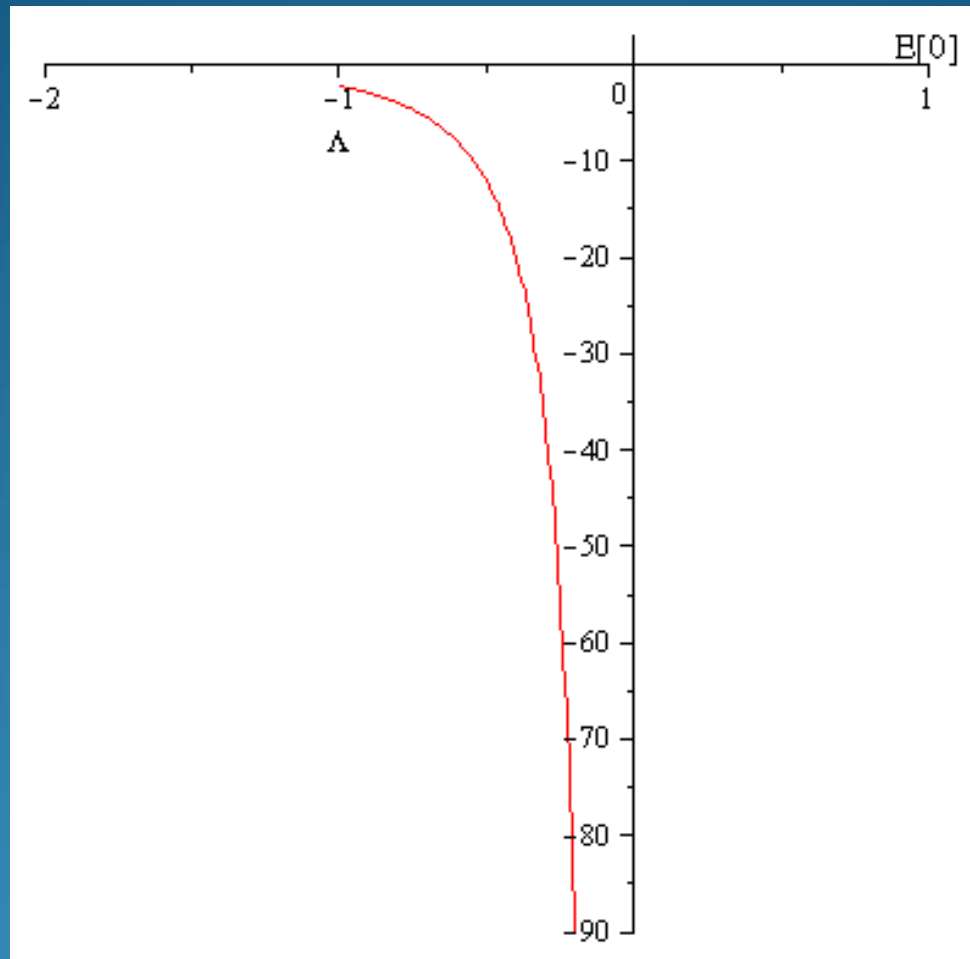


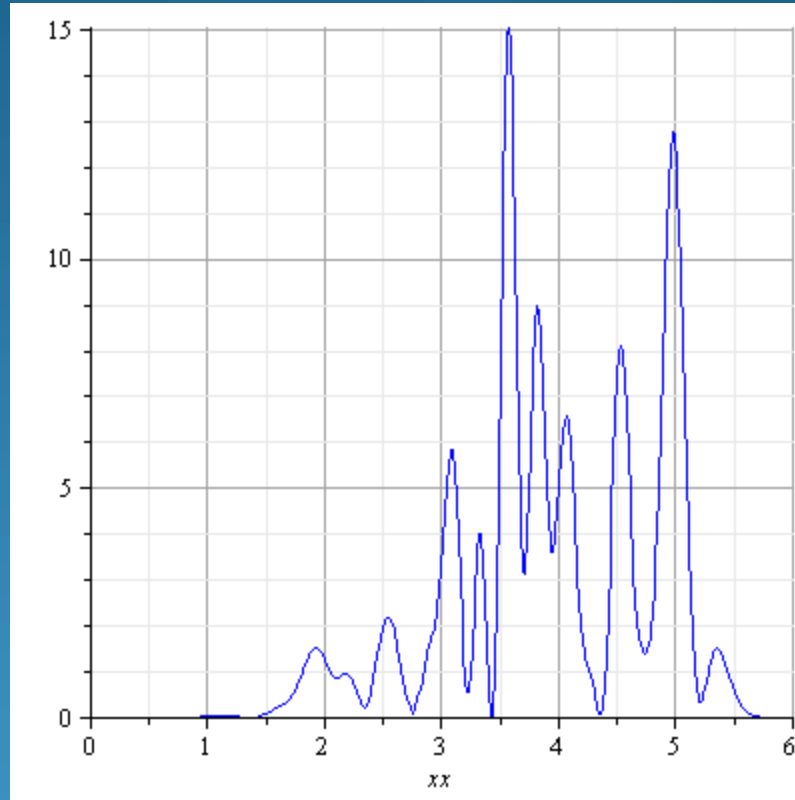
Figura 5. Dependência de E_l com Λ , para $N=100$ e $L=6$.

- Agora, nós escrevemos o pacote de onda como a seguinte combinação linear,

$$(12) \quad \Psi(a, \tau) = \sum_{n=1}^{18} C_n \eta_n(a) e^{-iE_n \tau}.$$

- Na equação acima, iremos fixar todos os C_n 's iguais a 1, os η_n 's serão dados pela eq. (10) e os E_n 's serão dados pelos valores na tabela anterior.
- Na próxima figura, Figura 6, nós mostramos, como um exemplo, o módulo ao quadrado de um pacote de onda construído para $\tau = 1000$, $L = 6$ e $\Lambda = -0.1$.

$$|\Psi(a, \tau)|^2$$



a

Figura 6. Módulo ao quadrado de um pacote de onda construído com os primeiros 18 níveis de energia para $\tau = 1000$, $L = 6$ e $\Lambda = -0.1$.

- Finalmente, usando o pacote de onda eq. (12), nós calculamos o valor esperado do fator de escala,

$$(13) \quad \langle a \rangle(\tau) = \frac{\int_0^\infty a^{-1} |\Psi(a, \tau)|^2 da}{\int_0^\infty a^{-2} |\Psi(a, \tau)|^2 da}.$$

- Nós calculamos essa quantidade para muitos intervalos de tempo diferentes. Em todos esses casos, nós observamos que $\langle a \rangle$ oscila entre valores máximos e mínimos e nunca assume o valor zero.
- Assim, confirmamos a nível quântico que nesse modelo não temos a singularidade inicial 'Big Bang'.
- Como um exemplo, mostramos, na Figura 7, o $\langle a \rangle$ para o intervalo de $\tau = 0$ até $\tau = 1000$, $L = 6$ e $\Lambda = -0.1$.

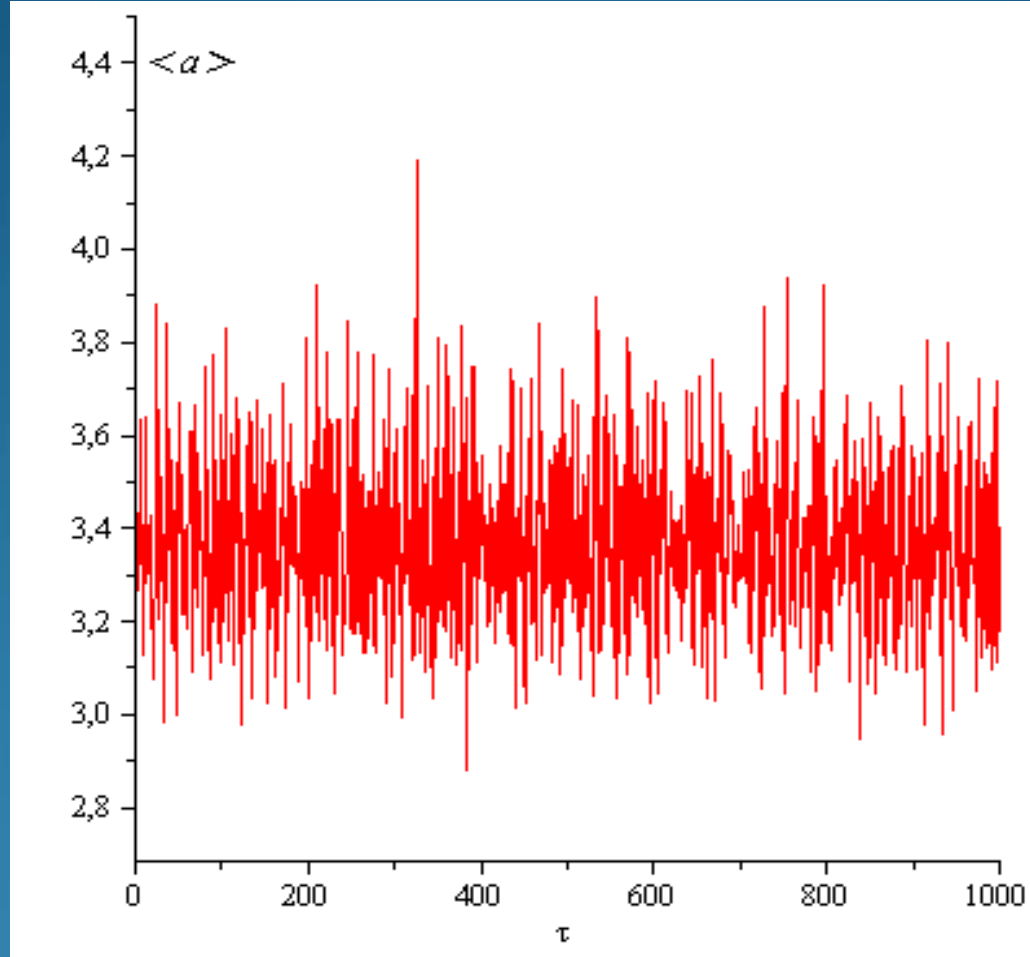


Figura 7. $\langle a \rangle$ calculado com o pacote de onda construído com os 18 primeiros níveis de energia para o intervalo de $\tau = 0$ até $\tau = 1000$, $L = 6$ e $\Lambda = -0.1$.

4- Conclusões.

- A Relatividade Geral aplicada a cosmologia prevê o início do Universo na singularidade do 'Big Bang'.
- A quantização da Relatividade Geral resolve o problema das singularidades.
- Vários modelos em Cosmologia Quântica eliminam a singularidade do 'Big Bang'.