

Gravidade Unimodular não-conservativa: um cenário cosmológico viável?

Marcelo H. Alvarenga; Júlio César Fabris; Mahamadou Hamani Daouda; Hermano Velten.

Universidade Federal do Espírito Santo-UFES

Introdução

É bem conhecido que a cosmologia moderna (descrita a partir da RG) com o grande progresso na sua compreensão teórica e experimental, apresenta dificuldades em descrever: matéria escura e energia escura (essa também conhecida como "problema da constante cosmológica" [3]). Por outro lado, modificações mínimas na RG, como a gravidade unimodular, são exploradas com intuito de investigar e compreender melhor esses conteúdos do universo. Introduzida por Einstein em 1919, a teoria unimodular na qual Λ aparece como uma constante de integração das equações de campo, é formalmente equivalente ao caso RG + Λ . Ela consiste em uma condição (vínculo) que se impõe ao determinante do tensor métrico; ele deverá ser igual à uma função escalar constante, ou seja, $\sqrt{-g} = \epsilon$. A condição unimodular é imposta na ação gravitacional, e é caracterizada como um vínculo no sistema. A ação total para esta teoria consistirá de

$$S_{GU} = \int d^4x \left[\sqrt{-g} R - \chi (\sqrt{-g} - \epsilon) \right] + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m, \quad (1)$$

onde χ atua como um multiplicador de Lagrange e $\mathcal{L}_m$ é a densidade lagrangiana para os campos de matéria.

As equações de movimento, oriundas da variação da ação total com relação ao tensor métrico (expressão (1)) juntamente com a aplicação do princípio de mínima ação, são:

$$G_{\mu\nu} + \frac{1}{4}g_{\mu\nu}R = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}T \right), \quad (2)$$

essas são equações sem traços. Quanto ao conjunto de simetrias presentes na teoria unimodular, a restrição sob o determinante da métrica quebra a invariância total por difeomorfismo ($\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0$) tornando-a uma classe de teoria invariante por difeomorfismo transverso ($\nabla_\mu \xi^\mu = 0$). Como consequência temos a possibilidade de considerar algo crucial em toda a dinâmica, a não conservação do tensor energia-momento ($\nabla^\mu T_{\mu\nu} \neq 0$), ou seja, a conservação de $T_{\mu\nu}$ não é mais uma consequência das identidades Bianchi, mas uma imposição na estrutura da teoria [1, 2]. Por tanto, mais uma equação irá descrever a dinâmica, a saber

$$\frac{\nabla_\nu R}{4} = 8\pi G \left(\nabla^\mu T_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\nabla_\nu T \right). \quad (3)$$

A seguir está a construção de um modelo cosmológico com base em gravidade unimodular não-conservativa e sua análise em perturbações cosmológicas.

O Modelo

Para descrição do nosso modelo, vamos considerar um espaço-tempo plano, homogêneo e isotrópico, descrito pela métrica FLRW. Dessa forma a dinâmica cosmológica é descrita pelas equações

$$\dot{H} = -4\pi G \bar{\rho} \quad (4)$$

$$\ddot{H} + 4H\dot{H} = -4\pi G (\dot{\bar{\rho}} + 4H\bar{\rho}), \quad (5)$$

onde $H = \frac{\dot{a}}{a}$ é o parâmetro de Hubble e definimos $\bar{\rho} = \rho + p$. Se impormos que ambos os lados de (5) se conservam separadamente é introduzido um ansatz do tipo $\bar{\rho} \propto a^{-n}$ fixando o valor de $n = 4$, ou seja

$$\ddot{H} + 4H\dot{H} = 0 \quad (6)$$

$$\dot{\bar{\rho}} + 4H\bar{\rho} = 0 \quad (7)$$

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}_0 a^{-4},$$

o comportamento radiativo é sempre obtido, independente do fluido considerado. Por outro lado, da equação (6) é fácil notar que

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{H} + 2H^2 \right) = 0 \quad (8)$$

$$\dot{H} + 2H^2 = \frac{2}{3}\Lambda_U.$$

onde Λ_U é uma constante, associada a constante cosmológica. Temos três possibilidades de solução

$$\Lambda_U < 0 \rightarrow a(t) = a_0 \sin^{\frac{1}{2}} \left(2\sqrt{-\frac{\Lambda_U}{3}} t \right) \quad (9)$$

$$\Lambda_U = 0 \rightarrow a(t) = a_0 t^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

$$\Lambda_U > 0 \rightarrow a(t) = a_0 \sinh^{\frac{1}{2}} \left(2\sqrt{\frac{\Lambda_U}{3}} t \right). \quad (11)$$

Parâmetros cosmológicos ($\Lambda_U > 0$)

- Parâmetro de Hubble e o parâmetro de desaceleração;

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{\Lambda_U}{\sqrt{3}} \coth \left(2\sqrt{\frac{\Lambda_U}{3}} ct \right) \quad (12)$$

$$q(t) = -\frac{a^2 \ddot{a}}{\dot{a}^2 a} = 1 - \frac{2\Lambda_U c^2}{3H^2}. \quad (13)$$

Fixando $H_0 = 70 \frac{km}{s/Mpc}$ e $q_0 = -0,5$ obtemos uma constante cosmológica $\Lambda_U \cong 1,29 \times 10^{-52} m^{-2}$ que é da mesma ordem de magnitude da constante cosmológica da cosmologia padrão Λ .

- A idade do Universo;

$$t_0 = \frac{1}{2\sqrt{\Lambda_U} H_0} \sinh^{-1} \left(\sqrt{\frac{\Omega_U}{\Omega}} \right) \cong 13.9 \text{ Ganos} \quad (14)$$

onde $a_0 = 1$ e fixados $H_0 = 67.3 \frac{km}{s/Mpc}$, $\Omega_U = \frac{\Lambda_U}{3H_0^2} = 0.9$.

- Parâmetro de desaceleração em termos do redshift z ;

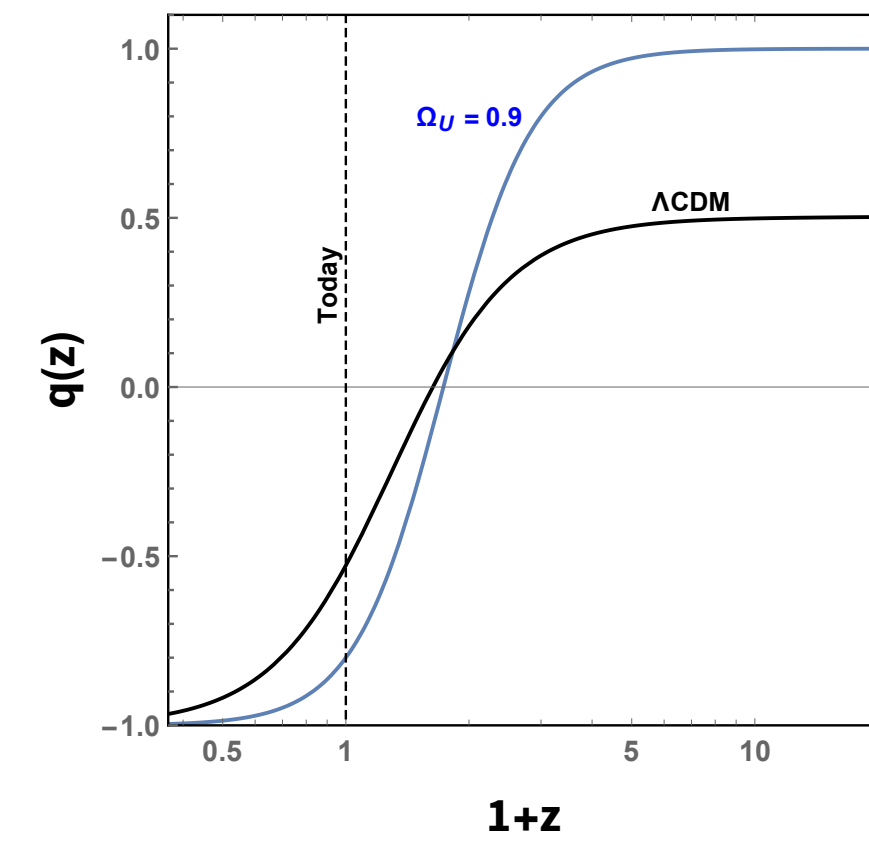


Figure: Evolução do parâmetro de desaceleração como função do redshift z . A linha vertical tracejada corresponde ao redshift $z = 0$.

Perturbações Cosmológicas escalares em Gravidade Unimodular Não-Conservativa.

Vamos denotar as quantidades perturbadas como:

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (15)$$

$$\tilde{\rho} = \rho + \delta\rho \quad (16)$$

$$\tilde{p} = p + \delta p \quad (17)$$

$$\tilde{u}^i = u^i + \delta u^i. \quad (18)$$

As equações de campo em gravidade unimodular não-conservativa a nível perturbativo são:

$$\delta R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} \left(g_{\mu\nu} \delta R + h_{\mu\nu} R \right) = 8\pi G \left(\delta T_{\mu\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \delta T + h_{\mu\nu} T \right) \quad (19)$$

$$g^{\mu\nu} \delta R_{;\mu} - h^{\mu\nu} R_{;\mu} = 32\pi G \left[\delta T^{\mu\nu}_{;\mu} - \frac{1}{4} \left(g^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} T_{;\mu} \right) \right]. \quad (20)$$

Fazendo o uso do calibre síncrono, ou seja, considerando $h_{\mu 0} = 0$ e levando em conta que a condição unimodular a nível perturbativo é $h_{kk} = 0$, encontramos após alguns cálculos uma equação desacoplada, dada por

$$\ddot{f} + 3H\dot{f} + \frac{\nabla^2 f}{3a^2} = 0 \quad (21)$$

onde $f = \frac{h_{k,l,k,l}}{a^2} = -24\pi G a^2 (\delta\rho + \delta p)$ e $\theta = \delta u^i_{;i}$. A solução de (21) no tempo conforme η é

$$f = A \frac{\sinh\left(\frac{k}{\sqrt{3}}\eta\right)}{k\eta} + B \frac{\cosh\left(\frac{k}{\sqrt{3}}\eta\right)}{k\eta}. \quad (22)$$

Há um crescimento exponencial das perturbações (aqui fixamos o comportamento do fator de escala em $\Lambda_U = 0$). A condição $\eta = 0$ fixa o valor de $B = 0$. Considerando a solução de fundo quando $\Lambda_U = 0$, o fator de escala evoluindo com $a \sim \eta$ e as relações perturbativas, encontra-se

$$\bar{\delta} = \frac{\delta\rho + \delta p}{\rho + p} = \bar{A} a^2 \frac{\sinh q}{q}, \quad (23)$$

onde $q = \frac{ka}{\sqrt{3}a_0}$. Vemos que para grandes comprimentos de onda, ou seja, $k \rightarrow 0$. Temos um resultado relevante, onde

$$\bar{\delta} \sim a^2. \quad (24)$$

Das perturbações escalares, vemos que no unimodular não-conservativo o contraste na densidade cresce a uma taxa mais rápida que o modelo padrão ($\delta_{RG} \sim a$)

Agradecimentos

A Universidade Federal do Espírito Santo (Ufes), as agências de fomento FAPES/CNPq/CAPES e Propri/UFOP

Referências

- ELLIS, G. F. R. et al. **On the Trace-Free Einstein Equations as a Viable Alternative to General Relativity**. Class. Quant. Grav., v. 28, p. 225007, 2011.
- ELLIS, G. F. R. **The Trace-Free Einstein Equations and inflation**. Gen. Rel. Grav., v. 46, p. 1619, 2014.
- WEINBERG, S. **The Cosmological Constant Problem**. Rev. Mod. Phys., v. 61, p.1–23, 1989.