

Universidade Federal Rural da Amazônia

Métodos de Cálculos da Temperatura de Buracos Negros

Glauber Tadaiesky Marques

20 de setembro de 2013

- 1 Métodos de Cálculos da Temperatura
- 2 Buracos Negros Dilatônicos não assintoticamente Planos
- 3 Conclusão

- 1971- Hawking formula o teorema da área, $\delta A \geq 0$, que lembra a segunda lei da termodinâmica, $\delta S \geq 0$.
- 1973- Bekenstein e Smarr obtiveram

$$dM = \tau_H dA + \Omega_H dJ + \Phi_H dQ \quad ,$$

$$M = 2\tau_H A + 2\Omega_H J + \Phi_H Q \quad ,$$

respectivamente, mostrando a analogia entre as leis da mecânica dos buracos negros e as relações usuais das leis da termodinâmica.

- 1973- Carter, Bardeen e Hawking generalizaram os resultados obtidos por Bekenstein e Smarr e formularam as leis da termodinâmica dos buracos negros:

- ▶ **Lei Zero:** A gravidade superficial é constante em cima do horizonte. Faz-se assim a comparação com o princípio zero da termodinâmica onde a temperatura é constante para um corpo em equilíbrio térmico.

- ▶ **Lei Zero:** A gravidade superficial é constante em cima do horizonte. Faz-se assim a comparação com o princípio zero da termodinâmica onde a temperatura é constante para um corpo em equilíbrio térmico.
- ▶ **Primeira Lei:** $dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \Omega_H dJ + \Phi_H dQ$, onde faz-se a comparação com o primeiro princípio da termodinâmica $dE = TdS - pdV$, sendo ΩdJ e ΦdQ os termos de trabalho.

- ▶ **Lei Zero:** A gravidade superficial é constante em cima do horizonte. Faz-se assim a comparação com o princípio zero da termodinâmica onde a temperatura é constante para um corpo em equilíbrio térmico.
- ▶ **Primeira Lei:** $dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \Omega_H dJ + \Phi_H dQ$, onde faz-se a comparação com o primeiro princípio da termodinâmica $dE = TdS - pdV$, sendo ΩdJ e ΦdQ os termos de trabalho.
- ▶ **Segunda Lei:** $\delta A \geq 0$, para todo processo físico, o que pode ser comparado com o segundo princípio da termodinâmica que estabelece $\delta S \geq 0$ para todo processo físico.

- ▶ **Lei Zero:** A gravidade superficial é constante em cima do horizonte. Faz-se assim a comparação com o princípio zero da termodinâmica onde a temperatura é constante para um corpo em equilíbrio térmico.
- ▶ **Primeira Lei:** $dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \Omega_H dJ + \Phi_H dQ$, onde faz-se a comparação com o primeiro princípio da termodinâmica $dE = TdS - pdV$, sendo $\Omega_H dJ$ e $\Phi_H dQ$ os termos de trabalho.
- ▶ **Segunda Lei:** $\delta A \geq 0$, para todo processo físico, o que pode ser comparado com o segundo princípio da termodinâmica que estabelece $\delta S \geq 0$ para todo processo físico.
- ▶ **Terceira Lei:** A gravidade superficial κ não pode chegar a zero por nenhum processo físico. Compara-se com o terceiro princípio da termodinâmica segundo o qual $T \rightarrow 0$ não pode ocorrer via nenhum processo físico.

- 1975- Hawking relacionando efeitos quânticos com a relatividade geral, descobriu que buracos negros emitem uma radiação, de forma idêntica ao espectro de radiação de um corpo negro, sendo a temperatura dada pela relação

$$T_H = \frac{\kappa}{2\pi} . \quad (1)$$

Similarmente, a entropia se relaciona com a área do buraco negro pela expressão $S = \frac{A}{4}$.

- 1975- Bekenstein generaliza a segunda lei da termodinâmica dos buracos negros, $S_T = S_{bh} + S_E \geq 0$.
Existindo vários métodos para se calcular a radiação Hawking.

Temperatura via coeficiente de Bogoliubov:

Definiremos em primeiro lugar os coeficientes de Bogoliubov. Para isto analisaremos algumas propriedades da teoria quântica de campos de um campo escalar livre.

Seja $\Phi(x)$ um campo escalar real não massivo e livre, num espaço-tempo plano, que satisfaz a equação de Klein-Gordon

$$\nabla^\mu \partial_\mu \Phi(x) = 0 \quad . \quad (2)$$

A solução desta equação é dada por,

$$\Phi(x) = \int d^3k \left[f_k(x) a_k + f_k(x)^* a_k^\dagger \right] \quad , \quad (3)$$

uma solução de ondas planas.

$\{a_k\}$ são operadores em um espaço de Hilbert \mathcal{H} com os seus hermitianos conjugados $\{a_k^\dagger\}$, que satisfazem as relações

$$\begin{aligned} [a_k, a_{k'}^\dagger] &= \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \quad , \\ [a_k, a_{k'}] &= [a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger] = 0 \quad . \end{aligned}$$

Podemos fazer o espaço de Hilbert (\mathcal{H}) ser um espaço de Fock construindo um estado de vácuo $|0\rangle$ satisfazendo as propriedades

$$\begin{aligned} a_k |0\rangle &= 0 \quad \forall k \quad , \\ \langle 0|0\rangle &= 1 \quad , \end{aligned}$$

de modo que \mathcal{H} tem como base

$$\left\{ |0\rangle, a_k^\dagger |0\rangle, a_{k'}^\dagger a_k^\dagger |0\rangle, \dots \right\} \quad ,$$

$\langle | \rangle$ é o produto interno positivo-definido deste espaço e $\{a_k^\dagger\}$ e $\{a_k\}$ são os operadores de criação e destruição, respectivamente.

Pode-se então, definir o operador número de partículas $N_K = a_k^\dagger a_k$ que satisfaz a relação

$$N_k |0\rangle = 0 \quad . \quad (4)$$

Esta base de \mathcal{H} é determinada pela escolha dos vácuos $|0\rangle$, que depende da definição das bases complexas $f_k(x)$, que satisfazem as relações:

$$(f_k(x), f_{k'}(x)) = -(f_k(x)^*, f_{k'}(x)^*) = \delta^3(k - k') \quad , \quad (5)$$

$$(f_k(x), f_{k'}(x)^*) = (f_k(x)^*, f_{k'}(x)) = 0 \quad , \quad (6)$$

onde

$$(f_1, f_2) = i \int \sqrt{|g(\Sigma)|} \left(f_2^* \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu f_1 \right) d\Sigma^\mu \quad (7)$$

é a relação de produto interno definida pela teoria usada.

Acima $d\Sigma^\mu = d\Sigma n^\mu$, sendo $d\Sigma$ o elemento de volume da hipersuperfície Σ tipo espaço, $|g(\Sigma)|$ o módulo do determinante da métrica em relação à hipersuperfície e n^μ é um vetor unitário tipo tempo normal a esta hipersuperfície.

Imaginemos a evolução da hipersuperfície em $\Sigma \rightarrow \Sigma_0 \rightarrow \Sigma_1$, tal que Σ_1 não seja uma simples deformação de Σ_0 (portanto equivalente por difeomorfismo) e tomemos o operador de campo $\Phi(x)$, solução da equação de KG na hipersuperfície Σ_1 :

$$\Phi(x) = \int d^3k \left[F_k(x) b_k + F_k(x)^* b_k^\dagger \right] \quad , \quad (8)$$

As funções $F_k(x)$ e os operadores b_k e N_k^1 obedecem as mesmas propriedades vistas anteriormente, e $|0\rangle_1$ é o vácuo na hipersuperfície Σ_1 .

Podemos então expandir o operador de campo tanto nas bases antigas como nas novas:

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \int d^3k \left[f_k(x) a_k + f_k(x)^* a_k^\dagger \right] \\ &= \int d^3k' \left[F_{k'}(x) b_{k'} + F_{k'}(x)^* b_{k'}^\dagger \right] \quad . \end{aligned}$$

Utilizando o fato de que o produto interno independe da escolha da hipersuperfície e a definição dos operadores destruição e criação

$$b_{k'} = (\Phi(x), F_{k'}(x)) = i \int \left(F_k^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_\mu \Phi(x) \right) d\Sigma^\mu ,$$

$$b_{k'}^\dagger = -(\Phi(x), F_{k'}(x)^*) = -i \int \left(F_k(x) \overleftrightarrow{\partial}_\mu \Phi(x) \right) d\Sigma^\mu ,$$

pode-se relacionar os operadores de destruição e criação da hipersuperfície Σ_1 com os operadores de criação e destruição da hipersuperfície Σ como sendo

$$b_{k'} = \int \left(\alpha_{k'k}^* a_k - \beta_{k'k}^* a_k^\dagger \right) dk ,$$

$$b_{k'}^\dagger = \int \left(\alpha_{k'k} a_k^\dagger - \beta_{k'k} a_k \right) dk ,$$

onde

$$\begin{aligned}\alpha_{k'k}^* &\doteq -(F_{k'}(x)^*, f_k(x)^*), & \alpha_{k'k} &\doteq (F_{k'}(x), f_k(x)), \\ \beta_{k'k} &\doteq -(F_{k'}(x), f_k(x)^*), & \beta_{k'k}^* &\doteq (F_{k'}^*(x), f_k(x)).\end{aligned}$$

Os coeficientes α e β obedecem a seguinte relação de normalização

$$\int \int (\alpha_{k'k} \alpha_{k'k''}^* - \beta_{k'k} \beta_{k'k''}^*) dk' dk'' = 1 \quad .$$

De posse das relações encontradas, pode-se encontrar a seguinte relação:

$$\begin{aligned}\langle 0 | N_k^1 | 0 \rangle &= \langle 0 | b_k^\dagger b_k | 0 \rangle \\ N_k^1 &= \int |\beta_{kk'}|^2 dk' = \int \int \beta_{kk'} \beta_{k''k'}^* dk' dk'' \quad . \quad (9)\end{aligned}$$

Esta relação nos mostra que algo acontece na evolução $\Sigma_0 \rightarrow \Sigma_1$: o que é um vácuo para um observador em Σ_0 não o é mais para um observador em Σ_1 .

Tomaremos como exemplo para a aplicação dos coeficientes de Bogoliubov a métrica de Schwarzschild,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 .$$

Utilizando a equação de KG para a métrica de Schwarzschild,

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu \sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi(x) = 0 \quad .$$

Encontra-se a seguinte equação diferencial

$$\frac{d^2 f(r)}{dr^2} + (\omega^2 - V_{eff}) f(r) = 0 \quad . \quad (10)$$

Sendo

$$dr^* = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr ,$$

$$r^* = r + 2M \ln(r - 2M) + c ,$$

e

$$V_{eff} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} \right] \quad (11)$$

é o potencial efetivo.

Onde utilizou-se a separação de variáveis

$$\Phi(x) = \frac{f(r)}{r} Y_l^m(\theta, \phi) e^{-i\omega t} . \quad (12)$$

No limite assintótico, $r \rightarrow \infty$, (10) torna-se

$$\frac{d^2 f(r)}{dr^2} + \omega^2 f(r) = 0 \quad , \quad (13)$$

que tem como solução

$$f(r) = Ae^{i\omega r^*} + Be^{-i\omega r^*} \quad .$$

Deste modo, encontra-se

$$\Phi(x) = \frac{Y_l^m(\theta, \phi)}{r} (g_\omega + f_\omega) \quad .$$

onde

$$f_\omega = B e^{-i\omega v} \rightarrow v = t + r^* \quad , \quad g_\omega = A e^{-i\omega u} \rightarrow u = t - r^* \quad . \quad (14)$$

Pela normalização do campo $\Phi(x)$,

$$(\Phi_{\omega, l, m}, \Phi_{\omega', l', m'}) = i \int d^3x \sqrt{|g|} g^{tt} \Phi_{\omega', l', m'}^* \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 \Phi_{\omega, l, m} \quad , \quad (15)$$

encontra-se $A = B = 1/\sqrt{4\pi\omega}$.

Modelo de colapso da casca esférica fina:

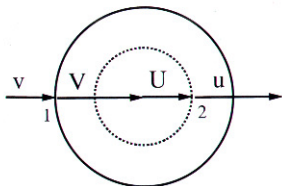


Figura : Uma onda esférica vem de \mathcal{I}^- com frente de onda satisfazendo $v = \text{constante}$, e depois de espalhada pela estrela, dirige-se a \mathcal{I}^+ com $u = \text{constante}$.

Utilizando o modelo de colapso de uma casca esférica fina, encontra-se

$$u(v) = -\frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{v_0 - v}{F} \right) ,$$

onde $v_0 = T_0 - 2M$ e $\kappa = 1/4M$ é a gravidade superficial .
Assim os coeficientes de Bogoliubov são encontrados :

$$\begin{aligned} \alpha_{\omega\omega'} &= (g_\omega, f_{\omega'}) = i \int_{-\infty}^{v_0} f_{\omega'}^* \overset{\leftrightarrow}{\partial}_v g_\omega \\ &= \frac{\omega}{2\kappa\pi\sqrt{\omega\omega'}} \Gamma(i\omega/\kappa) e^{\omega\pi/2\kappa} e^{i[\omega'v_0 - \omega(\ln F - \ln \omega')/\kappa]} , \\ \beta_{\omega\omega'} &= -(g_\omega, f_{\omega'}^*) \\ &= -\frac{\omega}{2\kappa\pi\sqrt{\omega\omega'}} \Gamma(i\omega/\kappa) e^{-\omega\pi/2\kappa} e^{-i[\omega'v_0 + \omega(\ln F + \ln \omega')/\kappa]} . \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_0^\infty \int_0^\infty d\omega' d\omega'' \alpha_{\omega\omega'} \alpha_{\omega''\omega'}^* = \frac{1}{2} \frac{e^{\pi\omega/\kappa}}{\sinh(\pi\omega/\kappa)} ,$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty d\omega' d\omega'' \beta_{\omega\omega'} \beta_{\omega''\omega'}^* = \frac{1}{2} \frac{e^{-\pi\omega/\kappa}}{\sinh(\pi\omega/\kappa)} ,$$

ficando evidente que a condição de normalização é satisfeita.
O operador número de partícula é dado por

$$N_\omega = \int_0^\infty \int_0^\infty d\omega' d\omega'' \beta_{\omega\omega'} \beta_{\omega''\omega'}^* = \frac{1}{e^{2\pi\omega/\kappa} - 1} . \quad (16)$$

Isto é característico de um espectro planckiano com temperatura
 $T_H = \kappa/2\pi = 1/8\pi M$.

Temperatura via euclideanização da métrica:

Exemplificaremos o método usando a métrica de Schwarzschild. Neste caso, há uma singularidade sobre o horizonte de eventos, $r = r_H$. Passaremos o tempo da métrica para um tempo imaginário efetuando uma continuação analítica, $t \rightarrow it$, chamada de rotação de Wick, e escreveremos a métrica para uma superfície com θ e ϕ constantes. Assim, para eliminar a singularidade cônica que ocorre, em $r = r_H$, transforma-se a métrica para uma métrica conforme,

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 \\ &= \Omega(\rho) (d\rho^2 + \rho^2 d\tau^2) \quad , \end{aligned}$$

onde $\tau = \alpha t$, sendo α uma constante que faz o fator conforme $\Omega(\rho)$ ser finito e não nulo no horizonte.

Portanto, comparando os termos, obtém-se

$$\Omega(\rho) = \frac{r - 2M}{r\rho^2\alpha^2}, \quad (17)$$

$$\rho = e^{\alpha r^*}. \quad (18)$$

Na expressão acima,

$$r^* = r + 2M \ln(r - 2M) .$$

Perto do horizonte o termo dominante de r^* será

$$r^* \approx \frac{1}{2\kappa} \ln(r - 2M) ,$$

onde $\kappa = 1/4M$ é a gravidade superficial. Logo,

$$\rho \approx (r - 2M)^{\alpha/2\kappa} . \quad (19)$$

Substituindo (19) em (17), obtém-se

$$\Omega(\rho) = \frac{r - 2M}{r\alpha^2(r - 2M)^{\alpha/\kappa}} \quad . \quad (20)$$

Como $\Omega(\rho)$ é um fator finito no horizonte, a única maneira de evitar a singularidade em $r = r_H = 2M$ é assumindo

$$\alpha = \kappa \quad .$$

Agora, para evitar a singularidade cônica, é preciso impor uma periodicidade de 2π para τ , isto é, uma periodicidade para t dada por $2\pi/\alpha$. Isto corresponde a uma temperatura

$$T = \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{\kappa}{2\pi} = \frac{1}{8\pi M} \quad . \quad (21)$$

Temperatura via Anomalias:

Baseado no trabalho de S. P. Robson e F. Wilczek, PRL (2005), onde a anomalia surge quando há uma redução de uma ação D-dimensional para uma ação bidimensional, na região próxima ao horizonte de eventos, para um buraco negro. Fazendo aparecer uma ação bi-dimensional, que representa uma teoria efetiva quirial perto do horizonte. **Teorias bi-dimensionais quirais exibem anomalia gravitacional.**

Considerando um elemento de linha de um espaço tempo estático e simetricamente esférico

$$dS^2 = f(r)dt^2 - f(r)^{-1}dr^2 - r^2d\Omega_{(D-2)}^2 \quad , \quad (22)$$

onde $f(r)$ admite um horizonte em $f(r = r_H) = 0$.

A gravidade superficial é dada por

$$\kappa = \frac{1}{2} \partial_r f(r) |_{r=r_H} \quad . \quad (23)$$

Seja a ação de um campo escalar sem massa

$$\begin{aligned} S[\varphi] &= \frac{1}{2} \int d^D x \sqrt{-g} \varphi \nabla^2 \varphi \\ &= \frac{1}{2} \int d^D x r^{D-2} \sqrt{\gamma} \\ &\quad \times \varphi \left(\frac{1}{f} \partial_t^2 - \frac{1}{r^{D-2}} \partial_r r^{D-2} f \partial_r - \frac{1}{r^2} \nabla_\Omega \right) \varphi , \end{aligned}$$

onde γ é o determinante da parte angular $d\Omega^2$ e ∇_Ω é a coleção de derivadas angulares.

Fazendo o limite $r \rightarrow r_H$ e levando em consideração somente os termos dominantes a ação se escreve como

$$S[\varphi] = \sum_n \frac{r_H^{D-2}}{2} \int dt dr \varphi_n \left(\frac{1}{f} \partial_t^2 - \partial_r f \partial_r \right) \varphi_n ,$$

sendo que na segunda linha o campo φ foi expandido em função dos harmônicos esféricos em $D - 2$ dimensões, ou seja, perto do horizonte o campo pode ser efetivamente descrito por uma coleção infinita de campos em (1+1) dimensões no espaço (t,r), onde r é a direção espacial na métrica

$$dS^2 = f(r)dt^2 - f(r)^{-1}dr^2 . \quad (24)$$

A anomalia gravitacional tratada aqui será a não conservação do tensor-momento energia em 2D, anomalia de Einstein. Na região $r_H < r \leq r_H + \delta$ a anomalia se dá na forma abaixo:

$$\nabla_\mu T_\nu^\mu(r_H) \equiv \Xi_\nu(r) \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu N_\nu^\mu \quad ,$$

onde

$$N_\nu^\mu = \frac{1}{96\pi} \epsilon^{\beta\mu} \partial_\alpha \Gamma_{\nu\beta}^\alpha \quad .$$

Para uma métrica do tipo (24) é fácil verificar a existência de uma anomalia do tipo tempo,

$$\Xi_t(r) = \partial_r N_t^r = \frac{1}{192\pi} \partial_r \left(f'^2 + f''f \right) \quad . \quad (25)$$

Deve-se resolver a equação da anomalia em duas regiões, $r_H < r \leq r_H + \delta$ onde ocorrem as anomalias e $r > r_H + \delta$ onde não há anomalias, para $\nu = t$, onde temos que

$$\nabla_\mu T_t^\mu = \partial_r T_t^r .$$

- Para $r > r_H + \delta$,

$$\begin{aligned} \partial_r T_t^r(\infty) &= 0 \\ T_t^r(\infty) &= a_0 . \end{aligned} \quad (26)$$

- Para $r_H < r \leq r_H + \delta$,

$$\begin{aligned} \partial_r T_t^r(r_H) &= \Xi_t \\ T_t^r(r_H) &= a_H + N_t^r(r) - N_t^r(r_H) , \end{aligned} \quad (27)$$

onde a_0 e a_H são constantes de integração.

Combina-se o tensor momento-energia nas duas regiões de interesse, de modo que,

$$T_{\nu}^{\mu} = T_{\nu}^{\mu}(\infty)\Theta_H(r) + T_{\nu}^{\mu}(r_H)H(r) \quad .$$

onde $\Theta_H(r) = \Theta_H(r - r_H - \delta)$ e $H(r) = 1 - \Theta_H(r)$.

Por meio de um difeomorfismo, $x' = x - \xi \rightarrow \delta g_{\mu\nu} = \nabla_{\mu}\xi_{\nu} + \nabla_{\nu}\xi_{\mu}$, a parte anômala da ação efetiva é dada por

$$\int d^2x \sqrt{-g_{(2)}} \xi^t \nabla_{\mu} T_t^{\mu} = \int d^2x \xi^t \left\{ \partial_r \left[N_t^r(r) H(r) \right] + \left(a_0 - a_H + N_t^r(r_H) \right) \delta(r - r_H) \right\} \quad .$$

O primeiro termo é eliminado classicamente pelo princípio variacional, porém para eliminar o termo da delta requer-se

$$a_0 = a_H - N_t^r(r_H) \quad .$$

Uma consequência da equação de anomalia é que ela não se transforma covariavelmente, e para que isto ocorra é preciso definir um novo tensor momento-energia dado por

$$\tilde{T}_{\nu}^{\mu} = T_{\nu}^{\mu} + \tilde{N}_{\nu}^{\mu}, \quad \tilde{N}_t^r = \frac{1}{192\pi} \left(ff'' - 2(f')^2 \right).$$

Impondo que $\tilde{T}_t^r(r_H) = 0$, encontra-se $a_H = \frac{1}{96\pi} (f'|_{r=r_H})^2$.

Observa-se que $\tilde{N}_t^r(r_H) = -2N_t^r(r_H)$, pois $f(r_H) = 0$. A equação para o fluxo a_0 pode então ser escrita como

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{48\pi} \kappa^2 \\ &= \frac{\pi}{12} T_H^2 \quad . \end{aligned}$$

onde κ é a gravidade superficial.

Temperatura via coeficiente de reflexão:

O processo de cálculo dos coeficientes de transmissão e reflexão nada mais é do que um processo de espalhamento, uma onda que chega do infinito passado, ao buraco negro, tem parte da onda absorvida pelo buraco negro e parte refletida para o infinito futuro, pelo potencial efetivo do buraco negro. Os modos de propagação desta onda estão relacionados aos modos incidentes ($v = t + r^*$) e emergentes ($u = t - r^*$).

Do ponto de vista quântico defini-se o fluxo de probabilidade dado por

$$\mathcal{F}^\mu = \frac{2\pi}{i} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \Phi^* \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\nu \Phi \quad . \quad (28)$$

Onde os coeficientes de transmissão e reflexão são definidos como

$$\mathcal{T} = \left| \frac{\mathcal{F}_{\infty}^{r\ in}}{\mathcal{F}_{r_H}^{r\ in}} \right|, \mathcal{R} = \left| \frac{\mathcal{F}_{r_H}^{r\ em}}{\mathcal{F}_{r_H}^{r\ in}} \right| . \quad (29)$$

Utiliza-se, neste caso, a condição de contorno de que no infinito a constante relacionada ao modo emergente da solução da equação de onda no limite assintótico é nula.

De modo que

$$\mathcal{T} + \mathcal{R} = 1 . \quad (30)$$

Uma vez que

$$\mathcal{T} + \mathcal{R} = 1 \text{ e } \alpha - \beta = 1 ,$$

e tais relações decorrem da quantização do campo escalar.

Define-se

$$\alpha = \frac{1}{\mathcal{T}} , \quad \beta = \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{T}} .$$

Porém, utilizando a definição do operador número de partícula e o espectro de temperatura encontrado pelo processo de Hawking, obtém-se

$$\begin{aligned}
 N &= \beta = \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{T}}, \\
 \frac{1}{e^{\omega/T_H} - 1} &= \frac{\mathcal{R}}{1 - \mathcal{R}}; \\
 T_H &= -\frac{\omega}{\ln \mathcal{R}}.
 \end{aligned} \tag{31}$$

A princípio

$$T_H = -\frac{\omega}{\ln \mathcal{R}} = \frac{\kappa}{2\pi}. \tag{32}$$

Buracos Negros Dilatônicos não assintoticamente Planos:

A teoria Einstein-Maxwell-dilaton (EMD) dada pela ação

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left(R - 2\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - e^{-2\alpha\phi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) .$$

Variando a ação com respeito a $g^{\mu\nu}$, A_μ e ϕ , obtém-se as seguintes equações de movimento:

$$R_{\mu\nu} = 2\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + 2e^{-2\alpha\phi} \left(F_{\mu\beta} F_\nu{}^\beta - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F^2 \right) ,$$

$$\nabla_\nu (e^{-2\alpha\phi} F^{\mu\nu}) = 0 ,$$

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \phi(x) = -\frac{\alpha}{2} e^{-2\alpha\phi} F^2 .$$

Tem-se a seguinte métrica,

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & \frac{(\bar{r} - b)\bar{r}^\gamma}{r_0^{\gamma+1}} d\bar{t}^2 - \frac{r_0^{\gamma+1}}{(\bar{r} - b)\bar{r}^\gamma} d\bar{r}^2 \\
 & - \bar{r}^{1-\gamma} r_0^{1+\gamma} d\Omega^2, \quad (33)
 \end{aligned}$$

e

$$F^{tr} = \frac{Q}{r_0^2}, \quad e^{2\alpha\phi(r)} = \left(\frac{\bar{r}}{r_0}\right)^{1-\gamma}, \quad M = \frac{(1-\gamma)}{4} b, \quad Q = \sqrt{\frac{1+\gamma}{2}} r_0,$$

onde F é o campo elétrico, ϕ o campo dilatônico, M a massa e Q a carga para esta geometria.

A gravidade superficial é dada por

$$\kappa = \frac{b^\gamma}{2r_0} \quad .$$

Observe-se que quando $\gamma = b = 0$, a gravidade superficial tem o valor finito

$$\kappa = \frac{1}{2r_0} \quad ,$$

como pode ser verificado impondo primeiro aquelas condições na métrica (33).

Vamos nos entreter aqui, no caso $\gamma = 0$ e $b \neq 0$ e no caso $\gamma = b = 0$.

Coordenadas radiais nulas:

Caso $\gamma = 0 \forall b \neq 0$:

$$\begin{aligned} dr^* &= \frac{r_0}{(r-b)} dr \\ r^* &= r_0 \ln(r-b) + c \quad . \end{aligned} \quad (34)$$

Caso $\gamma = b = 0$:

$$\begin{aligned} dr^* &= \frac{r_0}{r} dr , \\ r^* &= r_0 \ln r + c \quad . \end{aligned} \quad (35)$$

Lembramos que as coordenadas incidentes (*in*) e emergentes (*em*) respectivamente, são dadas por

$$\begin{aligned} v &= t + r^* , \\ u &= t - r^* . \end{aligned}$$

A equação de Klein-Gordon não massiva para a métrica (33) é dada por

$$\left\{ \frac{r_0^2}{(r-b)^2 r^{2\gamma}} \partial_t^2 - \partial_r^2 - \frac{(2r-b)}{(r-b)r} \partial_r - \frac{1}{r(r-b)} \left(\partial_\theta^2 + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \partial_\theta + \partial_\varphi^2 \right) \right\} \Phi(x) = 0.$$

Fazendo a separação de variáveis

$$\Phi(x) = F(r) Y_l^m(\theta, \varphi) e^{-i\omega t},$$

obtêm-se

$$\partial_r^2 F(r) + \frac{(2r-b)}{(r-b)r} \partial_r F(r) + \left[\frac{r_0^2 \omega^2}{r^{2\gamma} (r-b)^2} - \frac{l(l+1)}{r(r-b)} \right] F(r) = 0.$$

Caso $\gamma = 0$ e $b \neq 0$: A equação de KG se reduz a

$$\partial_r^2 F(r) + \frac{(2r-b)}{(r-b)r} \partial_r F(r) + \left[\frac{r_0^2 \omega^2}{(r-b)^2} - \frac{l(l+1)}{r(r-b)} \right] F(r) = 0 .$$

Cuja a solução será,

$$\begin{aligned} \Phi(x) = & \left[C_1 \left(\frac{b-r}{b} \right)^{iE} F \left(\alpha + \frac{1}{2}, \beta + \frac{1}{2}, 1 + 2iE; \frac{b-r}{b} \right) \right. \\ & + \left. C_2 \left(\frac{b-r}{b} \right)^{-iE} F \left(\frac{1}{2} - \beta, \frac{1}{2} - \alpha, 1 - 2iE; \frac{b-r}{b} \right) \right] \\ & \times Y_l^m(\theta, \varphi) e^{-i\omega t} , \end{aligned}$$

onde

$$\alpha = i(E + \lambda), \quad \beta = i(E - \lambda), \quad \lambda^2 = E^2 - (l + 1/2)^2 \text{ e } E^2 = r_0^2 \omega^2 .$$

Solução perto do horizonte ($r = b + \rho \rightarrow \rho \ll 1$):

A equação de KG se reduz a

$$\partial_{\rho}^2 F(r) + \frac{1}{\rho} \partial_{\rho} F(r) + \frac{r_0^2 \omega^2}{\rho^2} F(r) = 0 \quad ,$$

Cuja a solução será

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= [A_1(r-b)^{i\omega r_0} + A_2(r-b)^{-i\omega r_0}] Y_l^m(\theta, \varphi) e^{-i\omega t} \\ &= [A_{em} e^{-i\omega u} + A_{in} e^{-i\omega v}] Y_l^m(\theta, \varphi) \quad . \end{aligned} \quad (36)$$

Solução exata perto do horizonte:

Para geometria perto do horizonte, $r - b \approx 0$, temos que (36) se reduz a

$$\Phi(x) \approx \left[C_1 \left(\frac{-1}{b} \right)^{iE} e^{-i\omega u} + C_2 \left(\frac{-1}{b} \right)^{-iE} e^{-i\omega v} \right] Y_l^m(\theta, \varphi), \quad (37)$$

onde foi utilizado o fato de $F(a, b, c; 0) = 1$.

Portanto comparando as equações (36) e (37), tem-se que

$$A_{em} = \left(\frac{-1}{b} \right)^{iE} C_1 \quad , \quad A_{in} = \left(\frac{-1}{b} \right)^{-iE} C_2 \quad . \quad (38)$$

Limite assintótico ($r \rightarrow \infty$):

A equação de KG se reduz, neste caso, a

$$\partial_r^2 F(r) + \frac{2}{r} \partial_r F(r) + [r_0^2 \omega^2 - l(l+1)] \frac{F(r)}{r^2} = 0 \quad .$$

Cuja a solução será

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= [B_1 r^{q_+} + B_2 r^{q_-}] Y_l^m(\theta, \varphi) e^{-i\omega t} \\ &= \frac{1}{\sqrt{r}} [B_{em} e^{-i\omega u} + B_{in} e^{-i\omega v}] Y_l^m(\theta, \varphi) \quad , \quad (39) \end{aligned}$$

onde

$$q_{\pm} = -\frac{1}{2} \pm i\lambda \quad .$$

Solução exata no limite assintótico ($r \rightarrow \infty$):

No limite assintótico tem-se que usar a formula de transformação das hipergeométricas

$$F(a, b, c; y) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)} (-1)^a y^{-a} F(a, a+1-c, a+1-b; 1/y) \\ + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)} (-1)^b y^{-b} F(b, b+1-c, b+1-a; 1/y)$$

No limite assintótico ($r \rightarrow \infty$),

$$\frac{1}{y} = \frac{b}{b-r} \approx 0 \Rightarrow F(a, b, c, ; 1/y) \approx 1, \\ \frac{b-r}{b} \approx \frac{-r}{b}.$$

A equação exata se torna

$$\begin{aligned}
 \Phi(x) = & \frac{1}{\sqrt{r}} \left\{ \Gamma(2i\lambda) b^{1/2-i\lambda} \left[\frac{\Gamma(1+2iE)}{\Gamma(\alpha+1/2)\Gamma(\alpha+1/2)} (-1)^{iE} C_1 \right. \right. \\
 & + \left. \left. \frac{\Gamma(1-2iE)}{\Gamma(1/2-\beta)\Gamma(1/2-\beta)} (-1)^{-iE} C_2 \right] e^{-i\omega u} \right. \\
 & + \Gamma(-2i\lambda) b^{1/2+i\lambda} \left[\frac{\Gamma(1+2iE)}{\Gamma(\beta+1/2)\Gamma(\beta+1/2)} (-1)^{iE} C_1 \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\Gamma(1-2iE)}{\Gamma(1/2-\alpha)\Gamma(1/2-\alpha)} (-1)^{-iE} C_2 \right] e^{-i\omega v} \right\} Y_l^m(\theta, \varphi) .
 \end{aligned}
 \tag{40}$$

Comparando a equação (39) com (40) e utilizando as relações (38) temos que,

$$B_{em} = \Gamma(2i\lambda) \left[\frac{\Gamma(1 + 2iE)}{\Gamma(\alpha + 1/2)\Gamma(\alpha + 1/2)} b^{1/2+\beta} A_{em} + \frac{\Gamma(1 - 2iE)}{\Gamma(1/2 - \beta)\Gamma(1/2 - \beta)} b^{1/2-\alpha} A_{in} \right], \quad (41)$$

$$B_{in} = \Gamma(-2i\lambda) \left[\frac{\Gamma(1 + 2iE)}{\Gamma(\beta + 1/2)\Gamma(\beta + 1/2)} b^{1/2+\alpha} A_{em} + \frac{\Gamma(1 - 2iE)}{\Gamma(1/2 - \alpha)\Gamma(1/2 - \alpha)} b^{1/2-\beta} A_{in} \right]. \quad (42)$$

Esta análise no limite assintótico é válida somente para o caso em que $r_0\omega \gg l + 1/2$.

Cálculo da temperatura:

Por ter uma solução exata bem comportada, podendo-se assim relacionar as constantes da solução na região perto do horizonte com as constantes da solução no limite assintótico, usaremos a técnica de relacionar o coeficiente de reflexão \mathcal{R} à temperatura T . A fórmula covariante do fluxo, dada por

$$\mathcal{F}^\mu = \frac{2\pi}{i} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \Phi^* \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\nu \Phi \quad ,$$

é resolvida para métrica (33) com $\gamma = 0$ onde $g = -r_0^2 r^2$ é o determinante da métrica. Temos, então, que calcular os fluxos incidentes (*in*) e emergentes (*em*), nas regiões próxima ao horizonte ($r = r_h$) e no limite assintótico (∞).

Usaremos a condição de contorno na qual no limite assintótico, $r \rightarrow \infty$, a constante B_{em} é nula.

Calculemos agora os fluxos.

- Para $\mathcal{F}_{r_H}^{r\ em}$ onde $A_{in} = 0$,

$$\mathcal{F}_{r_H}^{r\ em} = \frac{2\pi}{i} \sqrt{-g_{r_H} g_{r_H}^{rr}} (F_\delta^{em})^* \overleftrightarrow{\partial}_r F_\delta^{em} \quad ,$$

onde $\delta = r - b$.

Portanto utilizando a solução (36), temos

$$\begin{aligned} \partial_r F_\delta^{em} &= \partial_r A_{em} (r - b)^{iE} \\ &= i A_{em} E (r - b)^{iE-1} \quad , \\ \partial_r (F_\delta^{em})^* &= \partial_r A_{em}^* (r - b)^{-iE} \\ &= -i A_{em}^* E (r - b)^{-(iE+1)} \quad . \end{aligned}$$

Logo

$$\mathcal{F}_{r_H}^{r\ em} = -4\pi E b A_{em} A_{em}^* \quad . \quad (43)$$

- Para $\mathcal{F}_\infty^{r in}$ sendo agora $B_{em} = 0$

$$\mathcal{F}_\infty^{r in} = \frac{2\pi}{i} \sqrt{-g_\infty} g_\infty^{rr} (F_\infty^{in})^* \overset{\leftrightarrow}{\partial}_r F_\infty^{in} .$$

Utilizando a solução (39),

$$\begin{aligned} \partial_r F_\infty^{in} &= \partial_r B_{in} r^{-(i\lambda+1/2)} \\ &= -B_{in} \left(i\lambda + \frac{1}{2} \right) r^{-(i\lambda+3/2)} , \\ \partial_r (F_\infty^{in})^* &= \partial_r B_{in}^* r^{i\lambda-1/2} \\ &= B_{in}^* \left(i\lambda - \frac{1}{2} \right) r^{i\lambda-3/2} . \end{aligned}$$

Logo,

$$\mathcal{F}_\infty^{r in} = 4\pi\lambda B_{in} B_{in}^* . \quad (44)$$

- Para $\mathcal{F}_{r_H}^{r in}$ onde $A_{em} = 0$

$$\mathcal{F}_{r_H}^{r in} = \frac{2\pi}{i} \sqrt{-g_{r_H} g_{r_H}^{rr}} (F_{\delta}^{in})^* \overset{\leftrightarrow}{\partial}_r F_{\delta}^{in} \quad ,$$

onde $\delta = r - b$.

Utilizando a solução (36),

$$\begin{aligned} \partial_r F_{\delta}^{in} &= \partial_r A_{in} (r - b)^{-iE} \\ &= -i A_{in} E (r - b)^{-(iE+1)} \quad , \\ \partial_r (F_{\delta}^{in})^* &= \partial_r A_{in}^* (r - b)^{iE} \\ &= i A_{in}^* E (r - b)^{iE-1} \quad . \end{aligned}$$

Logo,

$$\mathcal{F}_{r_H}^{r in} = 4\pi E b A_{in} A_{in}^* \quad . \quad (45)$$

Portanto os coeficientes de reflexão e transmissão serão

$$\mathcal{R} = \left| \frac{\mathcal{F}_{r_H}^{r\ em}}{\mathcal{F}_{r_H}^{r\ in}} \right| = \frac{A_{em} A_{em}^*}{A_{in} A_{in}^*}, \quad \mathcal{T} = \left| \frac{\mathcal{F}_{\infty}^{r\ in}}{\mathcal{F}_{r_H}^{r\ in}} \right| = \frac{\lambda}{Eb} \frac{B_{in} B_{in}^*}{A_{in} A_{in}^*}. \quad (46)$$

Por (41) e (42), empregando a condição $B_{em} = 0$, encontra-se

$$A_{em} A_{em}^* = \left[\frac{|\Gamma(1/2 + i(E + \lambda))|^2}{|\Gamma(1/2 + i(E - \lambda))|^2} \right]^2 A_{in} A_{in}^*,$$

$$B_{in} B_{in}^* = \frac{|\Gamma(2i\lambda)|^2 |\Gamma(1 + 2iE)|^2}{\left[|\Gamma(1/2 + i(E + \lambda))|^2 \right]^2}$$

$$\times \left\{ 1 - \left[\frac{|\Gamma(1/2 + i(E + \lambda))|^2}{|\Gamma(1/2 + i(E - \lambda))|^2} \right]^2 \right\}^2 b A_{in} A_{in}^* .$$

Utilizando as seguintes relações da função gamma

$$\begin{aligned}
 |\Gamma(iy)|^2 &= \frac{\pi}{y \sinh[\pi y]} , \\
 \left| \Gamma\left(\frac{1}{2} + iy\right) \right|^2 &= \frac{\pi}{\cosh[\pi y]} , \\
 |\Gamma(1 + iy)|^2 &= \frac{\pi y}{\sinh[\pi y]} , \qquad (47)
 \end{aligned}$$

onde y é real, encontra-se

$$\begin{aligned}
 A_{em}A_{em}^* &= \frac{\cosh^2[\pi(E - \lambda)]}{\cosh^2[\pi(E + \lambda)]} A_{in}A_{in}^* \\
 B_{in}B_{in}^* &= \frac{Eb \sinh[2\pi E] \sinh[2\pi \lambda]}{\lambda \cosh^2[\pi(E + \lambda)]} A_{in}A_{in}^* .
 \end{aligned}$$

Portanto

$$\mathcal{R} = \frac{\cosh^2[\pi(E - \lambda)]}{\cosh^2[\pi(E + \lambda)]}, \quad \mathcal{T} = \frac{\sinh[2\pi E] \sinh[2\pi \lambda]}{\cosh^2[\pi(E + \lambda)]}.$$

Utilizando as seguintes relações,

$$\begin{aligned} \cosh^2(x) &= \frac{1}{2} [\cosh(2x) + 1], \\ \cosh(x \pm y) &= \cosh(x) \cosh(y) \pm \sinh(x) \sinh(y), \end{aligned}$$

encontra-se que a condição de normalização é satisfeita.

No limite de altas frequências, $\omega \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} \lambda &= \sqrt{\omega^2 r_0^2 - \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} \\ &\approx \omega r_0 = E. \end{aligned}$$

Logo

$$\mathcal{R} = \frac{1}{\cosh^2[2\pi E]}, \quad \mathcal{T} = \frac{\sinh^2[2\pi E]}{\cosh^2[2\pi E]}.$$

Portanto, no limite de altas frequências,

$$\begin{aligned} \cosh[2\pi E] &= \frac{e^{2\pi E} + e^{-2\pi E}}{2} \approx \frac{e^{2\pi E}}{2}, \\ \mathcal{R} &\approx \frac{4}{e^{4\pi E}}. \end{aligned}$$

Da relação de temperatura (31), obtemos

$$\begin{aligned} T_H &= -\frac{\omega}{\ln(4e^{-4\pi E})} \\ &\approx \frac{\omega}{\ln e^{4\pi E}} = \frac{1}{4\pi r_0}, \end{aligned} \quad (48)$$

o que confirma a temperatura via gravidade superficial.

Caso $\gamma = b = 0$: A equação de KG se reduz a

$$\partial_r^2 F(r) + \frac{2}{r} \partial_r F(r) + \left[\frac{r_0^2 \omega^2}{r^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] F(r) = 0 \quad ,$$

onde a equação diferencial acima foi resolvida para o caso $\gamma = 0$
 $\forall b \neq 0$ no limite assintótico, cuja solução é dada por

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{r}} [B_{em} e^{-i\omega u} + B_{in} e^{-i\omega v}] Y_l^m(\theta, \varphi) \quad ,$$

Este caso representa o vácuo dilatônico $|0, r_0 \rangle$ que é dado pela métrica

$$ds^2 = \frac{r}{r_0} dt^2 - \frac{r_0}{r} dr^2 - r r_0 d\Omega^2 \quad , \quad (49)$$

que descreve também a geometria no limite assintótico ($r \rightarrow \infty$)
no caso dilatônico linear $\gamma = 0$ e $b \neq 0$.

Utilizando o cálculo da temperatura via a gravidade superficial para a métrica (49), teríamos que

$$T_H = \frac{1}{4\pi r_0} \quad .$$

Porém, fazendo as seguintes mudanças de variáveis:

$$x = \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \quad , \quad \tau = \frac{t}{r_0} \quad .$$

O que coloca a métrica na forma

$$ds^2 = \Sigma^2 (d\tau^2 - dx^2 - d\Omega^2) \quad , \quad (50)$$

onde $\Sigma = r_0 e^{x/2} = rr_0$. O que nos mostra que o vácuo no caso dilaton linear representa uma métrica conforme do produto $M_2 \times S_2$, um espaço de Minkowski bi-dimensional com uma bi-esfera de raio unitário.

Redefinindo o campo escalar,

$$\Phi = \Sigma^{-1}\Psi \quad , \quad (51)$$

a equação de KG torna-se uma equação de campos livres,

$$\nabla_2^2 \Psi + \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 \Psi = 0 \quad , \quad (52)$$

onde Ψ foi separado em função dos harmônicos esféricos e ∇_2^2 é o laplaciano em M_2 .

A equação (52) representa uma equação de ondas planas onde a norma da equação de KG em 4 dimensões se reduz à norma em M_2 :

$$\|\Phi\|^2 = \frac{1}{2i} \int d^3x \sqrt{-g} g^{0\mu} \Phi^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu \Phi = \frac{2\pi}{i} \int dx \Psi^* \overleftrightarrow{\partial}_\tau \Psi \quad . \quad (53)$$

Claramente isto reproduz uma equação de campos livres onde não há produção de partículas.

- Temperatura via anomalias

Seja a ação

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \psi^* \nabla^2 \psi .$$

Redefinindo o campo $\psi = \Sigma^{-1} \Psi$, a ação para métrica (50) se escreve como

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \sqrt{-g} \Sigma^{-1} \Psi^* \nabla^2 (\Sigma^{-1} \Psi) \\ &= \int d^4x \sin \theta \Psi^* \left(\partial_\tau^2 - \partial_x^2 - \nabla_\Omega^2 + \frac{1}{4} \right) \Psi. \end{aligned}$$

Claramente isto representa uma equação de campos livres, onde não há anomalias para serem tratadas. Esta relação é compatível com a análise anterior do campo de KG.

Conclusão:

- O caso $\gamma = b = 0$ para os BNDnASP nos dá um bom exemplo de que não podemos simplesmente calcular a gravidade superficial e empregá-la na definição de temperatura: devemos fazer o cálculo mais detalhado das propriedades do campo quântico para saber se esta relação é válida ou não. Foi mostrado neste caso que a relação da temperatura com a gravidade superficial não é válida. Isso é um efeito da geometria do espaço-tempo estudado e não um efeito termodinâmico, criação de partículas, como foi mostrado.